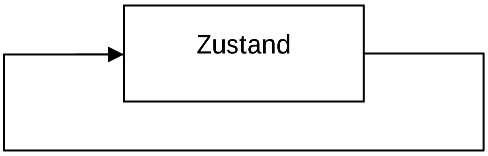
Edmund Kronabel

Mathematik, Physik und GTR/CAS:

Die fächerübergreifende Behandlung der Exponentialfunktion im Jahrgang 10

Die Behandlung von Wachstums- und Zerfallsprozessen spielt eine zentrale Rolle in der Klassenstufe 10. Die Exponentialfunktion zur Beschreibung spezieller Wachstumsvorgänge sollte sowohl in expliziter als auch rekursiver Form behandelt werden. Dabei steht die Mathematisierung eines dynamischen Prozesses der Form (vgl. [1], S. 9) im Mittelpunkt der mathematischen Argumentation.

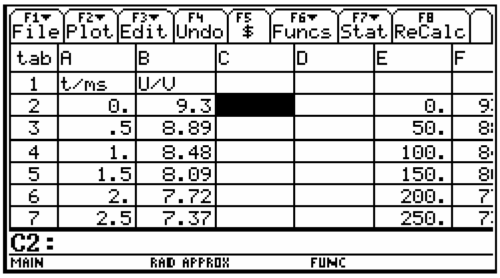


Bestandsänderung proportional zum Bestand

Die iterative und explizite Beschreibung von Wachstumsmodellen ist eine wichtige Schnittstelle zwischen Sekundarstufe I und II und unterstützt eine intuitive Vorstellung von der Änderungsrate und bereitet so das Änderungsratenkalkül vor.

Einführung der Exponentialfunktion, Entdecken zentraler Eigenschaften

Am Beispiel einer Kondensatorentladung sollen die Exponentialfunktion eingeführt und zentrale Eigenschaften entdeckt werden.
Die Kondensatorentladung kann sehr komfortabel z.B. mit dem CASSY-Messwerterfassungssystem gemessen werden. Es ist aber auch möglich, das Vernier-LabPro für die TI-Taschenrechner zu verwenden und die Entladung z.B. im Schülerversuch durchzuführen. Die Messwerte werden mit Hilfe einer Computer-Tabellenkalkulation oder mit CellSheet weiter verarbeitet. Problematisch wird die Konvertierung von z.B. Excel zu CellSheet, da Excel die Dezimalzahldarstellung mit Kommata, CellSheet die englische Variante mit Punkten verwendet. Deshalb habe ich die Kommata durch Multiplikation mit dem Faktor 100 vor der Konvertierung entfernt, um sie dann in CellSheet durch Division wieder zu erhalten (s. Abb.1)



tab	A	B	C	D	E	F
1	t/ms	U/V				
2	0.	9.3			0.	9
3	.5	8.89			50.	8
4	1.	8.48			100.	8
5	1.5	8.09			150.	8
6	2.	7.72			200.	7
7	2.5	7.37			250.	7

C2:

Abb. 1

Ausschnitt aus der Messwerttabelle.

Die Messwerte können graphisch dargestellt werden:

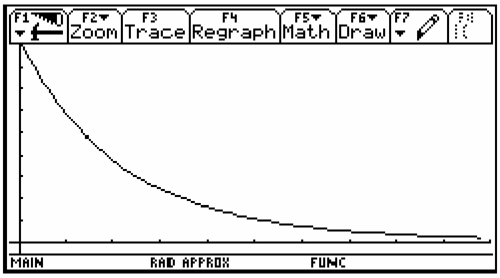
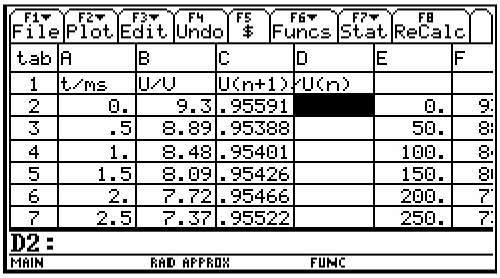


Abb. 2

Graph zu den Messwerten

Die Schülerinnen und Schüler werden nun dazu aufgefordert, die Messung auszuwerten und Vermutungen aufzustellen. Sie entdecken, dass das Verhältnis aufeinander folgender Messwerte stets konstant ist:

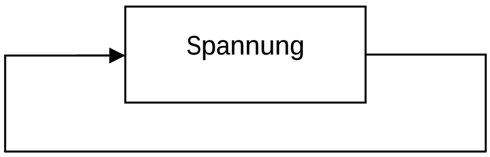


tab	A	B	C	D	E	F
1	t/ms	U/V	U(n+1)/U(n)			
2	0.	9.3	.95591		0.	9
3	.5	8.89	.95388		50.	8
4	1.	8.48	.95401		100.	8
5	1.5	8.09	.95426		150.	8
6	2.	7.72	.95466		200.	7
7	2.5	7.37	.95522		250.	7

D2:

Abb. 3

Warum ist das so? Obiges Schema kann eingeführt



Spannungsänderung durch abfließende Ladungen

werden:
Offensichtlich ist der Stromfluss der Spannung proportional.
Nun kann man die Schülerinnen und Schüler auffordern, gleiche Zeitintervallgrößen graphisch zu

betrachten, z.B. die Zeitintervalle [0ms;10ms] (Abb. 4) und [5ms;15ms] (Abb. 5):

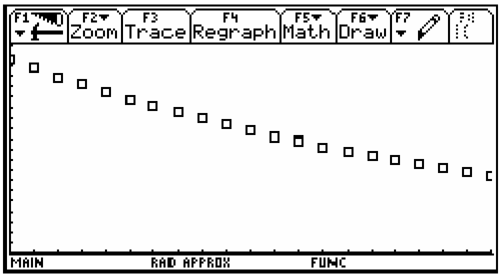


Abb. 4

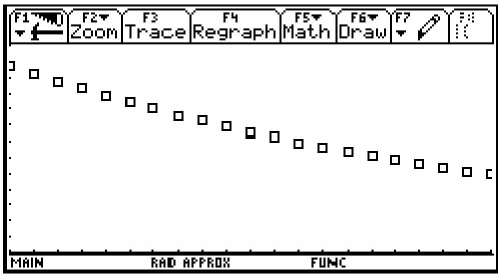


Abb. 5

Bei geeigneter Skalierung entdecken die Schüler nochmals graphisch, dass in gleichen Zeitintervallen der Graph um den gleichen Prozentsatz fällt.
Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ fällt ebenso geradezu ins Auge.

Experimentell kann mit Hilfe des Folgenmodus eine rekursive Gleichung des exponentiellen Zerfalls bestimmt werden.
Man beginnt die Experimentierphase offensichtlich mit dem Wachstumsfaktor $1 + w = 0{,}955^2 = 0{,}912$ und einem Anfangswert $u(1) = 9$.
Hier könnte die Experimentierphase schließen mit der Rekursionsgleichung
$u1(n) = u1(n-1) \cdot 0.914, \quad ui1 = 8.9$.
Diese Rekursion trifft den Graphen recht gut:

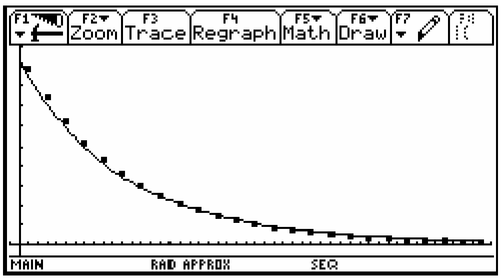


Abb. 6

In dieser Phase können die Schüler ebenso entdecken, dass kleine Veränderungen des Wachstumsfaktors große Auswirkungen auf den graphischen Verlauf der Rekursion haben.
Der Schritt von der rekursiven zur expliziten Darstellung $f(x) = f(0) \cdot (1 + w)^x$ ist offensichtlich und stellt die Schülerinnen und Schüler vor kein Problem.

Es kann die Regressionsfunktion bestimmt werden, die die Messwerte approximiert:

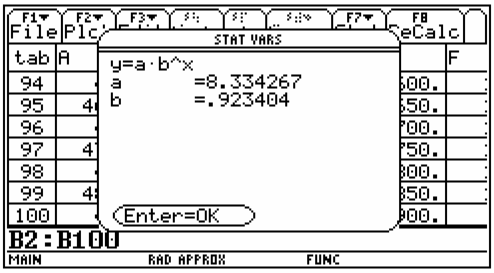


Abb. 7

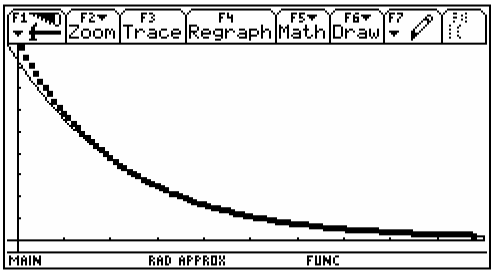
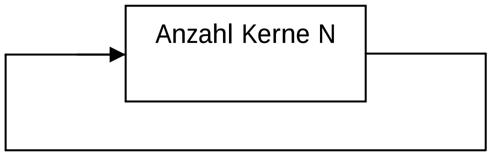


Abb. 8

Es bietet sich nun an, die Kondensatoraufladung mathematisch zu beschreiben.
Im Anschluss können weitere Wachstums- (w>0) bzw. Zerfallsprozesse (w<0) ´innermathematisch´ betrachtet werden.

Anwendung der Exponentialfunktion beim radioaktiven Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall tritt die Exponentialfunktion wiederum auf. Es wird ein Versuchsaufbau wie in GÖTZ et. al. [2] S.99 beschrieben verwendet. Sind die Messwerte aufgenommen und graphisch dargestellt, erkennen die Schülerinnen und Schüler sehr schnell den Unterrichtszusammenhang und stellen die folgende Hypothese auf:



Kernzerfall proportional zum Bestand

DATA	t	N	tm	Nm	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1.	536.	5.	53.6	
2	2.	451.	15.	45.1	
3	3.	378.	25.	37.8	
4	4.	308.	35.	30.8	
5	5.	281.	45.	28.1	
6	6.	229.	55.	22.9	
7	7.	195.	65.	19.5	

c5=

Abb. 9

Messwerttabelle im Data/Matrix-Editor

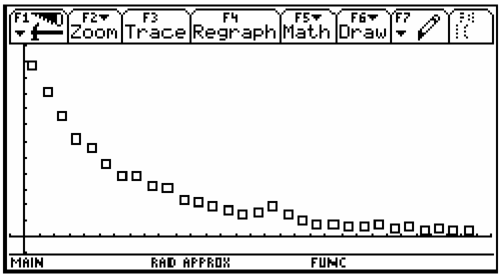


Abb. 10

Graphischer Verlauf des Zerfalls

Eine entsprechende exponentielle Regression ergibt:

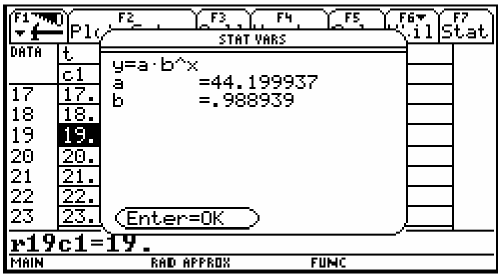


Abb. 11

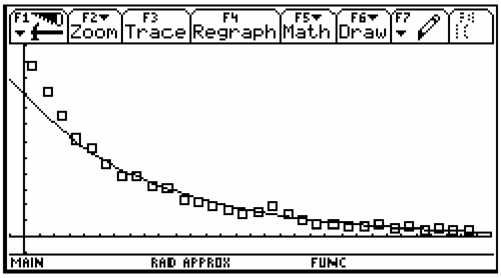


Abb. 12

Es gibt nun vielfältige Möglichkeiten, die charakteristische Größe Halbwertszeit einzuführen und zu berechnen. Hier ergibt sich eine Halbwertszeit von $t_H = 62\,\text{sec}$.

Die Halbwertszeit des verwendeten Stoffes Radon-220 beträgt 55,6sec. hat. Wir haben die Halbwertszeit also relativ genau bestimmt.

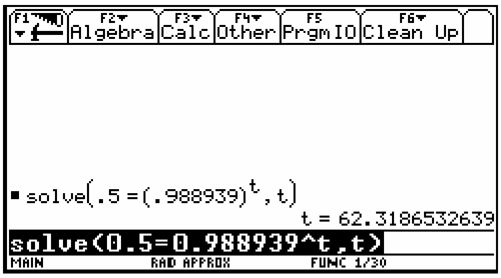


Abb. 13

Resümee

Die Exponentialfunktion und deren Umkehrfunktion wird in konkretem Sachzusammenhängen eingeführt bzw. angewendet. Für die Schülerinnen und Schüler wird die Funktionsklasse weniger abstrakt. Die Funktionen werden problem- und schülerorientiert behandelt. Zeitgemäße Technologien werden angemessen eingesetzt als Werkzeug zur Beschreibung von Vorgängen, zum Entdecken mathematischer Eigenschaften und zum Lösen konkreter Problemstellungen.

Sicherlich wird der Anwender von Hilfsmitteln wie LabPro und CellSheet an deren Grenzen geführt. Computergestützte Systeme sind komfortabler. Dennoch bietet die Taschenrechnerauswertung eine gute Alternative.

Der Autor:
Edmund Kronabel
Am Brink 8
D-26904 Börger

Literatur:

[1] KNECHTEL, KRAMER, KRÜGER, WEISKIRCH: mathe ´open end´: Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra, Teil 1: Differentialrechnung. Westermann, Braunschweig 2001.

[2] GÖTZ, DAHNCKE, LANGESIEPEN (Hrsg.): Handbuch des Physik-Unterrichts, Sekundarbereich 1, Band 8: Atom- und Kernphysik, Astronomie, Technikbezüge. Aulis-Verlag, Köln 1998.