Rückzahlung von Darlehen mit dem TI-30X Prio MathPrint™ berechnen

In diesem Beitrag wird erklärt, was ein Annuitätendarlehen ist und wie dessen Rückzahlung funktioniert. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, wie man mit dem Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ die Entwicklung der Restschuld berechnen kann, sowohl rekursiv als auch mit einer expliziten Formel. Abschließend wird das Prinzip auf „Buy Now Pay Later"-Angebote übertragen und die Kosten solcher Kredite anhand eines konkreten Falls berechnet.

Annuitätendarlehen

„Ein Annuitätendarlehen ist ein Tilgungsdarlehen mit konstanten Rückzahlungsbeträgen (Raten). Im Gegensatz zum Abzahlungsdarlehen bleibt die Höhe der zu zahlenden Rate über die gesamte Laufzeit gleich (sofern eine Zinsbindungsfrist über die gesamte Laufzeit vereinbart wurde). Die Annuitätenrate oder kurz Annuität setzt sich aus einem Zins- und einem Tilgungsanteil zusammen. Da mit jeder Rate ein Teil der Restschuld getilgt wird, verringert sich der Zinsanteil zugunsten des Tilgungsanteils. Am Ende der Laufzeit ist die Kreditschuld vollständig getilgt.
Der Zinssatz wird bei Abschluss eines Annuitätendarlehens über einen vertraglich vereinbarten Zeitraum festgeschrieben. Dieser Zeitraum kann sich auch über die gesamte Kreditlaufzeit erstrecken. Die Tilgung sollte im ersten Jahr mindestens 1 Prozent der Kredit(rest)summe betragen. Sie steigt dann mit fortschreitender Ratenzahl bis auf theoretisch 100 % der Kreditrestsumme im letzten Jahr."[1)]

Ein Beispiel:

Ein Ehepaar nimmt für den Erwerb einer Eigentumswohnung einen Kredit über 120 000 Euro auf. Der Jahreszinssatz ist festgeschrieben auf 9%. Jährlich werden 12 000 Euro in einer einmaligen Rate zurückgezahlt.
Zunächst wird die Entwicklung der Restschuld (in Euro) in Abhängigkeit von der Zeit (in Jahren) durch ein rekursives Verfahren untersucht.
Stand nach dem ersten Jahr:
Nach dem ersten Jahr wird die die gesamte Kreditsumme S verzinst. Die Schuldzinsen haben eine Höhe von $120\,000 \cdot 0{,}09 = 10\,800$ Euro. Die neue Restschuld ergibt sich aus der alten Restschuld (S) + Schuldzinsen (Z) – Rate (R), also
$120\,000 + 10\,800 - 12\,000 = 118\,800$ (Euro).
Verallgemeinerung des rekursiven Verfahrens durch einen Algorithmus:
Das Verfahren kann durch einen Algorithmus verallgemeinert werden. Dabei werden Abkürzungen verwendet:
S_{k+1}: neue Restschuld; S_k: alte Restschuld; p: Zinssatz; R: Rate
$S_{k+1} = S_k + S_k \cdot p\% - R$ und $S_0 = 120\,000$; $p = 9\,\%$; $R = 12\,000$

© T3 Deutschland 2025

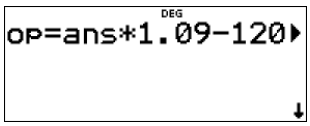
Umsetzung mit dem TI-30X Prio MathPrint™

Die Gleichung $S_{k+1} = S_k + S_k \cdot p\%$ wird wegen der fehlenden Prozenttaste ersetzt durch

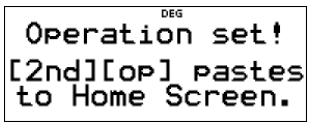
$S_{k+1} = S_k + S_k \cdot \frac{p}{100} - R = S_k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R$

Für die Berechnungen mit dem TI-30X Prio MathPrint werden die Optionen **[set op]** (Tastenfolge 2nd ×) und **[op]** (Tastenfolge 2nd)) genutzt.

2nd × [set op]

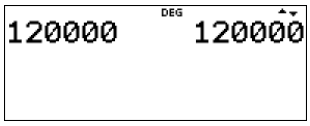


enter



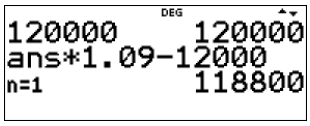
$S_k \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) - 12\,000$

Startwert



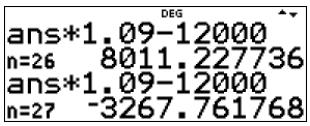
mit enter bestätigen

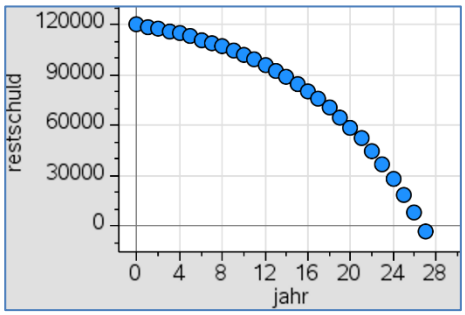
2nd) [op]



Das ist die Restschuld nach dem ersten Jahr (siehe oben).

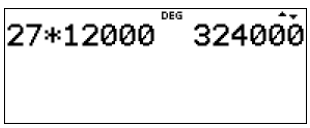
Nun muss man so lange immer wieder 2nd) [op] drücken, bis die angezeigte Restschuld erstmals null oder negativ wird. Die Anzahl der Schritte (= Anzahl der Jahre) wird der Variablen n zugeordnet.





Also nach etwas mehr als 26 Jahren wäre der Kredit abgezahlt. Für das 27. Jahr kann eine gesonderte Restzahlung vereinbart werden. Die grafische Veranschaulichung der Entwicklung der Restschuld zeigt das mit der TI-Nspire™ CX Technologie erstellte Diagramm.

Rechnen wir näherungsweise mit 27 Jahren Rückzahlung zu jährlich 12 000 Euro, dann hätte man für den Kredit von 120 000 Euro also insgesamt 324 000 Euro zurückgezahlt. Das ist fast das Dreifache der Kreditsumme!



„Was ist ein Einbruch in eine Bank gegen die Gründung einer Bank.“
(Bertold Brecht in der „Dreigroschenoper“)

Das soeben beschriebene rekursive Verfahren kann auch durch ein explizites Vorgehen ersetzt werden, bei dem die Restschuld im k-ten Jahr direkt durch die Eingabe von k in eine Formel berechnet werden kann.

© T3 Deutschland 2025

Zunächst wird eine solche Formel hergeleitet:

Abkürzungen:
S_0: Kreditsumme
S_k: Restschuld nach k Jahren
z: Verzinsungsfaktor $z = 1 + \frac{p}{100}$
R: jährliche Rückzahlungsrate

Start mit S_0

Nach einem Jahr:

$S_1 = S_0 \cdot z - R$

Nach zwei Jahren:

$S_2 = S_1 \cdot z - R = (S_0 \cdot z - R) \cdot z - R = S_0 \cdot z^2 - R \cdot z - R = S_0 \cdot z^2 - R \cdot (z + 1)$

Nach drei Jahren:

$S_3 = S_2 \cdot z - R = S_2 = \left(S_0 \cdot z^2 - R \cdot (z + 1)\right) \cdot z - R = S_0 \cdot z^3 - R \cdot (z^2 + z + 1)$

Nach vier Jahren:

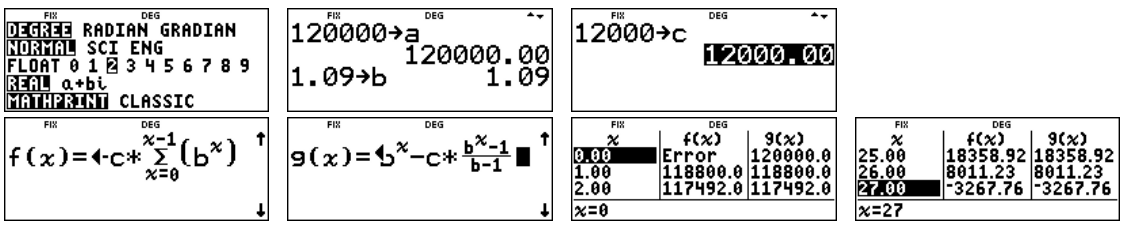
$S_4 = S_3 \cdot z - R = \left(S_0 \cdot z^3 - R \cdot (z^2 + z + 1)\right) \cdot z - R = S_0 \cdot z^4 - R \cdot (z^3 + z^2 + z + 1)$

Das Muster ist zu erkennen. Nach k Jahren gilt:

$S_k = S_0 \cdot z^k - R \cdot \left(z^{k-1} + \cdots + z^2 + z + 1\right) = S_0 \cdot z^k - R \cdot \sum_{i=0}^{k-1} z^i$

Die Summe $\sum_{i=0}^{k-1} z^i = z^{k-1} + \cdots + z^2 + z + 1$ kann mit der Summenformel der geometrischen Reihe umgeformt werden zu $\sum_{i=0}^{k-1} z^i = \frac{z^k - 1}{z - 1}$ (Teleskopsummenbeweis im Anhang).

Für die Restschuld nach k Jahren ergibt sich damit die explizite Formel
$S_k = S_0 \cdot z^k - R \cdot \frac{z^k - 1}{z - 1}$.
Für die Berechnung der Restschulden mit dem TI-30X Prio MathPrint™ kann sowohl die Darstellung $S_k = S_0 \cdot z^k - R \cdot \sum_{i=0}^{k-1} z^i$ als auch die Formel $S_k = S_0 \cdot z^k - R \cdot \frac{z^k - 1}{z - 1}$ verwendet werden. Zu Vergleichszwecken wird erstere unter f(x) und die zweite Formel unter g(x) definiert. Die benötigten Werte für S_0, z und R werden unter den drei Rechnervariablen a, b und c gespeichert. Die Anzahl der Nachkommastellen wird auf zwei festgelegt.



Beide Funktionen zeigen die gleichen Funktionswerte an, außer für f(0). Die Fehlermeldung resultiert wohl daraus, dass in der Summenformel für x = 0 die obere Grenze kleiner ist als die untere Grenze.

© T3 Deutschland 2025

Buy Now Pay Later

„1. Was ist Buy Now Pay Later?
Buy Now Pay Later-Angebote gewinnen als Zahlungsmethode im e-Commerce massiv an Bedeutung. Es geht bei „Kaufe jetzt, bezahle später“ um den kreditbasierten Kauf mit Hilfe von Online-Bezahldiensten. […]
6. Wie viel kostet Buy Now Pay Later überhaupt?
Wer seine Ware nicht innerhalb einer Zahlungsfrist bezahlt, sondern auf den Ratenkredit bei Buy Now Pay Later umsteigt oder ihn gleich adressiert, der zahlt Zinsen auf den Kredit. Nehmen wir die bekanntesten Anbieter: Klarna verlangt einen effektiven Jahreszins in Höhe von 14,79 Prozent – bei einer Kaufsumme von 499 Euro sind das innerhalb von sechs Monaten rund 20 Euro Extrakosten, hat Finanztip ausgerechnet.“ [2)]

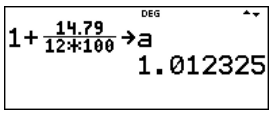
Das oben zitierte Beispiel wird zur Veranschaulichung nachgerechnet.
Zunächst muss die Höhe der monatlichen Rate bestimmt werden. Nach n Zeitabschnitten ist die Restschuld $S_n = 0$. Die auf Seite 3 hergeleitete Formel $S_k = S_0 \cdot z^k - R \cdot \frac{z^k-1}{z-1}$ ergibt dann $0 = S_0 \cdot z^n - R \cdot \frac{z^n-1}{z-1}$. Diese Formelwird nach R umgestellt:

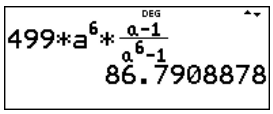
$S_0 \cdot z^n = R \cdot \frac{z^n-1}{z-1} \Longrightarrow R = S_0 \cdot z^n \cdot \frac{z-1}{z^n-1}$

Da es um monatliche Rückzahlungen geht, muss der Zinssatz auf Monatszinsen eingestellt werden: $z = 1 + \frac{p}{12 \cdot 100}$

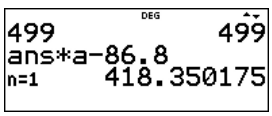
Mit den oben genannten Daten im Klarna-Beispiel ergibt sich bei sechs Monatsraten:

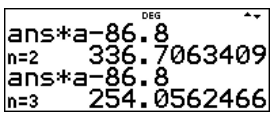
$$R = 499\,€ \cdot \left(1 + \frac{14{,}79}{12 \cdot 100}\right)^6 \cdot \frac{1+\frac{14{,}79}{12 \cdot 100}-1}{\left(1+\frac{14{,}79}{12 \cdot 100}\right)^6-1} \approx 86{,}80\,€$$

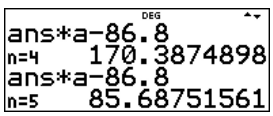


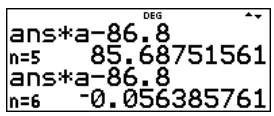


Die Entwicklung der Restschuld mit diesen Daten zeigt, dass der Kredit tatsächlich nach ca. sechs Monaten zurückgezahlt ist.

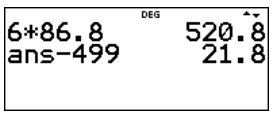








Insgesamt wurden $6 \cdot 86{,}80\,€ = 520{,}80\,€$ zurückgezahlt, also 21,80 € mehr als die Kreditsumme ausmachte.



© T3 Deutschland 2025

Anhang mit dem Teleskopbeweis für $\sum_{i=0}^{k-1} z^i = \frac{z^k-1}{z-1}$:

Summe $S_k = \sum_{i=0}^{k-1} z^i = z^{k-1} + \cdots + z^2 + z + 1$ multiplizieren mit z:

$z \cdot S_k = \sum_{i=1}^{k} z^i = z^k + z^{k-1} + \cdots + z^2 + z$

Für die Differenz $S_k - z \cdot S_k$ gilt:

$S_k - z \cdot S_k = \left(z^{k-1} + \cdots + z^2 + z + 1\right) - \left(z^k + z^{k-1} + \cdots + z^2 + z\right) = 1 - z^k.$

Ausklammern von S_k:

$S_k - z \cdot S_k = S_k \cdot (1 - z) = 1 - z^k$

Dividieren durch $(1 - z)$:

$S_k = \frac{1-z^k}{1-z} = \frac{z^k-1}{z-1}$ mit $z \neq 1$

Quellenangaben

1) *https://de.wikipedia.org › wiki › Annuitätendarlehen*
zuletzt eingesehen am 17.11.2025
2) https://www.schufa.de/newsroom/finanzen/buy-now-pay-later-neue-form-ratenkaufs/
zuletzt eingesehen am 17.11.2025

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

Info:
Dr. Wilfried Zappe unterrichtete Mathematik und Physik am Gymnasium „Goetheschule“ in Ilmenau und engagiert sich im jetztigen Ruhestand für das Lehrernetzwerk T3 Deutschland.

© T3 Deutschland 2025