



















Aufgaben rund um Fußball, die Bundesliga und die Europameisterschaft 2024

Die folgenden Aufgaben beinhalten einerseits Wahrscheinlichkeitsberechnungen und andererseits Simulationen zu verschiedenen Problemen rund um Fußballereignisse. Sowohl in den Bildungsstandards als auch in fast allen Rahmenlehrplänen Mathematik wird verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler Simulationen mit digitalen Werkzeugen durchführen. Die Bearbeitungen werden mit einem MMS (TI-Nspire™ CX II-T CAS) durchgeführt.

Simulationen zur Bundesliga der Herren

Fangen wir zunächst an mit einigen Simulationen zur Punktverteilung in einer Liga mit gleichstarken Mannschaften ¹⁾

Betrachten wir den Ausgang der Bundesligatablelle von 2023/24, so sieht man eine überragende Mannschaft und eine abgeschlagene. Die erreichten Punktzahlen schwanken also zwischen 90 und 17.

1		Bayer Leverkusen	90	34	28	0	6	10		SC Freiburg	42	34	11	14	9
2		VfB Stuttgart	73	34	23	7	4	11		FC Augsburg	39	34	10	15	9
3		Bayern München	72	34	23	8	3	12		VfL Wolfsburg	37	34	10	17	7
4		RB Leipzig	65	34	19	7	8	13		FSV Mainz	35	34	7	13	14
5		Borussia Dortmund	63	34	18	7	9	14		M'gladbach	34	34	7	14	13
6		Eintracht Frankfurt	47	34	11	9	14	15		Union Berlin	33	34	9	19	6
7		TSG Hoffenheim	46	34	13	14	7	16		VfL Bochum	33	34	7	15	12
8		Heidenheim	42	34	10	12	12	17		1. FC Köln	27	34	5	17	12
9		Bremen	42	34	11	14	9	18		Darmstadt	17	34	3	23	8

Aufgabe 1

Welche fiktive Punktverteilung würde sich in einer Liga ergeben, in der alle Mannschaften gleichstark sind?

Im Profifußball geht ungefähr jedes 4. Spiel unentschieden aus.

- Wie sieht dies in der aktuellen Bundesligatablelle aus?
Die Zufallsgröße X beschreibe die erzielten Punkte pro Spiel.
- Erstelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechne Mittelwert und Standardabweichung.
- Simuliere die Saison 2023/24 mit deinem digitalen Werkzeug unter den genannten Bedingungen und interpretiere die Ergebnisse.

Aufgabe 2:

Wenn sich nun unter den 18 Mannschaften eine befinden würde, die 1,5-mal häufiger gewinnen würde als die anderen, wie würde dann die Tabelle aussehen? Wird die bessere Mannschaft immer Meister? Führe wieder eine Simulation durch.

Lösungsskizze zu 1

- a) Unentschieden gingen 81 der 306 Spiele (9 Spiele an jedem der 34 Spieltage) also ca. 26 % der Spiele aus.
- b) Wenn 25 % der Spiele Unentschieden ausgehen und alle Mannschaften gleichstark sind, ergibt sich X: Erzielte Punkte pro Spiel.

x_i	3	1	0
$P(X= x_i)$	37,5 %	25 %	37,5 %

Kenngrößen für ein Spiel:

Betrachten wir nur ein Spiel, so ergibt sich ein Erwartungswert von 1,375 und eine Standardabweichung von ca. 1,32

```

1.1 2.1 3.1 *erwartung..ert RAD
Erwartungswert, Varianz und
Standardabweichung
xliste:={ 0,1,3 } ▶ { 0,1,3 }
yliste:={ 0.375,0.25,0.375 }
▶ { 0.375,0.25,0.375 }
ex:=sum(xliste· yliste) ▶ 1.375
va:=sum((xliste-ex)2· yliste) ▶ 1.73438
sta:=√va ▶ 1.31696
    
```

Für 34 Spiele:

Der Erwartungswert wäre ca. 47 Punkte und die Standardabweichung ca. 7,7 Punkte.

```

yliste:={ 0.375,0.25,0.375 }
▶ { 0.375,0.25,0.375 }
ex:=sum(xliste· yliste) ▶ 1.375
34· ex ▶ 46.75
va:=sum(34· (xliste-ex)2· yliste) ▶ 58.9688
sta:=√va ▶ 7.67911
    
```

- c) Eine Simulation ist z. B. mit Notes machbar.

Es wird zunächst eine abschnittsweise definierte Funktion z definiert, die die gegebenen Wahrscheinlichkeiten erfasst.

$$z(x) := \begin{cases} 3, & x \geq 0.625 \\ 0, & x \leq 0.375 \end{cases} \text{ ▶ Fertig}$$

Für ein Unentschieden umfasst der Wert für x genau 0,25. Mit dem Befehl z(rand()) wird in die Funktion z eine Zufallszahl zwischen Null und Eins eingesetzt.

$$\sum_{n=1}^{34} (z(\text{rand}())) \text{ ▶ } 41$$

Ein erster Test liefert hier z. B. 41 Punkte für eine Mannschaft.

```

liga:=seq(∑n=134 (z(rand())),k,1,18)
▶ { 43,36,35,52,28,51,46,48,42,50,73,57,51,50,58,34,48,39 }
    
```

Betrachtet man nun alle 18 gleichstarken Mannschaften, so hat der Meister bei dieser Simulation 73 Punkte und der letzte 28.

```

stDevSamp(liga) ▶ 10.498 theor:1.32·√34 ▶ 7.6969
stat. x̄ ▶ 47.278 theor.Mittelwert 34· 1.375 ▶ 46.75
    
```

Die Streuung ist nicht so groß, wie bei der realen Bundesligaabschlusstabelle, aber das war ja nicht zu erwarten, da alle Mannschaften als gleichstark angenommen worden sind.

Lösungsskizze zu 2

x_i	3	1	0
$P(X = x_i)$	45 %	25 %	30 %

Bei der unten dargestellten Simulation zeigt sich, dass die beste Mannschaft nicht immer Meister werden würde, sondern bei 10 Versuchen nur viermal (zweimal 61 Punkte bzw. zweimal 59 Punkte).

$$m(x) := \begin{cases} 3, & x \geq 0.55 \\ 0, & x \leq 0.3 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Fertig}$$

$$\sum_{n=1}^{34} (m(\text{rand}())) \quad \text{40}$$

$$\text{seq} \left(\sum_{n=1}^{34} (m(\text{rand}())), k, 1, 10 \right) \quad \{61, 48, 44, 46, 59, 59, 51, 49, 44, 61\}$$

$$\text{liga} \quad \{47, 54, 41, 46, 30, 48, 47, 48, 55, 43, 55, 41, 43, 53, 52, 47, 50, 53\}$$

Fußballeuropameisterschaft 2024: Wer wird Europameister der Herren?

An der Europameisterschaft im Juni und Juli in Deutschland nehmen in der Endrunde 24 Mannschaften in 6 Vorrundengruppen teil.

Die jeweils zwei Gruppenbesten und vier besten Gruppendritten ziehen ins Achtelfinale ein.

Es folgen die Viertelfinals, die Halbfinals und das Finale.

Es gibt also insgesamt 51 Spiele. (Es gibt im Gegensatz zur WM kein Spiel um Platz 3.)

Die Frage nach dem Gewinner ist sicherlich kaum zu beantworten, aber man kann sich dieser Frage auf mehrere Arten nähern:

(Hinweis: In der Datei „fussballem2024.tns“ liegen zu den nächsten Fragen vorbereitete Daten vor, man kann aber auch eigene verwenden.)

Aufgabe 1

Wie schauen Wettanbieter auf den zukünftigen Sieger?

Im Folgenden ist ein Stand der Quoten vom 17.5.2024 dargestellt:

(Eine Quote von 4 bedeutet, dass man für einen Einsatz von 1 € vier Euro bekäme, wenn die getippte Mannschaft Europameister wird.

Europameister Wettquoten: Wer gewinnt die EURO 2024?

	bet365 + Wettbonus zum Anbieter	Interwetten + 100€ Bonus zum Anbieter	bwin + 110€ Bonus zum Anbieter
England	4.00	4.50	4.00
Frankreich	5.00	4.75	4.50
Deutschland	6.50	6.50	6.00
Spanien	9.00	8.50	9.00
Portugal	9.00	8.50	10.0
Italien	15.0	16.0	17.0
Belgien	17.0	16.0	17.0
Niederlande	17.0	18.0	17.0

Dänemark	41.0	40.0	34.0
Kroatien	41.0	40.0	34.0
Türkei	51.0	50.0	51.0
Schweiz	67.0	75.0	51.0
Serbien	81.0	60.0	51.0
Österreich	81.0	80.0	51.0
Ungarn	81.0	90.0	81.0
Schottland	101	90.0	101
Ukraine	101	100	101

Tschechien	151	150	101
Polen	151	150	101
Rumänien	201	200	151
Slowenien	251	300	201
Albanien	501	500	301
Slowakei	501	500	301
Georgien	501	500	501

Quoten Stand vom 17.5.2024, 9:10 Uhr. Angaben ohne Gewähr. 18+ | AGB beachten.

Welche Gewinnwahrscheinlichkeit könnte z. B. bet365 für Deutschland zu Grunde gelegt haben? Diskutiere das verwendete Modell.

Hinweis: Die Quote ergibt sich nach der Formel $quote = \frac{100}{\text{Gewinnwahrscheinlichkeit}} * k$. Der Faktor $k < 1$ ist notwendig, damit der Gewinnanbieter Gewinn macht.

Aufgabe 2

Man kann auch den Marktwert aller Mannschaften oder den Platz in der FIFA-Rangliste zur Beantwortung der Frage nach dem Gewinner heranziehen.

Nutzen Sie die beigefügte Datei „fussballem24.tns“, um Fragen zu beantworten wie:

- Wie gut korrelieren die 3 gegebenen Modelle miteinander?
- Welchem Modell würden Sie Vorrang geben?

Lösung zu 1

Aus den gegebenen Werten ergibt sich etwa ein Faktor k von ca. 0,844. Dies hieße, dass Deutschland eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ca. 13 % hätte.

	A land	B we.C fifar...	D be. E rezi	F gewinnp	G	
=			=1/bet365	=100/bet365		
1	England	14...	1795	4	1/4	21.098
2	Frankrei...	12...	1841	5	1/5	16.878
3	Portugal	10...	1748	9	1/9	9.3768
4	Spanien	906	1728	9	1/9	9.3768
5	Italien	757	1725	15	1/15	5.6261
6	Deutsch...	672	1644	6.5	0.15385	12.983
7	Niederla...	610	1742	17	1/17	4.9642

$$F \text{ gewinnp} = \frac{100}{\text{bet365}} \cdot \frac{1}{\text{sum}(\text{rezi})}$$

Lösungen zu 2 sind individuell.

Aufgabe 3**Wer wird Europameister?¹**

Vereinfacht wird nun angenommen: Eine Mannschaft, die Europameister werden will, muss in der Vorrunde mindestens zwei Spiele gewinnen. Unentschieden wird in diesem einfachen Modell nicht berücksichtigt.

- Leiten Sie eine Formel her, mit der nach den gegebenen Einschränkungen die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn der Europameisterschaft berechnet werden kann.
- Wir nehmen an, dass für alle Mannschaften die Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Spiel 0,5 beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann eine bestimmte Mannschaft Europameister?
- Deutschland habe eine durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,75. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland Europameister wird? Wie könnte man auf die Gewinnwahrscheinlichkeit von 75 % gekommen sein?
- Wenn man die von bet365 genutzte Gewinnwahrscheinlichkeit von 13 % nutzt, wie groß müsste dann die durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit für Deutschland pro Spiel sein?
- Welche Chance hätte Georgien (geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit 20 %) in das Endspiel zu kommen bzw. Europameister zu werden?
- Führen Sie am Beispiel Deutschlands eine Simulation durch.

¹ Einige der Aufgaben entstammen einer Veranstaltung von R. Huste und U. Dreikorn zur T³-Regionaltagung in Jena 2016.

Lösungen

a) Wenn eine Mannschaft in der Vorrunde mindestens zwei Spiele gewinnen muss, bedeutet dies, entweder alle drei Spiele mit der Wahrscheinlichkeit p zu gewinnen (p^3) oder zwei Spiele zu gewinnen und das dritte Spiel zu verlieren, was genau dreimal passieren kann, daher gilt für diesen Fall $3 \cdot p \cdot (1 - p)$. Um nach überstandener Vorrunde bis in das Finale zu kommen und dort zu gewinnen, muss man vier Spiele gewinnen, also gilt hierfür p^4 . Dies ergibt dann nach der Pfadadditions- bzw. Pfadmultiplikationsregel die Formel für $gw(p) = (p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)) \cdot p^4$.

b) Für $p = 0,5$ ergibt sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ca. 3,1 %.

$$gw(p) := (p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)) \cdot p^4 \quad \text{Fertig}$$

$$gw(0.5) \rightarrow 0.03125$$

$$gw(0.75) \rightarrow 0.26697$$

$$\text{solve}(gw(p)=0.13,p) \rightarrow p=0.56204 \text{ or } p=0.65172 \text{ or } p=1.4942$$

Beispiel Georgien:

durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit vielleicht 20%

$$gw(0.2) \rightarrow 0.00017$$

Endspiel

$$(p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)) \cdot p^3 \quad p=0.2 \rightarrow 0.00083$$

$$\text{randBin}(1, gw(0.75), 10) \rightarrow \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0\}$$

$$\text{countIf}(\text{randBin}(1, gw(0.75), 1000), ?=1) \rightarrow 249$$

c) Deutschland hätte eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ca. 26,7 %. Die „geschätzte“ Gewinnwahrscheinlichkeit für Deutschland von 75 % könnte man z. B. aus den gegebenen Daten ableiten (FIFA: 9. Platz von 24, Marktwert 6. Platz von 24 und Buchmacherliste 3. Platz von 24).

Andere Erklärungen sind auch denkbar.

d) ca. 65,2 %

e) Georgien hätte eine Chance von ca. 0,08 % in das Endspiel zu bekommen und eine Chance von ca. 0,017 % Europameister zu werden.

f) Mit dem *randbin*-Befehl lässt sich eine Simulation relativ einfach durchführen. Bei 10 Simulationen würde hier Deutschland viermal gewinnen und bei 1000 Simulationen 249-mal. Dies passt gut zu der vorher berechneten Gewinnwahrscheinlichkeit von ca. 26,7 %. Allerdings kann man wohl eher nicht davon ausgehen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit in der Vorrunde genauso hoch ist, wie ab dem Achtelfinale. Dies könnte man lösen, indem man für die Vorrunde einen Wert annimmt und einen anderen für die folgenden Spiele.

$$\text{achtfin}(p) := \text{randBin}(1, p, 10) \cdot \text{randBin}(1, p, 10) \cdot \text{randBin}(1, p, \text{Fertig} 10) \cdot \text{randBin}(1, p, 10)$$

$$\text{randBin}(1, 0.9, 10) \cdot \text{achtfin}(0.55) \rightarrow \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

Vorrunde Gewinnchance 90 % dann geringer, hier z.B. 55%

Quellenverzeichnis

- 1) Wesson, John: Fußball-Wissenschaft mit Kick, S. 118 ff, Spektrum Akd. Verlag, München 2010

Autor:

Dr. Hubert Langlotz