Ich stelle hier Lösungsvarianten für die Aufgabe "Analysis 1 (CAS) grundlegendes Niveau 2 e" vor. Die Aufgabe findet man hier:

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/

Oft stellt sich die Frage, was ein Prüfling bei der Lösung einer Aufgabe mindestens zu Papier bringen muss, damit er für seine Lösung volle BE erhält. Die unkommentierte Lösung muss eine Person, die mit der Aufgabe vertraut ist, verstehen können. Allerdings hilft diese Darstellung oft anderen Lernern nicht weiter, weil die Zusammenhänge zu wenig erklärt werden. Ein gutes Beispiel dafür ist die im Erwartungshorizont angegebene Lösung. Kommentiert man die Lösung im laufenden Text, dann sind Lösung und zusätzlicher Kommentar oft nicht mehr unterscheidbar. Deshalb habe ich eine Darstellung gewählt, die die Schritte „Erklärung der Lösungsidee“, „Darstellung der Lösung“ und „Ermittlung der Ergebnisse mit dem modularen Mathematiksystem (MMS)“ klar trennt.

<table>
<tr><td colspan="2">Erklärung der Lösungsstrategie bzw. der Lösungsidee allgemein</td></tr>
<tr><td>Darstellung der Lösung der konkreten Aufgabe, wie sie (minimal) in der Niederschrift zur Leistungserhebung erfolgen muss</td><td>Darstellung eines Weges zur Ermittlung der Ergebnisse der konkreten Aufgabe mit dem MMS (hier TI Nspire CX CAS)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kommentar</td></tr>
</table>

Falls Sie Fragen oder Anregungen haben, dann wenden Sie sich gern per E-Mail an mich christian@diemoellis.de.

Inhaltsverzeichnis

Lösungsvariante 1 – Differenzenquotient = Differentialquotient Standard-Lösung für Tangente an f durch externen Punkt 2
Lösungsvariante 2 – Gerade durch externen Punkt berührt den Graphen von f 3
Lösungsvariante 3 – Tangente am Graphen von f verläuft durch den externen Punkt........ 4
Lösungsvariante 4 – lokale Extremstelle des Sekantenanstieges = Tangentenanstieg 5
Lösungsvariante 5 – Differenzvektor senkrecht zum Normalenvektor........ 6

Lösungsvariante 1 – Differenzenquotient = Differentialquotient
Standard-Lösung für Tangente an f durch externen Punkt

Ermittelt werden die Berührungsstellen x_b von Tangenten t_{f,x_b} am Graphen von f, die durch den Punkt $P(x_p \mid y_p)$ verlaufen.

Allgemeiner Ansatz: $f'(x_b)=\dfrac{f(x_b)-y_p}{x_b-x_p}$ "Differenzenquotient = Differentialquotient"

Anwendung der Lösungsvariante auf die Beispielaufgabe

Notwendige Darstellung in der Prüfungsniederschrift

Ermittlung der Berührungsstelle x_b ($-5<x_b<4$, x_b kleinstmöglich) derjenigen Tangente t_{h,x_b} an h, die den Punkt $T\left(-5 \mid h(-5)+\dfrac{25}{100}\right)$ enthält.

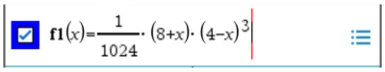
Bedingung: $h'(x_b)=\dfrac{h(x_b)-\left(h(-5)+\dfrac{25}{100}\right)}{x_b-(-5)}$

Berechnung mit MMS: $x_b \approx -3{,}31$

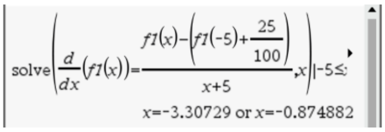
Gesuchter Bereich: $-5 \le x \le -3{,}31$

Bemerkungen

Ablage der Funktion im fn-Speicher Graph-Modul



Berechnung der Ergebnisse im Calculator-Modul



In dieser Lösungsvariante ist die Herkunft des Ansatzes nicht motiviert. Für Leistungserhebungen ist sie gut geeignet, weil sie als Standardlösung mit geringem Eingabeaufwand im MMS schnell zum gewünschten Ergebnis führt.

Die nachfolgenden Varianten 2 – 5 zeigen 4 verschiedene Wege zum allgemeinen Ansatz. Sie sind nicht alle in gleichem Maße für die Leistungserhebung geeignet, können aber im Unterricht zur Herleitung des allgemeinen Zusammenhangs "Differenzenquotient = Differentialquotient" genutzt werden. Aus ihnen können Einsichten in interessante Zusammenhänge gewonnen werden.

Lösungsvariante 2 – Gerade durch externen Punkt berührt den Graphen von f

Ausgangspunkt ist die Menge aller linearen Funktionen g_m, deren Graph einen speziellen Punkt $P(x_p \mid y_p)$ enthält. Es werden diejenigen g_m ermittelt, die den Graphen von f an einem Punkt $B(x_b \mid f(x_b))$ berühren.

Eine Simulation der Lösungsstrategie für die Aufgabenstellung finden Sie hier:
https://www.desmos.com/calculator/nnjabjcfmo
Aktivieren Sie „Sekante". Durch Verschiebung des Punktes S findet man die Lösung.

Lösungsschritte:

1. allgemeine Gleichung einer Geraden durch einen Punkt $P(x_p \mid y_p)$ mit der Punkt-Richtungs-Form:
   $y - y_p = m \cdot (x - x_p) \Leftrightarrow g_m(x) = y = m \cdot (x - x_p) + y_p$
2. g_m berührt den Graphen von f im Punkt $B(x_b \mid f(x_b))$ ergibt die Bedingungen:
   (1) $g_m(x_b) = f(x_b)$
   (2) $g_m'(x_b) = f'(x_b) = m$

Diese 3 Beziehungen können mit dem MMS ausgewertet werden.

Herleitung des allgemeinen Ansatzes

Die Verwendung der Bedingungen (1) und (2) in der allgemeinen Geradengleichung ergibt den allgemeinen Ansatz für die Berührungsstelle:

$$f(x_b) - y_p = f'(x_b) \cdot (x_b - x_p) \Leftrightarrow m = f'(x_b) = \frac{f(x_b) - y_p}{x_b - x_p}$$ "Differenzenquotient = Differentialquotient"

Anwendung der Lösungsvariante auf die Beispielaufgabe

Notwendige Darstellung in der Prüfungsniederschrift

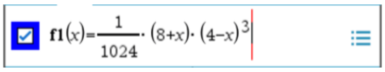
Gesucht ist die Berührungsstelle x_b ($-5 < x_b < 4$, x_b kleinstmöglich) einer Geraden g am Graphen von h mit den Eigenschaften:

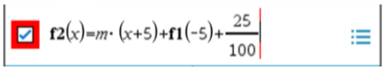
1. $T\left(-5 \mid h(-5) + \frac{25}{100}\right)$ liegt auf g $\Leftrightarrow g(-5) = h(-5) + \frac{25}{100}$
   Gleichung von g in Punkt-Richtungs-Form
   $y - \left(h(-5) + \frac{25}{100}\right) = m \cdot (x - (-5))$
   $\Leftrightarrow g(x) = m \cdot (x + 5) + \left(h(-5) + \frac{25}{100}\right)$
2. g berührt h in $B(x_b \mid h(x_b))$
   (2) $B \in g : g(x_b) = h(x_b)$
   (3) „berührt": $g'(x_b) = h'(x_b)$

Berechnung mit MMS: $x_b \approx -3{,}31$

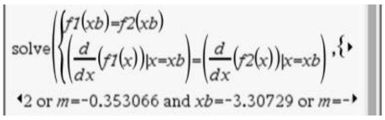
Gesuchter Bereich: $-5 \le x \le -3{,}31$

Bemerkungen





Hinweis: Wenn Sie beim Abspeichern den Schieberegler für den Parameter m erstellen lassen, dann wird die Variable m belegt und muss für die Berechnung mit dem Befehl delvar gelöscht werden.



Bei dieser Aufgabe ist die Berechnung von m nicht erforderlich. Die Angabe im Ergebnis erschwert das Auffinden der richtigen Lösung.

Diese Variante wurde vom IQB in der Musterlösung und von Herrn Langlotz verwendet.

Lösungsvariante 3 – Tangente am Graphen von f verläuft durch den externen Punkt

Ausgangspunkt ist die Menge aller Tangenten t_{f,x_b} am Graphen einer Funktion f. Es werden diejenigen x_b ermittelt, für die die Tangenten t_{f,x_b} durch den Punkt $P(x_p\,|\,y_p)$ verlaufen.

Eine Simulation der Lösungsstrategie für die Aufgabenstellung finden Sie hier:
https://www.desmos.com/calculator/nnjabjcfmo
Aktivieren Sie „Tangente“. Durch Verschiebung des Punktes B findet man die Lösung.

Lösungsschritte:

1. allgemeine Gleichung einer Tangente am Graphen von f im Punkt $B(x_b\,|\,f(x_b))$ mit der Punkt-Richtungs-Form:
   $y-f(x_b)=f'(x_b)\cdot(x-x_b)\Leftrightarrow t_{f,x_b}(x)=y=f'(x_b)\cdot(x-x_b)+f(x_b)$
2. t_{f,x_b} verläuft durch den Punkt $P(x_p\,|\,y_p)$: $t_{f,x_b}(x_p)=y_p$

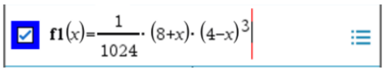
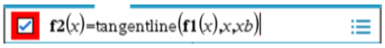
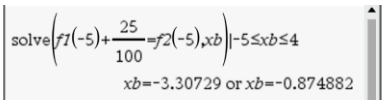
Diese Beziehungen können mit dem MMS ausgewertet werden.

Herleitung des allgemeinen Ansatzes

Das Einsetzen der Koordinaten des Punktes P in die allgemeine Tangentengleichung ergibt den allgemeinen Ansatz für die Berührungsstelle:

$y_p-f(x_b)=f'(x_b)\cdot(x_p-x_b)\Leftrightarrow f'(x_b)=\dfrac{f(x_b)-y_p}{x_b-x_p}$ "Differenzenquotient = Differentialquotient"

Anwendung der Lösungsvariante auf die Beispielaufgabe

Notwendige Darstellung in der Prüfungsniederschrift	**Bemerkungen**
Ermittlung der Berührungsstelle x_b ($-5<x_b<4$, x_b kleinstmöglich) derjenigen Tangente t_{h,x_b} an h, die den Punkt $T\left(-5\,\middle|\,h(-5)+\dfrac{25}{100}\right)$ enthält. Bedingung: $T\in t_{h,xb}: t_{h,xb}(-5)=h(-5)+\dfrac{25}{100}$ Berechnung mit MMS: $x_b\approx-3{,}31$ Gesuchter Bereich: $-5\le x\le-3{,}31$	 Da das MMS eine Möglichkeit zur Berechnung des Tangententerms mit dem Befehl tangentline bietet, braucht keine Gleichung der Tangente angegeben zu werden.  Hinweis: Wenn Sie beim Abspeichern den Schieberegler für den Parameter x_b erstellen lassen, dann wird die Variable x_b belegt und muss für die Berechnung mit dem Befehl delvar gelöscht werden. 

Das ist die intuitivste und mit dem MMS am einfachsten zu bearbeitende Variante.

Lösungsvariante 4 – lokale Extremstelle des Sekantenanstieges = Tangentenanstieg

Ausgangspunkt ist die Menge aller Anstiege von Geraden $g_{S,P}$ durch einen festen Punkt $P(x_p \mid y_p)$ und einen beliebigen Punkt des Graphen der Funktion f $S(x \mid f(x))$.

Eine Simulation der Lösungsstrategie für die Aufgabenstellung finden Sie hier:
https://www.desmos.com/calculator/nnjabjcfmo
Aktivieren Sie „Sekante“ und „Anstieg der Sekante“. Bei Verschiebung des Punktes S ist zu erkennen, dass der Sekantenanstieg lokale Extrema besitzt, wenn die Gerade die Funktion berührt.

Ist $x = x_b$ eine Berührungsstelle einer solchen Geraden $g_{S,P}$ an f, dann hat die Funktion der Anstiege der Geraden $m_{f,x_p,y_p}(x)$ bei x_b ein lokales Extremum und es gilt:

Ansatz: $m'_{f,x_p,y_p}(x_b) = 0$ wobei $m_{f,x_p,y_p}(x) = \dfrac{f(x) - y_p}{x - x_p}$

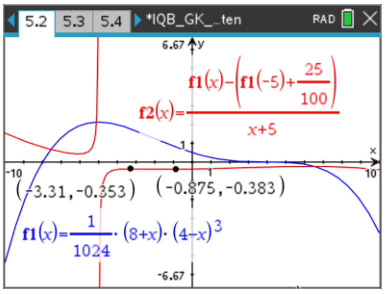
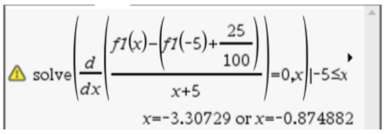
Herleitung des allgemeinen Ansatzes

$$\Leftrightarrow m'_{f,x_p,y_p}(x_b) = \frac{f'(x_b)\cdot(x_b - x_p) - (f(x_b) - y_p)\cdot 1}{(x_b - x_p)^2} = 0$$

$$\overset{x_p \neq x_b}{\Leftrightarrow} f'(x_b)\cdot(x_b - x_p) - (f(x_b) - y_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_b) = \frac{f(x_b) - y_p}{x_b - x_p} \quad \text{"Differenzenquotient = Differentialquotient"}$$

Anwendung der Lösungsvariante auf die Beispielaufgabe

Notwendige Darstellung in der Prüfungsniederschrift	Bemerkungen
Ermittlung der Berührungsstelle x_b ($-5 < x_b < 4$, x_b kleinstmöglich) der Tangente t_{h,x_b} = Extremstelle des Sekantenanstiegs durch die Punkte $T\left(-5 \mid h(-5) + \frac{25}{100}\right)$ und $B(x_b \mid h(x_b))$ Ansatz: $m'(x_b) = 0$ wobei $m(x_b) = \dfrac{h(x_b) - \left(h(-5) + \frac{25}{100}\right)}{x_b - (-5)}$ Berechnung mit MMS: $x_b \approx -3{,}31$ Gesuchter Bereich: $-5 \le x \le -3{,}31$	 Diese Lösung kann man komplett im Graph ermitteln und der Anstieg fällt gleich mit ab. 

Die Tangentenaufgabe als Extremwertproblem.

Lösungsvariante 5 – Differenzvektor senkrecht zum Normalenvektor

Unter diesem Link finden Sie eine Darstellung mit Geogebra https://www.geogebra.org/classic/suvnzcbt

Definition der Vektoren:

Ortsvektor eines Punktes $P(x_p \mid y_p)$: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$

Ortsvektor eines Punktes $B(x_b \mid f(x_b))$ auf dem Graphen einer Funktion f: $\overrightarrow{OB}(x_b) = \begin{pmatrix} x_b \\ f(x_b) \end{pmatrix}$

Vektor zwischen den Punkten P und B: $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} x_b - x_p \\ f(x_b) - y_p \end{pmatrix}$

ein Tangentialvektor am Graphen von f an der Stelle x_b: $\vec{t}(x_b) = \begin{pmatrix} x_b \\ f(x_b) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_b) \end{pmatrix}$

ein Normalenvektor am Graphen von f an der Stelle x_b: $\vec{n}(x_b) = \begin{pmatrix} f'(x_b) \\ -1 \end{pmatrix}$

An der Berührungsstelle müssen die beiden Vektoren $\overrightarrow{PB}$ und $\vec{t}$ parallel liegen, also $\overrightarrow{PB}$ und $\vec{n}$ senkrecht zueinander stehen.

Ansatz: $\overrightarrow{PB} \cdot \vec{n} = 0$

Herleitung des allgemeinen Ansatzes

$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{PB} \cdot \vec{n} = f'(x_b) \cdot (x_b - x_p) + (f(x_b) - y_p) \cdot (-1) = 0$

$\Leftrightarrow \ f'(x_b) = \dfrac{f(x_b) - y_p}{x_b - x_p}$ "Differenzenquotient = Differentialquotient"

Anwendung der Lösungsvariante auf die Beispielaufgabe

<table>
<tr><th>Notwendige Darstellung in der Prüfungsniederschrift</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td>

Ermittlung derjenigen Stelle x_b ($-5 < x_b < 4$, x_b kleinstmöglich) für die der Differenzvektor $\overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} x_b - (-5) \\ h(x_b) - \left(h(-5) + \frac{25}{100}\right) \end{pmatrix}$ und der Normalenvektor am Graphen von h im Punkt $B(x_b \mid h(x_b))$ $\vec{n}(x_b) = \begin{pmatrix} f'(x_b) \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

Ansatz: $\overrightarrow{TB} \cdot \vec{n} = 0$

Berechnung mit MMS: $x_b \approx -3{,}31$

Gesuchter Bereich: $-5 \le x \le -3{,}31$

</td><td>

$f1(x) := \frac{1}{1024} \cdot (8+x) \cdot (4-x)^3$

$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\frac{d}{dx}\left(\begin{bmatrix} f1(x) \\ -x \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} x+5 \\ f1(x) - \left(f1(-5) + \frac{25}{100}\right) \end{bmatrix}\right)\right.$

$x = -3.30729$ or $x = -0.874882$

</td></tr>
</table>

Dies Variante wird man in der Schule selten finden, da Vektoren an Funktionen nicht besprochen werden. Mir gefällt diese Variante besonders, weil sie einen Zusammenhang zwischen den Werkzeugen der Vektorrechnung und der Analysis herstellt. Mit dem CAS lassen sich solche Ansätze gut bearbeiten, weil der Rechenaufwand eine untergeordnete Rolle spielt. Die Eingabe des CAS-Befehls setzt einige Erfahrung im Umgang mit dem MMS voraus.