MMS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder (Jhg. 2023)

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Autoren:
Hubert Langlotz, Wilfried Zappe

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: **www.t3deutschland.de** sowie unter **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

MMS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben. Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für deren Bearbeitung u. a. als digitales Hilfsmittel ein modulares Mathematiksystem MMS[1] vorgesehen ist.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	25	35
Stochastik		20
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		20

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 60 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 165 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	30	40
Stochastik		25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		25

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 70 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 200 Minuten vorgesehen.

[1]MMS bestehen aus Modulen wie einem Computeralgebramodul, einem Modul zum Darstellen von Funktionsgraphen, einem dynamischen Geometriemodul, einem Modul zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einem Tabellenkalkulationsmodul, die in geeigneter Weise korrespondieren.

Für jedes Prüfungsjahr stellt das IQB den Ländern in Abituraufgabenpools für die Fächer Deutsch, Englisch, Französisch und Mathematik Aufgaben für den Einsatz in der Abiturprüfung zur Verfügung. Veröffentlicht werden nur diejenigen Aufgaben der Pools, die von den Ländern entnommen wurden. Die Veröffentlichung der Aufgaben erfolgt ausschließlich online. Die Aufgaben können hier aus urheberrechtlichen Gründen nicht abgedruckt werden.

Die Aufgaben für die Jahre 2017 - 2023 finden Sie auf den Seiten des IQB bzw. für das Jahr 2023 direkt über den Link in der entsprechenden Fußnote der Lösungen in diesem Heft.
In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität des zugelassenen CAS beschrieben:

Es wird vorausgesetzt, dass das CAS über Funktionen u. a. verfügt, eigens zum

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von einzelnen und kumulierten Werten der Binomialverteilung sowie von Werten der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Dateien und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder zu einem Systemupdate gehören, unterbunden ist.

Hier bietet sich z. B. bei der Nutzung von Handhelds der Press-To-Test-Modus an[2], für die iPad-Version und auch für die Schülersoftware für Windows gibt es einen entsprechenden Prüfungsmodus[3].

Erwähnenswert ist außerdem, dass in Zukunft statt des Begriffs CAS der Begriff MMS genutzt werden soll.

Diese Regelungen gelten bis zum **Abiturjahrgang 2029**.

Ab dem **Abiturjahrgang 2030** gelten neue Regelungen.[4]

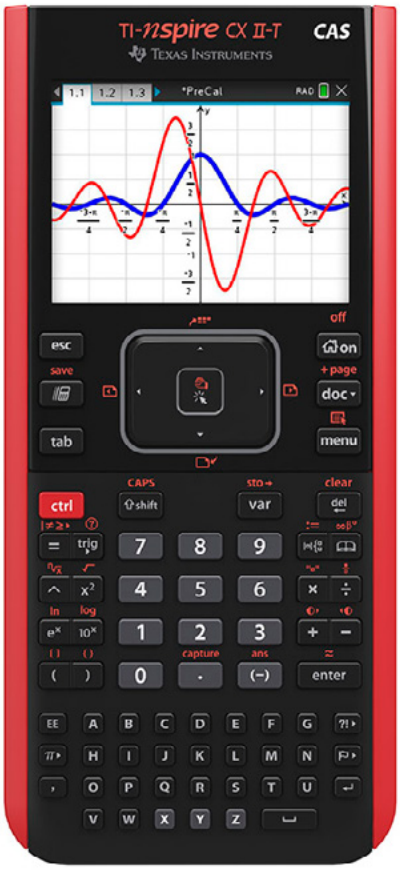
[2] https://www.youtube.com/watch?v=PYm5jDoDE8Y
[3] https://education.ti.com/de/resources/pruefungen
[4] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Hinweise_zur_V.pdf

Der CAS-Taschenrechner

TI-Nspire™ CX II-T CAS

erfüllt alle diese Bedingungen.

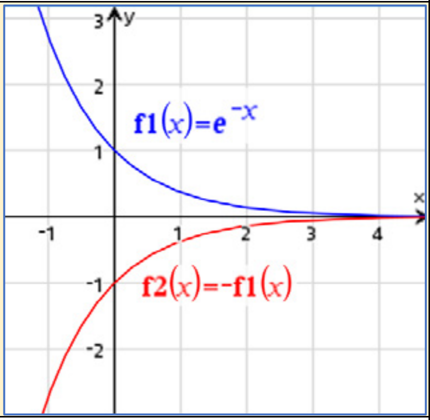
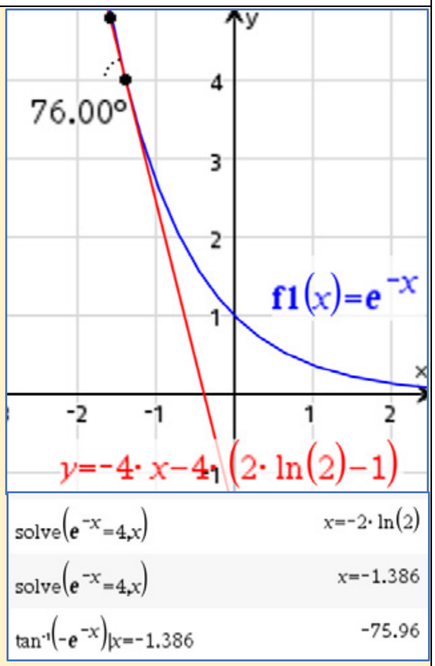
Dies gilt auch für die zugehörige Software und die TI-Nspire™ CAS App für iPad.



In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des TI-Nspire CX II-T genutzt werden können.

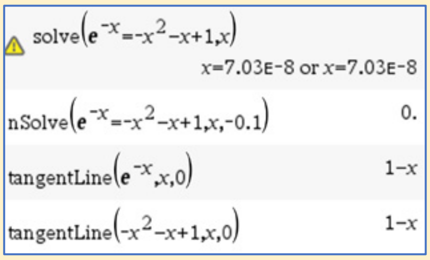
Analysis - Grundlegendes Anforderungsniveau

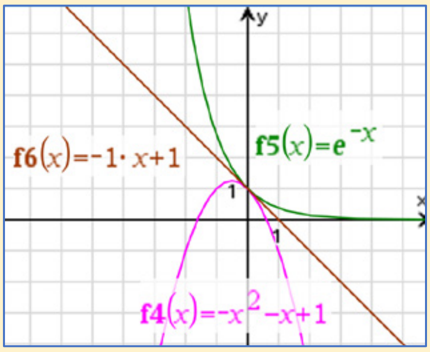
Analysis 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[5]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Der Graph der Funktion $q'(x) = -q(x)$ geht aus dem Graphen der Funktion $q(x)$ durch Spiegelung an der x–Achse hervor. Die Wertemenge von q' umfasst den Bereich der negativen reellen Zahlen, also $-\infty < q'(x) < 0$. Die Graphen der Funktionen lassen sich rasch mit dem MMS zeichnen. 
b (3 BE)	
Lösung	Der Winkel zwischen dem Graphen von $q(x)$ und der Geraden y = 4 entspricht dem Winkel, den die Tangente an den Graphen von $q(x)$ im Schnittpunkt beider Graphen mit der Geraden y = 4 bildet. Der Tangens dieses Winkels entspricht dem Wert der 1. Ableitung von $q(x)$ an der Schnittstelle. Die Schnittstelle beider Graphen ist $x = -2 \cdot \ln(2) \approx -1{,}386$. Der Arkustangens von $q'(-2 \cdot \ln(2) = -e^{-(-1{,}386)}$ führt auf einen Winkel von ca. -76°. Der Schnittwinkel ist etwa 76° groß. Hinweis: Mit der grafischen Darstellung lässt sich das rechnerische Ergebnis kontrollieren. 

[5] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_20.pdf

<table>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Schon aus der grafischen Darstellung lässt sich P(0|1) als gemeinsamer Punkt vermuten. Das lässt sich rechnerisch leicht nachweisen: Für x = 0 gilt $q(0) = e^{-0} = 1$ und $p(0) = -0^2 - 0 + 1 = 1$. Also ist der gemeinsame Punkt P beider Graphen der Punkt P(0|1).
Mit $q'(x) = -q(x)$ folgt $q'(0) = -e^{-0} = -1$. Der Anstieg der Tangente an den Graphen von $q(x)$ ist m = –1. Da es um die Tangente im Punkt P(0|1) geht, ist der y-Durchgang der Tangente bei n = 1. Die Tangente an den Graphen von $q(x)$ hat die Gleichung $y = -x + 1$.
Mit $p'(x) = -2x - 1$ folgt $p'(0) = -2 \cdot 0 - 1 = -1$. Der Anstieg der Tangente an den Graphen von $p(x)$ ist m = –1. Da es um die Tangente im Punkt P(0|1) geht, ist der y-Durchgang der Tangente bei n = 1. Die Tangente an den Graphen von $p(x)$ hat ebenfalls die Gleichung
$y = -x + 1$.

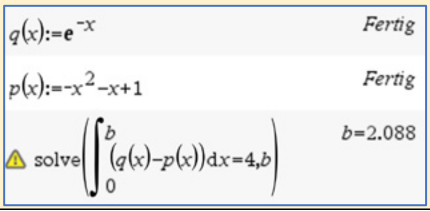
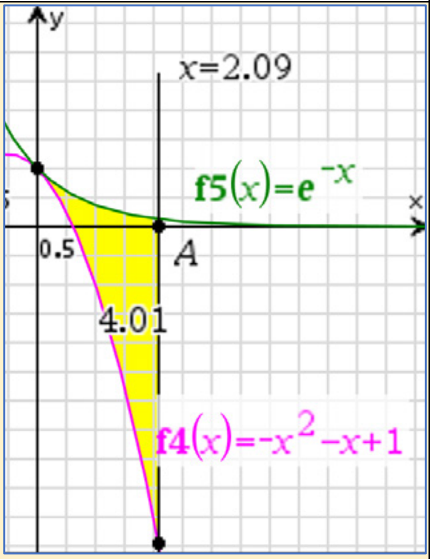
Alternativer Lösungsweg:


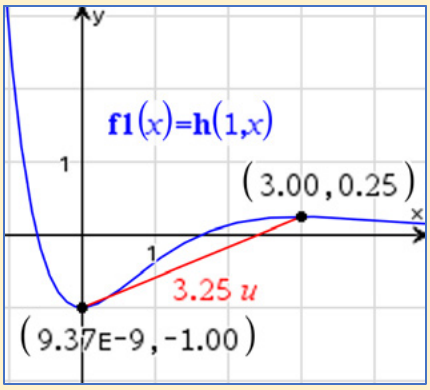


Das Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen führt nur auf einen Näherungswert für die Schnittstelle, liefert aber einen guten Hinweis auf die Schnittstelle x = 0. Bei Verwendung von *nsolve* lässt sich bei geschickter Wahl des Startwertes auch die Lösung x = 0 finden.

Die beiden Tangentengleichungen können auch mit der Option [*tangentline*] ermittelt werden.

Eine grafische Darstellung unterstützt den Lösungsprozess.
</td></tr>
</table>

d (3 BE)	
Lösung	Die Gleichung $\int_0^b (q(x) - p(x))\,dx = 4$ gibt an, dass der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen beider Funktionen und der Geraden x = b die Größe 4 FE hat. Die Größe von b ist zu bestimmen. Das kann auf grafischem Weg geschehen und führt auf $b \approx 2{,}1$. Die Größe von b kann auch rechnerisch durch das Lösen der obigen Gleichung bestimmt werden:  

2	
a (4 BE)	
Lösung	Die Koordinaten der Extrempunkte von $h_1(x) = (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}$ können mithilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen berechnet werden. $h(a,x):=(x^2-x-a)\cdot e^{-x}$ Fertig $\frac{d}{dx}(h(1,x))$ $(3\cdot x-x^2)\cdot e^{-x}$ $\text{solve}((3\cdot x-x^2)\cdot e^{-x}=0,x)$ $x=0$ or $x=3$ $\frac{d^2}{dx^2}(h(1,x))$ $(x^2-5\cdot x+3)\cdot e^{-x}$ $(x^2-5\cdot x+3)\cdot e^{-x}\mid x=0$ 3 $(x^2-5\cdot x+3)\cdot e^{-x}\mid x=3$ $-3\cdot e^{-3}$ $h(1,0)$ -1 $h(1,3)$ $5\cdot e^{-3}$ Der Tiefpunkt hat die Koordinaten$T(0 \mid -1)$. Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H(3 \mid 5 \cdot e^{-3})$. Der Abstand zwischen den x-Werten von T und H ist $\Delta x = 3$. Der Abstand zwischen den y-Werten von T und H ist $\Delta y = 1 + 5 \cdot e^{-3}$. Der Abstand zwischen T und H ergibt sich dann mit dem Satz des Pythagoras: $\lvert\overline{TH}\rvert = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{3^2 + (1 + 5 \cdot e^{-3})^2} \approx 3{,}25$ Die grafische Bestimmung des Abstandes kann der Selbstkontrolle dienen. $\sqrt{3^2+(1+5\cdot e^{-3})^2}$ $\sqrt{5\cdot(2\cdot e^6+2\cdot e^3+5)}\cdot e^{-3}$ $\sqrt{3^2+(1+5\cdot e^{-3})^2}$ 3.25 

b
(5 BE)

Lösung

Die x-Koordinaten der Extrempunkte von $h_a(x) = (x^2 - x - a) \cdot e^{-x}$ können mithilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen berechnet werden.

$$\frac{d}{dx}(h(a,x)) \quad (-x^2+3\cdot x+a-1)\cdot e^{-x}$$
$$a1h(a,x):=(-x^2+3\cdot x+a-1)\cdot e^{-x} \quad \textit{Fertig}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(h(a,x)) \quad (x^2-5\cdot x-a+4)\cdot e^{-x}$$
$$a2h(a,x):=(x^2-5\cdot x-a+4)\cdot e^{-x} \quad \textit{Fertig}$$

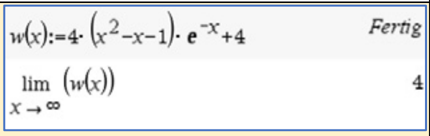
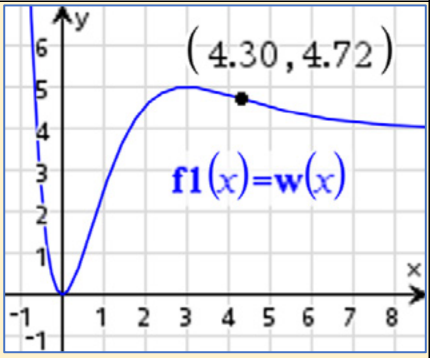
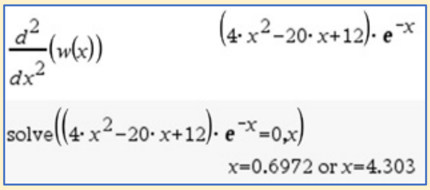
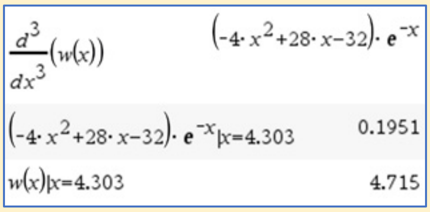
$$\text{solve}(a1h(a,x)=0,x) \quad x=\frac{\sqrt{4\cdot a+5}+3}{2} \text{ or } x=\frac{-(\sqrt{4\cdot a+5}-3)}{2}$$
$$a2h(a,x)|x=\frac{\sqrt{4\cdot a+5}+3}{2} \quad -\sqrt{4\cdot a+5}\cdot e^{\frac{-\sqrt{4\cdot a+5}}{2}-\frac{3}{2}}$$

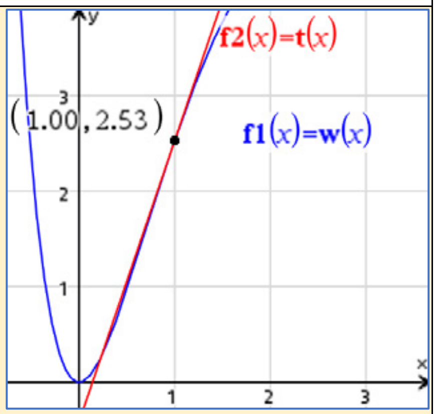
$$a2h(a,x)|x=\frac{-(\sqrt{4\cdot a+5}-3)}{2} \quad \sqrt{4\cdot a+5}\cdot e^{\frac{\sqrt{4\cdot a+5}}{2}-\frac{3}{2}}$$

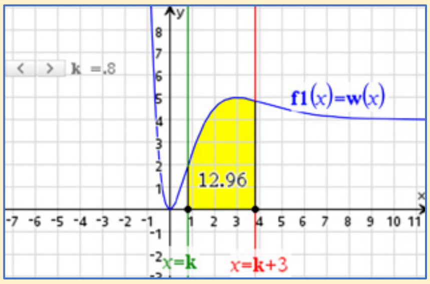
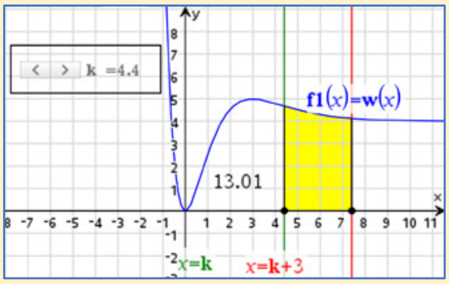
Aus den Nullstellen der 1. Ableitung von h(a, x) ergeben sich die beiden x-Koordinaten der Extrempunkte:
$x_{e1} = \frac{\sqrt{4a+5}+3}{2}$ und $x_{e2} = \frac{-\sqrt{4a+5}+3}{2}$.
Die Wurzeln sind nur für $a \geq -\frac{5}{4}$ definiert, für $a = -\frac{5}{4}$ fallen aber die beiden Extremstellen zusammen, sodass es nur für $a > -\frac{5}{4}$ zwei Extremstellen gibt.
Da die 2. Ableitungen von h(a, x) an diesen Stellen ungleich null sind, ist auch die hinreichende Bedingung für Extremstellen erfüllt.
Da nur die 2. Ableitung an der Stelle $x_{e1} = \frac{\sqrt{4a+5}+3}{2}$ negativ ist, kommen nur dort lokale Maxima vor.

$$x=\frac{\sqrt{4\cdot a+5}+3}{2}|a=\frac{-5}{4} \quad x=\frac{3}{2}$$
$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4\cdot a+5}+3}{2}\right) \quad \infty$$

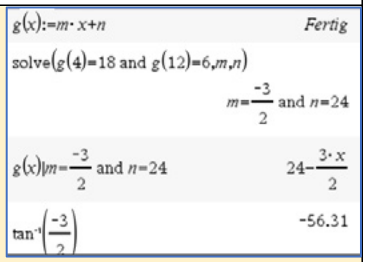
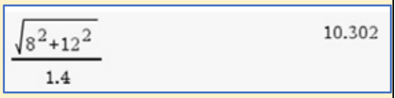
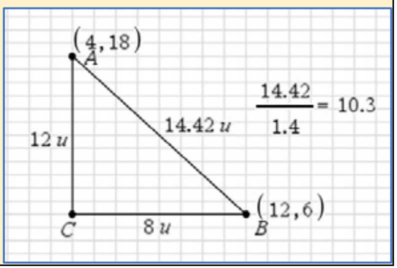
Für $a = -\frac{5}{4}$ ist $x_{e1} = \frac{\sqrt{4a+5}+3}{2} = \frac{3}{2}$ und für größer werdende Werte von a geht x_{e1} gegen unendlich. Da es nur für $a > -\frac{5}{4}$ überhaupt einen lokalen Hochpunkt gibt, ist damit sichergestellt, dass es zu jeder Stelle $x_{e1} > \frac{3}{2}$ einen lokalen Hochpunkt gibt.

3	
a (2 BE)	
Lösung	Der Funktionsterm von w(x) wird auf dem MMS gespeichert, und es wird der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} w(x) = 4$ berechnet.  Bedeutung im Sachzusammenhang: Die momentane Durchflussrate des Wassers nähert sich mit zunehmender Zeit dem Wert $4\ \frac{m^3}{s}$.
b (3 BE)	
Lösung	Der Operator „Bestimmen Sie …“ lässt Ihnen freie Wahl bei der Wahl des Lösungsverfahrens. So können Sie z. B. anhand des Graphen die Koordinaten des Wendepunktes im monoton fallenden Bereich (für $x \geq 0$) näherungsweise bestimmen. Die momentane Durchflussrate nimmt zum Zeitpunkt $t = 4{,}30\ s$ mit $w(4{,}30\ s) = 4{,}72\ \frac{m^3}{s}$ am stärksten ab.  Alternativ kann man die Koordinaten des Wendepunktes auch mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Wendepunkte bestimmen:   Es ergibt sich der Rechts-Links-Wendepunkt W(4,3|4,7) mit der gleichen Interpretation wie oben.

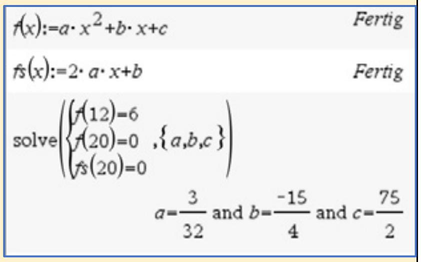
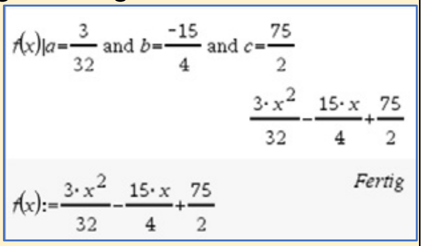
c (3 BE)	
Lösung	Das Flächenstück, das der Graph von w mit der x – Achse und der Geraden mit der Gleichung x = 10 einschließt, hat etwa den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck, das die Gerade mit der Gleichung y = 4 mit der x – Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 0 und x = 10 einschließt. Rechnerisch wird das auch schnell klar, wenn der Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet wird: $\frac{1}{10-0}\cdot\int_0^{10}\left(4\cdot\left(x^2-x-1\right)\cdot e^{-x}+4\right)dx \quad 4.$
d (3)	
Lösung	 Die Differenz $t(x) - w(x)$ gibt den Unterschied zwischen den Funktionswerten der Tangente t und dem Graphen von w an. Die Differenz kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob t oberhalb von w oder unterhalb von w liegt. Sie ist null in den Schnittpunkten von t und w. Mit $\lvert t(x) - w(x)\rvert$ wird auf das Unterscheiden von „t liegt oberhalb von w“ oder „t liegt unterhalb von w“ verzichtet. Es geht nur um die Größe der Abweichung. Mit $\left\lvert\frac{t(x)-w(x)}{w(x)}\right\rvert$ wird beschrieben, wie groß die Anteile dieser Abweichungen im Verhältnis zu w(x) sind. Damit beschreibt die Ungleichung $\left\lvert\frac{t(x)-w(x)}{w(x)}\right\rvert < 0{,}05$ mit $x \in [0{,}7; 1{,}4]$, dass die Tangente die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate in diesem Zeitraum mit einer relativen Abweichung von weniger als 5 % von der durch w(x) gegebenen Entwicklung beschreibt.

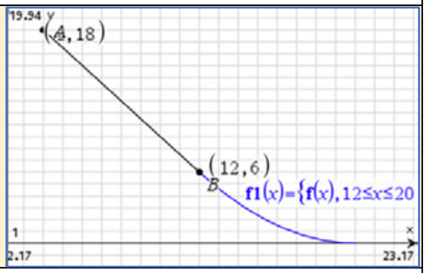
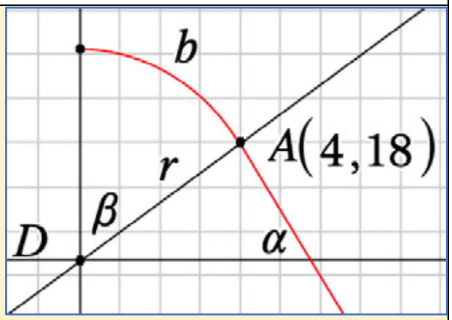
e **(4 BE)**	
	Die beiden Zeitpunkte können mit x sowie x + 3 beschrieben werden. Da w(x) die momentane Durchflussrate beschreibt, gibt das bestimmte Integral $\int_x^{x+3} w(s)ds = 13$ an, dass im Zeitraum von x bis x + 3 dreizehn Kubikmeter Wasser durch den Kanal flossen. Die Lösungen der Gleichung führen auf zwei Werte $x_1 \approx 0{,}8$ und $x_2 \approx 4{,}4$. $\text{solve}\left(\int_x^{x+3} w(s)\,ds=13,x\right)\mid x\geq 0$ $x=0.8151 \text{ or } x=4.426$ Damit kommen die beiden drei Sekunden umfassenden Zeiträume infrage, die etwa 0,8 Sekunden bzw. etwa 4,4 Sekunden nach Beobachtungsbeginn liegen. Möglichkeit der Selbstkontrolle:  Neben dem Graphen von w werden die Geraden x = k und x = k + 3 eingezeichnet. Für k wird ein Schieberegler eingerichtet. Der Inhalt der Fläche, die der Graph von w mit der x-Achse und den beiden Geraden x = k sowie x = k + 3 einschließt, kann mit der Option [*Graph analysieren*] angezeigt werden. Durch Betätigen des Schiebereglers sucht man dann Näherungswerte für k, so dass der Flächeninhalt ca. 13 FE groß wird.

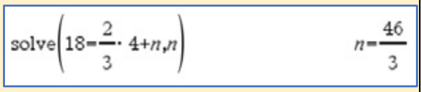
Analysis 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[6]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Eine Geradengleichung hat die Form y = mx + n bzw. als lineare Funktion formuliert g(x) = mx + n. Mit Hilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte A und B kann ein Gleichungssystem mit g(4) = 18 und g(12) = 6 aufgestellt werden.  Die Berechnung liefert m = $-\frac{3}{2}$ und n = 24. Der Neigungswinkel α dieser Geraden gegenüber der Horizontalen wird berechnet mit $\arctan(m) = \alpha$. Es ergibt sich $\alpha \approx -56°$.
b (2 BE)	
Lösung	Die Durchschnittsgeschwindigkeit lässt sich mit der Formel $v = \frac{s}{t}$ berechnen, wobei s der Länge der Strecke $\overline{AB}$ entspricht. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $s = \sqrt{8^2 + 12^2}$. Damit ergibt sich $v = \frac{\sqrt{8^2+12^2}}{1{,}4} \approx 10\,\frac{m}{s}$.  Hinweis. Da der Operator „Bestimmen“ genutzt wird, kann die Länge der Strecke $\overline{AB}$ auch grafisch bestimmt werden. 

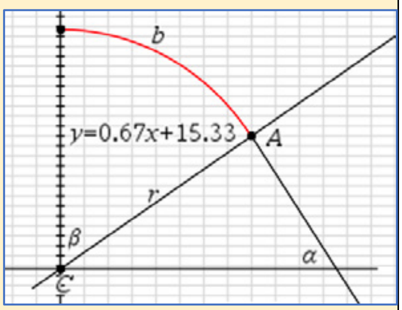
[6] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_21.pdf

c (3 BE)	
Lösung	Für die gesuchte quadratische Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ sind die Parameter a, b und c zu bestimmen. Die dazu notwendigen Bedingungen sind f(12) = 6, f(20) = 0 und f‘(20) = 0. Für die Berechnung ist es günstig, zunächst die Funktionen f und f‘ zu definieren. Die Berechnung liefert $a = \frac{3}{32}$, $b = -\frac{15}{4}$ und $c = \frac{75}{2}$.  Für das Intervall [12; 20] gilt die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{3}{32}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{75}{2}$, die mit der Kontrollfunktion übereinstimmt.  Eine Kontrolle im Grafikfenster ist sinnvoll.

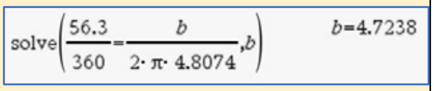
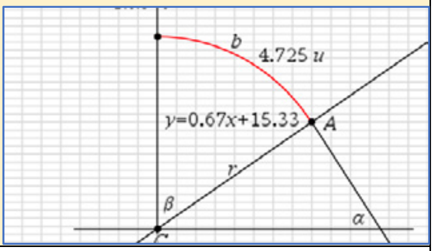
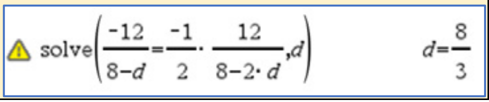
<table>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Kontrolle der Lösung von c) wird zur Lösung dieses Aufgabenteils genutzt.

</td></tr>
<tr><td>e
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Um die Länge des Startbogens bestimmen zu können, benötigt man einerseits die Länge des Radius r des Startbogens sowie die Größe des Winkels β des Kreisbogens b. Die Länge des Radius r entspricht der Länge von $\overline{AD}$, wobei D der Schnittpunkt der Lotgeraden mit der y-Achse ist. Um D zu bestimmen, kann man die Gleichung der Lotgeraden ermitteln.


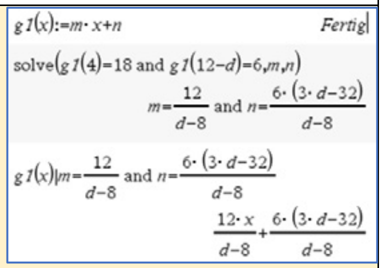
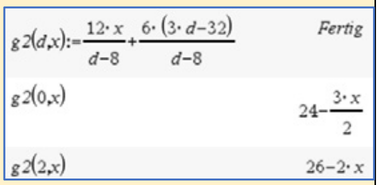
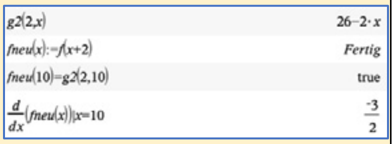
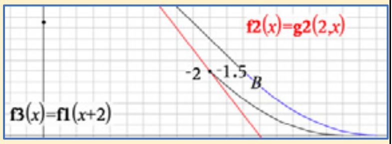
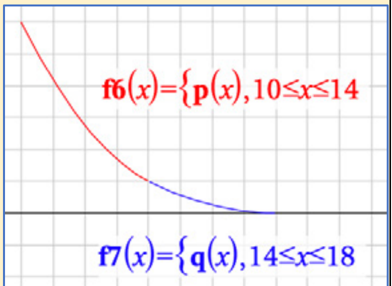
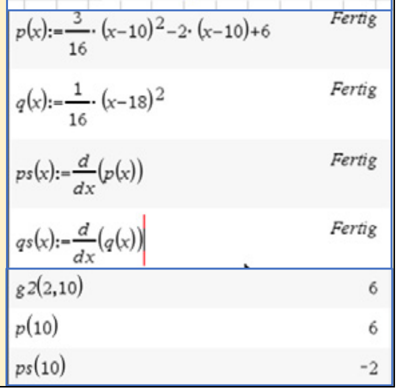
Variante 1: Die Lotgerade steht senkrecht auf der Geraden durch A und B, damit gilt die Beziehung $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
Damit kann die Gleichung der Geraden durch A und D bestimmt werden. Es gilt y = $\frac{2}{3}x$ + n. Mit x = 4 und y = 18 (Koordinaten des Punktes A) folgt n = $\frac{46}{3}$.


Damit gilt D(0; $\frac{46}{3}$).
Für die Länge des Radius gilt dann: $r = \sqrt{4^2 + (18 - \frac{46}{3})^2} \approx 4{,}8\ m$
Variante 2: Es gilt β = α = 56,3°. Damit gilt für den Anstieg der Geraden durch A und D
m = tan(90° – 56,3°) ≈ 0.667.

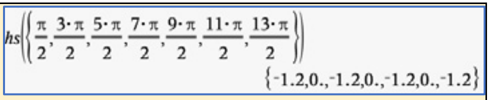
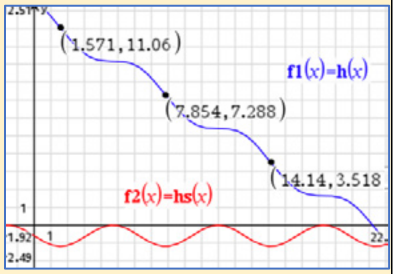
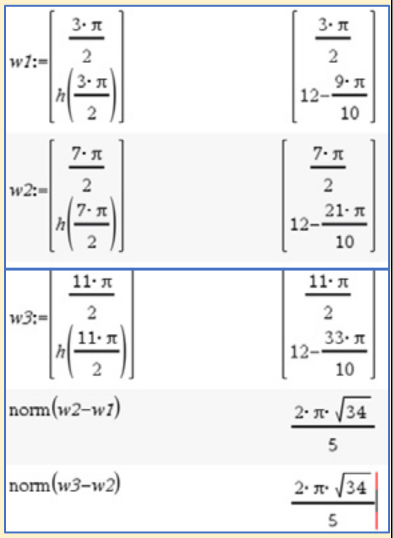
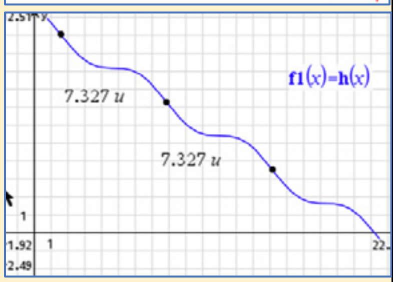

Hiermit kann, wie in Variante 1, die Gleichung der Geraden bestimmt werden.
Variante 3: Da der Operator „Ermitteln“ genutzt wird, kann die Geradengleichung direkt im Grafikfenster bestimmt werden. Es wird die Senkrechte durch A bzgl. der Geraden durch A und B konstruiert und deren Gleichung ermittelt. Es ergibt sich y = 0,67x + 15,33.


Um die Länge des Kreisbogens b zu bestimmen, benötigt man den Radius r und den Winkel β.</td></tr>
</table>

	Es gilt die Beziehung: $\frac{\beta}{360°} = \frac{b}{2\pi r}$. Mit den ermittelten Werten folgt b≈ $4{,}7\ m$.  Variante: Die Länge des Bogens kann auch direkt im Grafikfenster ermittelt werden. 
f (3 BE)	
Lösung	Die neue Neigung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-18}{12-(4+d)} = -\frac{12}{8-d}$. Für das gesuchte d gilt die Beziehung $-\frac{12}{8-d} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8-2d}$. Hiermit folgt d = $\frac{8}{3}$. 

g (6 BE)	
Lösung	Es bietet sich an, für den neuen Mittelabschnitt eine neue Funktion zu definieren, die den zusätzlichen Parameter d beinhaltet. Dazu wird eine neue Geradengleichung definiert, die durch die Punkte A(4; 18) sowie B(12 – d; 6) verläuft. Ein Vergleich mit der ursprünglichen Geraden g mit d = 0 bietet sich an.   Für d = 2 ergibt sich die Geradengleichung zu $g_2(x) = -2x + 26$. Betrachtung der Neugestaltung des Auslaufbogens. I: Durch die Verschiebung des Mittelabschnitts verläuft dieser nun steiler ($m = -2$ gegenüber $m = -\frac{3}{2}$). Die Verschiebung des Auslaufbogens ändert allerdings nichts am Anstieg der Parabel an der Berührungsstelle. Damit kommt es dort zu einem Knick. Dies kann auch rechnerisch gezeigt werden.  Eine grafische Kontrolle bietet sich auch hier an.   II: Man definiert die Funktionen p und q sowie deren erste Ableitungsfunktion. Eine erste grafische Kontrolle lässt vermuten, dass die Übergänge ohne Knick und Sprung verlaufen. Dies wird rechnerisch nachgewiesen. 1. Stelle x = 10: Hier gilt $g_2(10) = p(10)$ und da $p'(10) = -2$ ist, erfolgt hier der Übergang ohne Knick und Sprung. 

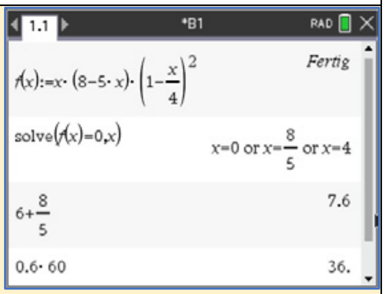
	2. Stelle x = 14: Hier gilt p(14) = q(14) und p‘(14) = q‘(14). Auch hier erfolgt der Übergang ohne Knick und Sprung.	$p(14)$ 1 $q(14)$ 1 $ps(14)$ $\frac{-1}{2}$ $qs(14)$ $\frac{-1}{2}$
	3. Stelle x = 18 Da q(18) = 0 und q‘(18) = 0 ist, geht die Rutschbahn auch ohne Knick und Sprung in die Horizontale über.	$q(18)$ 0 $qs(18)$ 0
2		
a (3 BE)		
Lösung	Die Funktion h und deren Ableitung h‘ werden definiert. Für h‘ folgt $h'(x) = \frac{-3\sin(x)-3}{5}$. Mit h(0) = 12,6 m und h(19,8) ≈ 0,5 m ist der Startpunkt 12,6 m oberhalb der Wasseroberfläche. Die Rutsche hat eine Ausdehnung in x-Richtung von 19,8 m.	$h(x):=\frac{3}{5}\cdot\cos(x)-\frac{3}{5}\cdot x+12$ *Fertig* $hs(x):=\frac{d}{dx}(h(x))$ *Fertig* $hs(x)$ $\frac{-3\cdot\sin(x)}{5}-\frac{3}{5}$ $h(0)$ 12.6 solve$(h(x)=0.5,x)\|x>0$ x=19.771
b (4 BE)		
Lösung	Die größte bzw. kleinste Neigung liegt in den Wendepunkten von h vor. Es werden die zweite und dritte Ableitung von h bestimmt und h auf Wendepunkte untersucht. Mit h‘‘(x) = $-\frac{3}{5}\cos(x)$ liefert h‘‘(x) = 0 mögliche Wendestellen.	$hss(x):=\frac{d}{dx}(hs(x))$ *Fertig* $hsss(x):=\frac{d}{dx}(hss(x))$ *Fertig* $hss(x)$ $\frac{-3\cdot\cos(x)}{5}$ $hsss(x)$ $\frac{3\cdot\sin(x)}{5}$
	Da die größte Ausdehnung in x-Richtung < 7π ist, sucht man nur im Intervall [0; 7π] nach Wendestellen. Es ergeben sich Wendestellen für $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$.	zeros$(hss(x),x)\|0\le x\le 7\cdot\pi$ $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2},\frac{9\cdot\pi}{2},\frac{11\cdot\pi}{2},\frac{13\cdot\pi}{2}\right\}$ $hsss\left(\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2},\frac{9\cdot\pi}{2},\frac{11\cdot\pi}{2},\frac{13\cdot\pi}{2}\right\}\right)$ $\left\{\frac{3}{5},\frac{-3}{5},\frac{3}{5},\frac{-3}{5},\frac{3}{5},\frac{-3}{5},\frac{3}{5}\right\}$

	Für $x = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi$ ergibt sich eine Neigung von h'($\frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi$) = –1,2 = –120 %.  Für $x = \frac{3\pi}{2} + 2k \cdot \pi$ ergibt sich eine Neigung von h'($\frac{3\pi}{2} + 2k \cdot \pi$) = 0 = 0 %. Damit liegen an den drei Stellen $x = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$ die größten Neigungen mit 120 % vor (Der Wert für k = 3 liegt außerhalb des betrachteten Intervalls.) Hinweis: Eine Kontrolle im Grafikfenster ist sinnvoll. 
c (4 BE)	
Lösung	Wie in Aufgabenteil b) schon gezeigt, gibt es drei Wendestellen $x = \frac{3\pi}{2} + 2k \cdot \pi$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$. Für die drei Wendepunkte gilt: $W_1(\frac{3\pi}{2}; h(\frac{3\pi}{2}))$, $W_2(\frac{7\pi}{2}; h(\frac{7\pi}{2}))$ und $W_3(\frac{11\pi}{2}; h(\frac{11\pi}{2}))$. Den Abstand der Wendepunkte voneinander kann man vektoriell bestimmen: $\lvert\overline{W_1W_2}\rvert = \frac{2\pi\cdot\sqrt{34}}{5}$ und $\lvert\overline{W_2W_3}\rvert = \frac{2\pi\cdot\sqrt{34}}{5}$.  Eine Kontrolle im Grafikfenster ist auch hier möglich. 

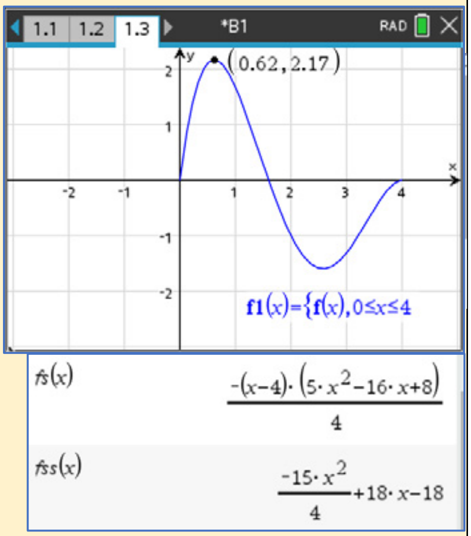
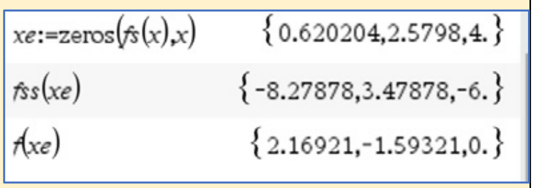
	Lösungsvariante: Es werden die Differenzen der x-Koordinaten und der y-Koordinaten für zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte betrachtet. Da diese jeweils gleich sind, haben die Punkte gleiche Abstände voneinander. $\text{zeros}(hs(x),x)\vert 0\le x\le 7\cdot\pi \quad \left\{\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2},\frac{11\cdot\pi}{2}\right\}$ $\Delta\text{List}\left(\left\{\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2},\frac{11\cdot\pi}{2}\right\}\right) \quad \{2\cdot\pi,2\cdot\pi\}$ $h\left(\left\{\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2},\frac{11\cdot\pi}{2}\right\}\right) \quad \left\{12-\frac{9\cdot\pi}{10},12-\frac{21\cdot\pi}{10},12-\frac{33\cdot\pi}{10}\right\}$ $\Delta\text{List}\left(\left\{12-\frac{9\cdot\pi}{10},12-\frac{21\cdot\pi}{10},12-\frac{33\cdot\pi}{10}\right\}\right)$

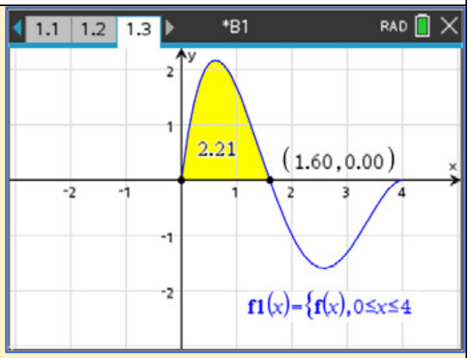
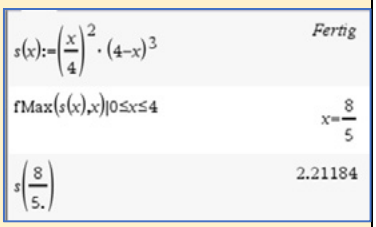
Analysis - erhöhtes Anforderungsniveau

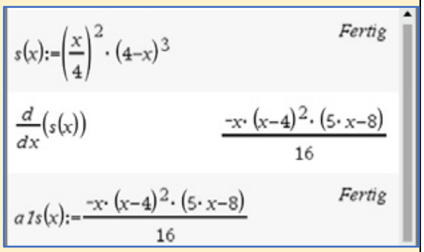
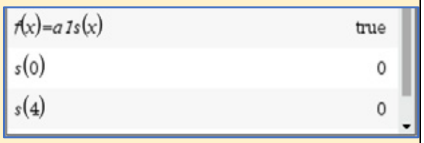
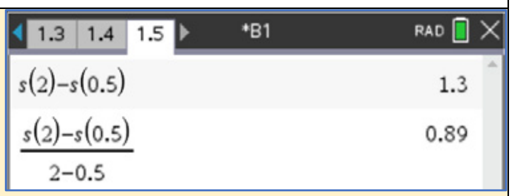
Analysis 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[7]

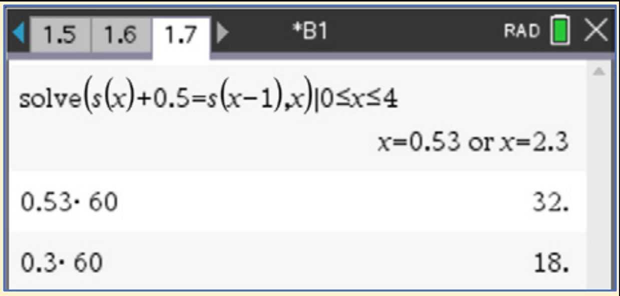
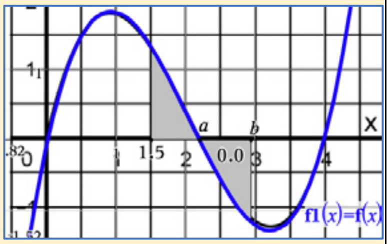
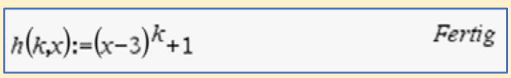
1	
a (3 BE)	
Lösung	 Der Funktionsterm $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$ wird als Funktion f(x) gespeichert. Für die Ermittlung der Nullstellen von f wird die Gleichung $f(x) = 0$ gelöst. Es ergeben sich $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ und $x_3 = 4$. Es ergeben sich daraus die Zeitpunkte 06:00 Uhr (für x_1), 07:36 Uhr (für x_2) und 10:00 Uhr (für x_3). Begründung für die Anzahl der Nullstellen: Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion, die in faktorisierter Form angegeben ist. Ihre Linearfaktoren sind x, (8 – 5 x) sowie $(1 - \frac{x}{4})$, wobei letzterer doppelt vorkommt. Nach dem Satz vom Nullprodukt hat f Nullstellen genau dann, wenn einer oder mehrere der Faktoren eine Nullstelle besitzen. Deshalb sind bei den drei verschiedenen Linearfaktoren nicht mehr als drei Nullstellen möglich. Hinweis: Die Überlegungen zur Anzahl der Nullstellen lassen die Bestimmung der Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ und $x_3 = 4$ auch ohne CAS zu, indem die Nullstelle jedes Linearfaktors im Kopf berechnet wird.

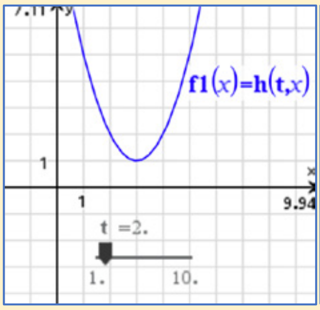
[7] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_6.pdf

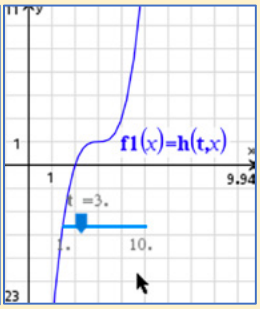
b (1 BE)	
Lösung	Da f die Änderungsrate beschreibt und f(2) negativ ist, nimmt die Staulänge für x = 2, also zum Zeitpunkt 08:00 Uhr, ab.
c (3 BE)	
Lösung	Da f die Änderungsrate der Staulänge beschreibt, muss das globale Maximum von f im Intervall $0 \leq x \leq 4$ berechnet werden. Der Operator „Bestimmen“ erlaubt neben einer rechnerischen Lösung auch andere Möglichkeiten, die das MMS bietet. Mithilfe der 1. und der 2. Ableitung von f können Sie die notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extrema nutzen. Ableitungsfunktionen von f sind: $f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-4) \cdot (5x^2 - 16x + 8)$ $f''(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 18x - 18$  Die Nullstellen und damit mögliche lokale Extremstellen von $f'(x)$ sind $x_1 \approx 0{,}62$, $x_2 \approx 2{,}6$ und $x_3 = 4$. Sie werden hier als rationale Näherungswerte angegeben, weil dies für den Sachverhalt (Angabe als Zeitpunkte) sinnvoll ist.  Wegen $f''(0{,}62) \approx -8{,}3 < 0$ liegt bei $x_1 \approx 0{,}62$ ein lokales Maximum vor. Wegen $f''(2{,}6) \approx 3{,}5 > 0$ liegt bei $x_2 \approx 2{,}6$ ein lokales Minimum vor. Wegen $f''(4) \approx -6 < 0$ liegt bei $x_3 = 4$ ein lokales Maximum vor. Bezogen auf das Intervall $0 \leq x \leq 4$ ist dies jedoch ein Randmaximum. Vergleicht man außerdem die Funktionswerte $f(0{,}62) \approx 2{,}2$ und $f(4) = 0$, so wird klar, dass die Staulänge für $x_1 \approx 0{,}62$ am stärksten zunimmt, und zwar um ca. 2,2 km/h. Wegen $0{,}62 \cdot 60 \approx 37{,}2$ nimmt die Staulänge zum Zeitpunkt 06:37 am stärksten zu. Wegen $f(0{,}62) \approx 2{,}2$ ist auch gezeigt, dass $2\ \frac{km}{h} < 2{,}2\ \frac{km}{h} < 3\ \frac{km}{h}$ ist. Eine grafische Ermittlung des globalen Maximums ist auch möglich.

d (2 BE)	
Lösung	Der Graph der Änderungsrate liegt nur im Intervall zwischen den ersten beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{5}$ oberhalb der Zeitachse, danach unterhalb dieser Achse. Die Staulänge nimmt also für $0 \leq x \leq 1{,}6$ ständig zu und danach bis x = 4 wieder ab. Demzufolge ist der Stau für x = 1,6 am längsten, dies ist zum Zeitpunkt 07:36 Uhr der Fall (vergleichen Sie die Lösungen zur Teilaufgabe 1a).  Hinweis: Da der Stau um 06:00 Uhr beginnt, kann man aus dem Flächeninhalt des oberhalb gelegenen Flächenstücks ablesen, dass die größte Staulänge etwa 2,21 km betrug. Diese Angabe war aber in der Aufgabenstellung nicht verlangt. Alternative Lösung 1: Aus den Angaben der Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$ und $x_3 = 4$ (Teilaufgabe B1a), der Angabe f(2) < 0 (Teilaufgabe B1b) und der Tatsache, dass f eine stetige Funktion ist, lässt sich auch ohne Verwendung der grafischen Darstellung schlussfolgern, dass f(x) nur im Intervall $0 \leq x \leq 1{,}6$ nichtnegative Funktionswerte hat und demzufolge am Ende des Intervalls bei x = 1,6 die größte Staulänge erreicht wird. Alternative Lösung 2: Mit der im Folgenden (Teilaufgabe 1e) verwendeten Funktion s(x) für die Staulänge kann deren Maximalwert ebenfalls bestimmt werden. 

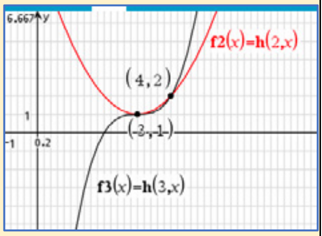
e (4 BE)	
Lösung	Wenn s(x) die Staulänge angeben soll, dann muss $s'(x) = f(x)$ also die Änderungsrate der Staulänge sein. Außerdem muss s(0) = 0 gelten, da der Staubeginn bei x = 0 liegt. Wenn s(4) = 0 ist, dann ist die Staulänge zum Zeitpunkt 10:00 Uhr gleich null. Der Stau hätte sich dann vollständig aufgelöst. Mit dem CAS wird die erste Ableitung von s(x) gebildet und unter einer geeigneten Variablen als Funktion gespeichert:  $s'(x) = -\frac{1}{16}\cdot x\cdot(x-4)^2\cdot(5x-8)$ Ebenfalls mit dem CAS wird überprüft, ob $s'(x) = f(x)$ gilt. Diese Rechnung wird mit „true“ als wahr bestätigt.  Auch die Berechnung von s(0) gibt den Funktionswert null zurück. Da die Bedingungen $s'(x) = f(x)$ und s(0) = 0 erfüllt sind, trifft die Aussage zu. Da auch s(4) = 0 gilt, ist der Stau um 10:00 Uhr völlig aufgelöst. Alternative Lösung: Wenn die gegebene Aussage richtig ist, dann muss s(x) eine Stammfunktion von f(x) sein mit der unteren Integrationsgrenze x = 0.  Die Gleichung $\int_0^t f(x)dx = s(t)$ wird mit „true“ bestätigt.
f (3 BE)	
Lösung	Zum Zeitpunkt 06:30 Uhr gehört der x-Wert x = 0,5, zum Zeitpunkt 08:00 Uhr gehört der x-Wert x = 2.  Die Zunahme der Staulänge wird berechnet durch $s(2) - s(0{,}5) \approx 1{,}3$. Die Staulänge hat also um etwa 1,3 km zugenommen. Die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge erhält man aus $\frac{s(2)-s(0{,}5)}{2-0{,}5} \approx 0{,}9$. Sie beträgt ca. 0,9 $\frac{km}{h}$.

g (3 BE)	
Lösung	Es sei x der gesuchte Zeitpunkt, dann ist s(x) die Staulänge zu diesem Zeitpunkt. Der Zeitpunkt eine Stunde vorher kann durch (x – 1) angegeben werden. Die zugehörige  Staulänge wird durch s(x – 1) beschrieben. Nach den Angaben der Aufgabe ist $s(x) + 0{,}5 = s(x - 1)$. Die Lösungen dieser Gleichung für $0 \leq x \leq 4$ sind $x_1 \approx 0{,}53$ und $x_2 \approx 2{,}3$. Allerdings ist $x_1 - 1 = -0{,}47 < 0$, so dass für den Zeitpunkt x_1 der eine Stunde frühere Zeitpunkt nicht im Intervall $0 \leq x \leq 4$ liegt. Für $x_2 - 1 \approx 1{,}3$ gilt diese Einschränkung nicht. Damit gibt es genau einen Zeitpunkt mit der verlangten Eigenschaft: Um 08:18 Uhr war die Staulänge 0,5 km geringer als eine Stunde vorher, also um 07:18 Uhr.
h **(3 BE)**	
Lösung	Da die Kurve die Änderungsrate der Staulänge beschreibt, kann die Staulänge als Flächenbilanz der Flächeninhalte der Teilflächen zwischen der Kurve und der Zeitachse betrachtet werden. Flächenanteile oberhalb der Zeitachse repräsentieren eine Zunahme, die unterhalb der Zeitachse eine Abnahme der Staulänge. Der gesuchte Zeitpunkt wird mit b bezeichnet. Die Staulänge um 07:30 Uhr kann als Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Zeitachse im Intervall $0 \leq x \leq 1{,}5$ interpretiert werden. Danach nimmt der Flächeninhalt, also die Staulänge, bis zur Nullstelle a zu. Da dann die Fläche zwischen der Kurve und der  Zeitachse unterhalb derselben liegt, kann von einer Abnahme der Staulänge ab x = a ausgegangen werden. Wenn die Abnahme im Intervall $a \leq x \leq b$ genauso groß ist wie die Zunahme im Intervall $1{,}5 \leq x \leq a$, dann ist die Staulänge genauso groß wie die im Intervall $0 \leq x \leq 1{,}5$.
2	
a (3 BE)	
Lösung	Definieren Sie die Funktion h_k auf Ihrem CAS-Rechner in geeigneter Form z. B. als h(k,x). 

<table>
<tr><td></td><td>
Stellen Sie z. B. mittels eines Schiebereglers für verschiedene k die Graphen dar und untersuchen Sie hiermit verschiedene Fälle für das Verhalten für $x \to -\infty$.




(Hinweis: Im Grafikfenster muss statt k ein anderer Parameter genutzt werden, damit die Variable k nicht mit einem Wert belegt ist, hier wird t genutzt.)

Vermutung:
Für gerade k gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k = \infty$.
Für ungerade k gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k = -\infty$.
Die rechnerische Überprüfung für k = 2 bzw. k = 3 bestätigt dies.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (h(2,x))$ ∞
$\lim\limits_{x\to-\infty} (h(3,x))$ $-\infty$
</td></tr>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Stellen Sie den Graphen für verschiedene k dar und vermuten Sie hiermit die gemeinsamen Punkte aller Graphen.


Die Darstellung der Graphen für k = 2 und k = 3 legt die Vermutung nahe, dass alle Graphen die Punkte (3; 1) und (4; 2) gemeinsam haben.
Eine rechnerische Überprüfung belegt die Vermutung aus der Grafik.
Anmerkung:
(Ein allgemeiner Ansatz liefert nur die Stelle x = 4.)
solve(h(3,x)=h(2,x),x)   x=3 or x=4
solve(h(10,x)=h(9,x),x)   x=3 or x=4
solve(h(k,x)=h(m,x),x)   x=4 or k−m=0

Begründung für die beiden gefundenen Stellen:
Nur wenn die Basis (x – 3) den Wert 0 oder 1 hat, sind die Potenzen $(x-3)^k$ immer gleich 0 bzw. 1, egal ob k eine gerade oder ungerade Zahl ist.
x – 3 = 0 führt auf x = 3 und x – 3 = 1 ergibt x = 4.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Begründung, dass es keine weiteren Stellen geben kann:
Da für k = 2 und k = 3 nur zwei gemeinsame Stellen existieren, können alle anderen Kurven der Schar auch nur noch dort gemeinsame Punkte haben. Dies kann man mit dem CAS nachweisen.

$h(k,3)|k>0$ 1
$h(k,4)|k>0$ 2</td></tr>
<tr><td>c
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Definieren Sie zunächst die Ableitungsfunktion h‘. Beachten Sie, dass bei Funktionen mit Parameter der Ableitungsterm zunächst ausgewertet und dann erst gespeichert werden kann.

$h(k,x):=(x-3)^k+1$ Fertig
$\frac{d}{dx}(h(k,x))$ $k\cdot(x-3)^{k-1}$
$hs(k,x):=k\cdot(x-3)^{k-1}$ Fertig

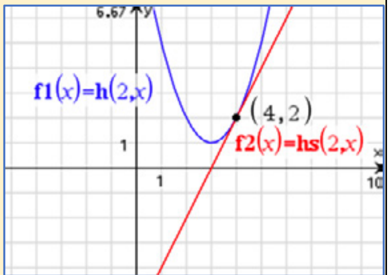
Nur für k = 1 und k = 2 ergibt sich für die Ableitungsfunktion ein linearer Term (Gerade).

$hs(1,x)$ 1
$hs(2,x)$ $2\cdot(x-3)$

Für k = 1 kann h‘ nicht Tangente an h sein, da h‘ den Anstieg 0 und h den konstanten Anstieg 1 hat.
Für k = 2 muss untersucht werden, ob h‘ Tangente an h sein kann.

$hs(1,x)$ 1
$h(1,x)$ $x-2$
$hs(2,x)$ $2\cdot(x-3)$
$h(2,x)$ $x^2-6\cdot x+10$

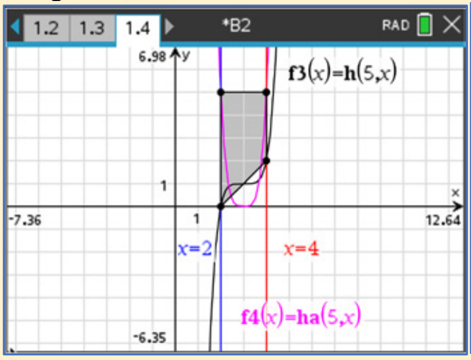
Eine Kontrolle dieser Überlegungen im Grafikfenster zeigt, dass für k = 2 noch untersucht werden muss, ob h‘ Tangente ist.

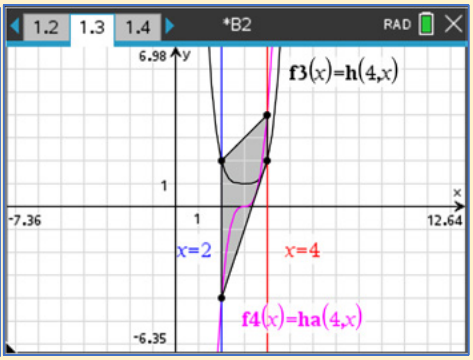


Für x = 4 ergibt sich auch rechnerisch der gemeinsame Punkt (4; 2) von h und h‘.
Der Anstieg von h an der Stelle x = 4 beträgt 2 und stimmt damit mit dem Anstieg von h‘ überein.
Damit ist gezeigt, dass h‘ Tangente an h für k = 2 ist.

$\text{solve}(hs(2,x)=h(2,x),x)$ $x=4$
$h(2,4)$ 2
$hs(2,4)$ 2</td></tr>
<tr><td>d
(7 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Begründung: Sowohl P und Q als auch R und S haben übereinstimmende x-Koordinaten. Damit sind $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel und es liegt ein Trapez vor.</td></tr>
</table>

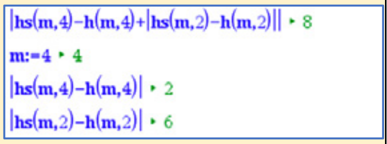
Eine Veranschaulichung des Sachverhaltes ist hier für k = 4 und k = 5 dargestellt.



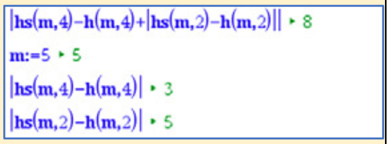


Um zu zeigen, dass die angegebene Aussage wahr ist, kann man dies zunächst an selbstgewählten Beispielen überprüfen.
Da die x-Koordinaten der beiden parallelen Seiten des Trapezes jeweils gleich sind, benötigt man nur die Längen dieser Seiten und die Höhe des Trapezes (2 LE), um mit der Formel
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ die Fläche zu berechnen.
Mit h = 2 folgt $A = \frac{a+c}{2} \cdot 2 = a + c$
A = $|\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{RS}|$

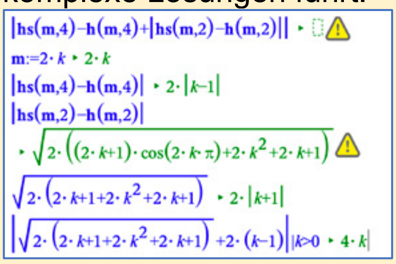
Für k = 4 ergibt sich
$A = |\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{RS}|$ = 2+6 =8 FE.

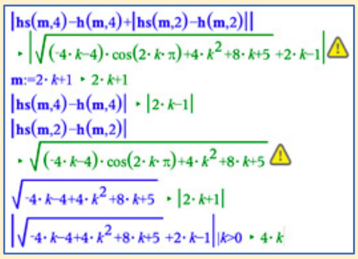


Für k = 5 ergibt sich das gleiche Ergebnis:
$A = |\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{RS}|$ = 3+5 =8 FE.



Der Nachweis für beliebige gerade k kann händisch geführt werden oder man nutzt das MMS. Hier gibt es allerdings ein kleines rechnerisches Problem, da ohne Einschränkungen für den Parameter k für x =2 der Ausdruck $(-1)^k$ ausgewertet wird und dies ggf. auf komplexe Lösungen führt.





Um eine Lösung zu finden, muss man in den entstehenden Termen für die Stelle x = 2 den Ausdruck cos(2kπ) einfach löschen, da für
$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: cos(2kπ) $= 1$.
Man erhält damit einen Flächeninhalt von A(k) = 4k.

	Hinweis: Möchte man nur mit natürlichen Zahlen für k arbeiten, muss mit der Systemvariablen ***n1*** (Eingabe über @n1) gearbeitet werden. **Die Fläche des Trapezes reduziert sich auf die Summe der Seitenlängen der paralellen Seiten, also** **F=a+b** **Also sind die Seitenlängen in Abhängigkeit von einer natürlichen Zahl k>1 und p (0 oder 1)** $\mathbf{a}(p):=\lvert\mathbf{h}(2,2\cdot k+p)-\mathbf{hs}(2,2\cdot k+p)\rvert$ ▸ *Fertig* $\mathbf{b}(p):=\lvert\mathbf{h}(4,2\cdot k+p)-\mathbf{hs}(4,2\cdot k+p)\rvert$ ▸ *Fertig* **Damit geben sich für zwei aufeinanderfolgende k:** $\mathbf{a}(0)+\mathbf{b}(0)\vert k=\boldsymbol{n1}$ and $\boldsymbol{n1}>1$ ▸ $4\cdot \boldsymbol{n1}$ ⚠ **Hinweis: Eingabe:@n1** $\mathbf{a}(1)+\mathbf{b}(1)\vert k=\boldsymbol{n1}$ and $\boldsymbol{n1}>1$ ▸ $4\cdot \boldsymbol{n1}$ ⚠

Analysis 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[8]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Definieren Sie den Funktionsterm $f_a(x) = e^x \cdot (x-a)^2$ unter einem geeigneten Namen und speichern Sie die Funktion ab.
Bilden Sie die ersten drei Ableitungen von $f_a(x)$ und speichern Sie auch hier die Funktionsterme unter geeigneten Variablen.

$f(a,x):=\mathbf{e}^x\cdot(x-a)^2$ *Fertig*

$\frac{d}{dx}(f(a,x))$ $(x-a)\cdot(x-a+2)\cdot\mathbf{e}^x$

$a1f(a,x):=(x-a)\cdot(x-a+2)\cdot\mathbf{e}^x$ *Fertig*

$f_a'(a,x) = (x-a)\cdot(x-a+2)\cdot e^x$

$f_a''(x) = (x^2+(4-2a)\cdot x + a^2 - 4a + 2)\cdot e^x$

$f_a'''(x) = (x^2+(6-2a)\cdot x + a^2 - 6a + 6)\cdot e^x$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(a,x))$ $(x^2+(4-2\cdot a)\cdot x+a^2-4\cdot a+2)\cdot\mathbf{e}^x$

$a2f(a,x):=(x^2+(4-2\cdot a)\cdot x+a^2-4\cdot a+2)\cdot\mathbf{e}^x$ *Fertig*

$\frac{d^3}{dx^3}(f(a,x))$ $(x^2+(6-2\cdot a)\cdot x+a^2-6\cdot a+6)\cdot\mathbf{e}^x$

$a3f(a,x):=(x^2+(6-2\cdot a)\cdot x+a^2-6\cdot a+6)\cdot\mathbf{e}^x$ *Fertig*

Der gegebenen Abbildung des Graphen von $f_{3/2}$ ist zu entnehmen, dass der Wendepunkt mit der kleinsten Steigung für x > 0 existieren muss, und zwar dort, wo der Graph monoton fallend ist.

Für die notwendige Bedingung wird die Nullstelle von $f_{3/2}''$ für x > 0 bestimmt und geprüft, ob $f_{3/2}'''$ an dieser Stelle ungleich null ist.

$\text{solve}\left(a2f\left(\frac{3}{2},x\right)=0,x\right)|x>0$ $x=\frac{2\cdot\sqrt{2}-1}{2}$

$a3f\left(\frac{3}{2},x\right)|x=\frac{2\cdot\sqrt{2}-1}{2}$ $2\cdot\sqrt{2}\cdot\mathbf{e}^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$

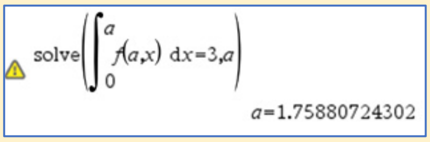
$a1f\left(\frac{3}{2},x\right)|x=\frac{2\cdot\sqrt{2}-1}{2}$ $(2-2\cdot\sqrt{2})\cdot\mathbf{e}^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$

Die kleinste Steigung wird an der Stelle $x_w = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ angenommen.

Die Steigung an dieser Stelle ist $f_{3/2}'(3/2,x) = \left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

</td></tr>
</table>

[8] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_7.pdf

b (3 BE)	
Lösung	Der gemeinsame Punkt Y der Graphen G_a mit der y-Achse wird für x = 0 berechnet: $f_a(0)e^0 \cdot (0-a)^2 = a^2$, also $Y(0\|a^2)$. Der gemeinsame Punkt X der Graphen G_a mit der x-Achse wird für y = 0 berechnet: $0 = e^x \cdot (x-a)^2$, wegen $e^x \neq 0$ für alle reellen Zahlen x, muss gelten $(x-a)^2 = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn x = a ist, also gilt $X(a\|0)$. Wegen $e^x > 0$ und $(x-a)^2 \geq 0$ ist $f_a(x) = e^x \cdot (x-a)^2 \geq 0$, deshalb ist $X(a\|0)$ der Tiefpunkt von G_a.
c (3 BE)	
Lösung	Die von G_a mit a > 0 und den Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche mit dem Inhalt 3 lässt sich nach den Ergebnissen von Teilaufgabe b berechnen durch $\int_0^a f_a(x)dx = 3$. Dieser Ansatz liefert mit dem MMS den Wert $a \approx 1{,}7588$.  Das gelbe Warndreieck weist darauf hin, dass es noch andere Lösungen geben könnte. Der Aufgabentext verlangt aber nur die Angabe eines positiven Wertes, der nach der Rechnung ermittelt wurde.

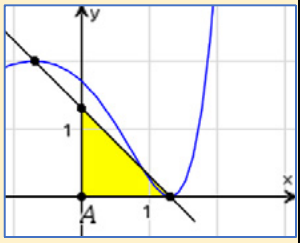
d (5 BE)	

Lösung

Der lokale Tiefpunkt ist nach Teilaufgabe b der Punkt $X(a|0)$. Für die Ermittlung des lokalen Hochpunktes werden für die notwendige Bedingung die Nullstellen von f_a' bestimmt und geprüft, für welche der Nullstellen $f_a'' < 0$ ist.

solve(a1f(a,x)=0,x)	$x=a-2$ or $x=a$
a2f(a,a−2)	$-2\cdot e^{a-2}$
f(a,a−2)	$4\cdot e^{a-2}$

Da die Stelle x = a zum lokalen Tiefpunkt gehört und die 2. Ableitung von $f_a(x)$ negativ ist, liegt an der Stelle x = a – 2 ein lokaler Hochpunkt mit den Koordinaten $H(a-2|4e^{a-2})$ vor.



Die Gerade durch die beiden Extrempunkte liefert mit den Koordinatenachsen genau dann ein gleichschenkliges Dreieck, wenn sie den Anstieg $m = -1$ hat. Der Anstieg ist identisch mit dem Differenzenquotienten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Es muss also gelten $\frac{4e^{a-2}-0}{a-2-a} = -1$. Diese Gleichung liefert für a den Wert $a = 2 - \ln(2)$.

$\text{solve}\left(\frac{4\cdot e^{a-2}}{-2}=-1,a\right)$	$a=2-\ln(2)$

Alternative Lösung:

Die Gerade g durch die Extrempunkte T und H ist von der Form $y = m \cdot x + n$. Durch Einsetzen der Koordinaten von H und T können der Anstieg m und der Durchgang n durch die y-Achse berechnet werden.

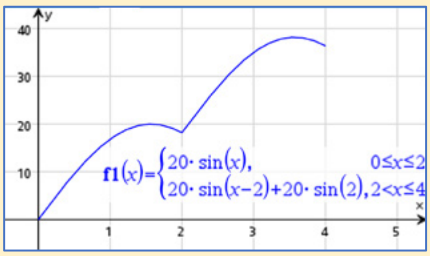
$\text{solve}\left(\begin{cases}0=m\cdot a+n\\ 4\cdot e^{a-2}=(a-2)\cdot m+n\end{cases},\{m,n\}\right)$	$m=-2\cdot e^{a-2}$ and $n=2\cdot a\cdot e^{a-2}$
$g(a,x):=-2\cdot e^{a-2}\cdot x+2\cdot a\cdot e^{a-2}$	*Fertig*

Die Gerade g hat die Gleichung $y = g_a(x) = -2 \cdot e^{a-2} \cdot x + 2a \cdot e^{a-2}$. Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn $n = 2a \cdot e^{a-2}$ genauso groß ist wie der Abstand a vom Ursprung bis T(a|0).

Aus dem Ansatz $a = 2a \cdot e^{a-2}$ ergibt sich mit $a \neq 0$ die Lösung $a = 2 - \ln(2)$.

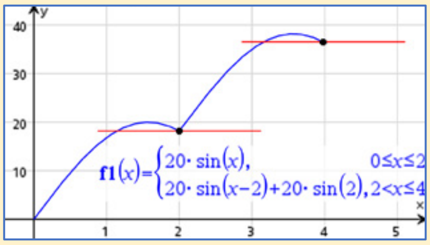
g(a,0)	$2\cdot a\cdot e^{a-2}$
solve(g(a,x)=0,x)	$x=a$
$\text{solve}(a=2\cdot a\cdot e^{a-2},a)$	$a=0$ or $a=2-\ln(2)$

e (3 BE)	
Lösung	Es ist sinnvoll, für die nun zugrunde gelegte Funktion $f_{a,b}(x) = e^x \cdot ((x - a + b)^2 - b)$ auf dem MMS ein neues Problem zu öffnen, damit es nicht zu Überschneidungen mit den bisher definierten Variablen kommt. $f(a,b,x) := \mathbf{e}^x \cdot \left((x-a+b)^2 - b\right)$ Fertig $\text{solve}(f(a,b,x)=0,x)$ $x=a-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}+1)$ or $x=a-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}-1)$ $\left\lvert a-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}+1)-(a-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b}-1))\right\rvert$ $2\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$ Es sind die Nullstellen x_1 und x_2 von $f_{a,b}(x)$ zu berechnen. Für ihren Abstand d ist der Betrag der Differenz beider Nullstellen zu ermitteln. Es ergibt sich: $$d = \lvert x_1 - x_2 \rvert = 2 \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$$ Der Abstand ist also, wie zu zeigen war, von a unabhängig (und nur für positive Werte von b gegeben). Der Warnhinweis bezieht sich auf mögliche Veränderungen des Definitionsbereiches der Terme.
f (3 BE)	
	Graph I gehört zum größeren Wert von b. Begründung: Der Graph zum größeren Wert von b stellt die Ableitungsfunktion der zum anderen Graphen gehörenden Funktion dar. Der Graph I hat eine Nullstelle, die zum lokalen Tiefpunkt von Graph II passt. Der Graph II kommt als Graph der Ableitungsfunktion nicht in Frage, da er keine Nullstelle besitzt, die mit der x-Koordinate des Tiefpunktes des Graphen I übereinstimmt.

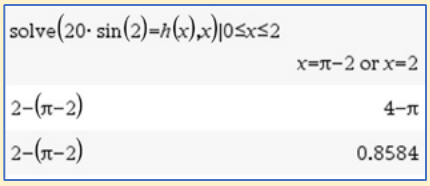
g **(3 BE)**	
	Es ist zu beachten, dass nach Teilaufgabe f gilt $f'_{a,b}(x) = f_{a,b+1}(x)$. Daraus folgt: $f'_{a,b}(x) = f_{a,b+1}(x)$. $f''_{a,b}(x) = f_{a,b+2}(x)$. $f'''_{a,b}(x) = f_{a,b+3}(x)$ Mit b = - 1 folgt daraus: $f'_{a,-1}(x) = f_{a,0}(x)$. $f''_{a,-1}(x) = f_{a,1}(x)$. $f'''_{a,-1}(x) = f_{a,2}(x)$ Zusammen mit den gegebenen Bedingungen folgt: $f'_{a,-1}(a) = f_{a,0}(a) = 0$. $f''_{a,-1}(a) = f_{a,1}(a) = 0$. $f'''_{a,-1}(a) = f_{a,2}(a) \neq 0$ Diese drei Bedingungen erlauben folgende Schlussfolgerung: Für jeden Wert von a hat der Graph von $f_{a;\,-1}$ an der Stelle x = a einen Wendepunkt mit waagerechter Wendetangente.
2	
a (4 BE)	
Lösung	Für Annäherung von links an die Stelle x = 2 ist $20 \cdot \sin(x)$ definiert und es gilt dort $20 \cdot \sin(x) = 20 \cdot \sin(2)$. Für Annäherung von rechts an die Stelle x = 2 muss der Grenzwert für $x \to 2^+$ von $20 \cdot \sin(x-2) + 20 \cdot \sin(2)$ betrachtet werden. Dieser Grenzwert ist ebenfalls $20 \cdot \sin(2)$. Der Graph von h weist an der Stelle x = 2 keinen Sprung auf. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(20 \cdot \sin(x-2) + 20 \cdot \sin(2)\right) \quad 20 \cdot \sin(2)$ Die Ergänzung des Graphen ergibt sich durch eine Parallelverschiebung des bereits eingezeichneten Graphen um 2 Einheiten nach rechts und um $20 \cdot \sin(2)$ Einheiten nach oben. 

b (3 BE)	
Lösung	Dem Graphen ist zu entnehmen, dass der größte Schalldruckpegel im Intervall $2 < x \leq 4$ als lokales Maximum angenommen wird. Zur Berechnung dieses lokalen Maximums wird die Nullstelle x_e von $h'(x)$ in diesem Intervall gesucht. Es wird geprüft, ob $h''(x_e) \leq 0$ gilt und $h(x_e)$ berechnet. $h(x):=\begin{cases}20\cdot\sin(x), & 0\le x\le 2\\ 20\cdot\sin(x-2)+20\cdot\sin(2), & 2<x\le 4\end{cases}$ *Fertig* $\frac{d}{dx}(h(x))$ $\begin{cases}20\cdot\cos(x), & 0<x<2\\ 20\cdot\cos(x-2), & 2<x<4\end{cases}$ $\text{solve}(20\cdot\cos(x-2)=0,x)\mid 2<x\le 4$ $x=\frac{\pi}{2}+2$ $\frac{d^2}{dx^2}(h(x))$ $\begin{cases}-20\cdot\sin(x), & 0<x<2\\ -20\cdot\sin(x-2), & 2<x<4\end{cases}$ $\begin{cases}-20\cdot\sin(x), & 0<x<2\\ -20\cdot\sin(x-2), & 2<x<4\end{cases}\mid x=\frac{\pi}{2}+2$ -20 $h(x)\mid x=\frac{\pi}{2}+2$ $20\cdot\sin(2)+20$ Die Nullstelle x_e von $h'(x)$ in diesem Intervall ist $x_e = \frac{\pi}{2} + 2 \approx 3{,}6$. Es gilt $h''(x_e) = -20 \leq 0$ und $h(x_e) = 20 \cdot \sin(2) + 20 \approx 38{,}2$. Der Weckton hat nach ca. 3,6 Sekunden mit etwa 38,2 Dezibel den größten Schalldruckpegel.
c (5 BE)	
Lösung	Es wird zunächst der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse mit dem bestimmten Integral $\int_0^4 h(x)dx \approx 93\ FE$ berechnet. Die Breite des Rechtecks ist wegen $b - a = 4 - 0 = 4$. Wird der Flächeninhalt von ca. 93 FE durch die Breite 4 LE dividiert, erhält man die Höhe des Rechtecks mit $h \approx 23{,}25$ LE. Der durchschnittliche Funktionswert von h ist 23,25 Dezibel. $\int_0^4 h(x)\,dx$ $-40\cdot\cos(2)+40\cdot\sin(2)+40$ $\int_0^4 h(x)\,dx$ 93.02 $\frac{93.017770534914}{4}$ 23.25

<table>
<tr><td>d
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Weckton nimmt in den Bereichen, die oberhalb der rot eingezeichneten Parallelen liegen, bestimmte Schalldruckpegel genau zweimal an. Würde man die Parallelen nach oben bis in die lokalen Hochpunkte verschieben, dann würden sich die Abstände der beiden Zeitpunkte mit gleichem Schalldruckpegel verkleinern. Da die beiden Kurvenbögen in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] kongruent sind, genügt es den links von x = 2 auf gleicher Höhe liegenden x-Wert zu bestimmen und mit dessen Hilfe den gesuchten größten Abstand zu berechnen.



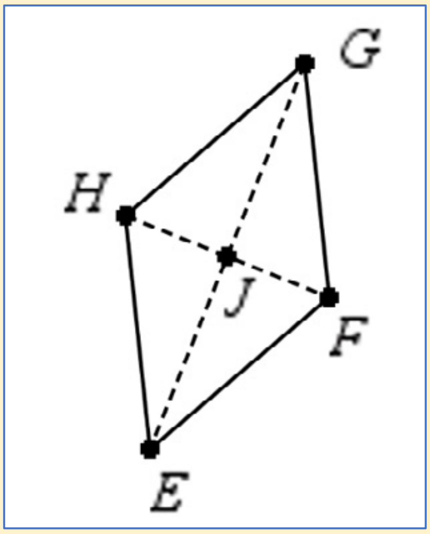
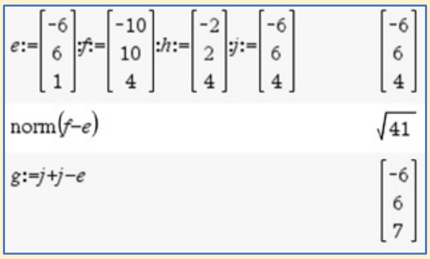
Zu berechnen sind die Schnittstellen von h(x) mit der Parallelen $y = 20 \cdot \sin(2)$ im Intervall $0 \le x \le 2$.


$\text{solve}(20\cdot\sin(2)=h(x),x)|0\le x\le 2$ → $x=\pi-2$ or $x=2$
$2-(\pi-2)$ → $4-\pi$
$2-(\pi-2)$ → 0.8584

Die beiden Schnittstellen sind $x_1 = \pi - 2$ und $x_2 = 2$.
Ihr Abstand ist $x_2 - x_1 = 2 - (\pi - 2) = 4 - \pi \approx 0{,}86$. Das ist der gesuchte Abstand. Er beträgt etwa 0,86 Sekunden.</td></tr>
</table>

Analytische Geometrie/Lineare Algebra - grundlegendes Anforderungsniveau

Alternative 1 - Aufgabe 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[9]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Speichern Sie die Ortsvektoren der gegebenen Punkte unter geeigneten Variablen. Skizzieren Sie eine Raute EFGH mit dem Diagonalenschnittpunkt J. Beachten Sie, dass alle Seiten der Raute gleiche Länge haben und sich ihre Diagonalen halbieren.  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\lvert\overrightarrow{EF}\rvert = \sqrt{41}$. Der Punkt G hat die Koordinaten G(–6|6|7); die Seitenlänge der Raute beträgt $\sqrt{41} \approx 6{,}4\ LE$.
b (3 BE)	
Lösung	Mit $cos(\varphi_1) = \frac{\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{EH}}{\lvert\overrightarrow{EF}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{EH}\rvert}$ wird der Innenwinkel φ_1 am Eckpunkt E berechnet. Da sich benachbarte Winkel in einer Raute zu 180° ergänzen, gibt $\varphi_2 = 180° - \varphi_1 \approx 56°$ die Größe des Winkels am Eckpunkt F bzw. H an.

[9]https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_14.pdf

c
(3 BE)

Lösung

Die Raute EFGH wird z. B. durch die Diagonale $\overline{HF}$ in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Das Dreieck EFH hat die Grundseite $\overline{HF}$ und die Höhe $\overline{EJ}$.

$\text{norm}(f-h)$	$8\cdot\sqrt{2}$
$\text{norm}(j-e)$	3
$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot 3$	$12\cdot\sqrt{2}$

Mit $|\overline{FH}| = 8\cdot\sqrt{2}$ und $|\overline{EJ}| = 3$ ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks EFH zu $A_{\Delta} = 12\cdot\sqrt{2}$ FE. Die Grundfläche EFGH der Pyramide ist doppelt so groß, also gilt $A_{EFGH} = 24\cdot\sqrt{2}$ FE.
Die Höhe der Pyramide entspricht der Länge der Strecke $\overline{JS}$.

$s(k):=\begin{bmatrix}-6+k\\6+k\\4\end{bmatrix}$	*Fertig*
$js(k):=\text{norm}(s(k)-j)$	*Fertig*
$js(k)$	$\lvert k\rvert\cdot\sqrt{2}$
$\text{solve}(16\cdot\lvert k\rvert=112,k)$	$k=-7$ or $k=7$

Es ist $\left|\overrightarrow{JS(k)}\right| = |k|\cdot\sqrt{2}$.
Das Volumen V der Pyramide EFGHS wird berechnet durch
$V = \frac{1}{3}\cdot A_{EFGH}\cdot\left|\overrightarrow{JS(k)}\right| = \frac{1}{3}\cdot 24\cdot\sqrt{2}\cdot|k|\cdot\sqrt{2} = 16\cdot|k|$ VE
Nun soll k so bestimmt werden, dass V = 112 VE gilt.
Wegen $112 = 7\cdot 16$ ergeben sich aus $16\cdot|k| = 7\cdot 16$ die beiden Lösungen $k = 7$ und $k = -7$.

2

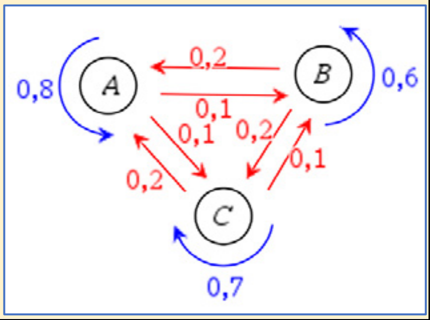
a
(3 BE)

Lösung

Die Übergangsmatrix m lässt sich als Tabelle und als

Übergangsdiagramm interpretieren:

nach \ von	A	B	C
A	0,8	0,2	0,2
B	0,1	0,6	0,1
C	0,1	0,2	0,7



<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Über den Zustandsvektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ am Samstagmorgen ist folgendes bekannt:

(1) $a + b + c = 160$;
(2) $a + b = c$

Durch Einsetzen von (2) in (1) ergibt sich $2c = 160$, also $c = 80$.

Über den Zustandsvektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ am folgenden Morgen ist dem Aufgabentext zu entnehmen, dass f = 70 gilt.

Außerdem ist $m \cdot \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8a + 0{,}2b + 16 \\ 0{,}1a + 0{,}6b + 8 \\ 0{,}1a + 0{,}2b + 56 \end{pmatrix}$.

Da in C nun 70 Wagen stehen und es insgesamt 160 Wagen sind, muss die Summe aller drei Zeilen von $\overrightarrow{v_1}$ den Wert 160 ergeben und für die dritte Zeile kann man schreiben $0{,}1a + 0{,}2b + 56 = 70$.

Das Gleichungssystem aus diesen beiden Gleichungen wird nach a und b gelöst.

$$m := \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} : v0 := \begin{bmatrix} a \\ b \\ 80 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$v1 := m \cdot v0 \qquad \begin{bmatrix} 0.8 \cdot a + 0.2 \cdot b + 16. \\ 0.1 \cdot a + 0.6 \cdot b + 8. \\ 0.1 \cdot a + 0.2 \cdot b + 56. \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} v1[1,1] + v1[2,1] + v1[3,1] = 160 \\ v1[3,1] = 70 \end{cases}, \{a,b\}\right) \qquad a = 20. \text{ and } b = 60.$$

An der Station A befanden sich am nächsten Morgen 20 Wagen.

</td></tr>
<tr><td>c
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

Der Zustandsvektor am ersten Morgen ist $\overrightarrow{w_0} = \begin{pmatrix} 50 - x \\ 46 - x \\ 64 - x \end{pmatrix}$. Mit der Übergangsmatrix M kann man den Zustandsvektor $\overrightarrow{w_1} = m \cdot \overrightarrow{w_0}$ am nächsten Morgen bestimmen:

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 62 - 1{,}2x \\ 39 - 0{,}8x \\ 59 - x \end{pmatrix}$$

$$w0 := \begin{bmatrix} 50 - x \\ 46 - x \\ 64 - x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 50 - x \\ 46 - x \\ 64 - x \end{bmatrix}$$

$$w1 := m \cdot w0 \qquad \begin{bmatrix} 62. - 1.2 \cdot x \\ 39. - 0.8 \cdot x \\ 59. - x \end{bmatrix}$$

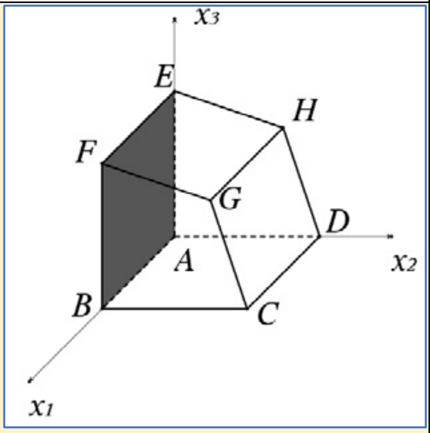
</td></tr>
</table>

	Nun sind alle Randbedingungen zu berücksichtigen. Am ersten und auch am zweiten Morgen standen bei A jeweils weniger als 47 Wagen zur Verfügung. An allen drei Stationen waren es sowohl am ersten als auch am zweiten Morgen mindestens 26 Wagen. $\text{solve}\left(\begin{cases} w0[1,1]<47 \\ w0[1,1]\ge 26 \\ w0[2,1]\ge 26 \\ w0[3,1]\ge 26 \end{cases},\{x\}\right) \quad 3<x\le 20$ $\text{solve}\left(\begin{cases} w1[1,1]<47 \\ w1[1,1]\ge 26 \\ w1[2,1]\ge 26 \\ w1[3,1]\ge 26 \end{cases},\{x\}\right) \quad 12.5<x\le 16.25$ Die insgesamt acht Ungleichungen sind gleichzeitig nur für alle natürlichen Zahlen x mit $12{,}5 < x \le 16{,}25$ erfüllt. Damit kommen für x nur die Werte 13, 14, 15 und 16 in Frage.

Alternative 2 - Aufgabe 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[10]

<table>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Das Prisma ist gegeben durch A(0|0|0), B(5|0|0), C(5|4|0), D(0|4|0), E(0|0|4), F(5|0|4), G(5|3|3) und H(0|3|3).
Speichern Sie die Ortsvektoren dieser Punkte unter geeigneten Variablen.



$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$

$e:=\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}:f:=\begin{bmatrix}5\\0\\4\end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix}5\\3\\3\end{bmatrix}:h:=\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$

Wenn das Viereck BCGF ein Drachenviereck ist, dann müssen z. B. zwei Paare benachbarter Seiten existieren, die jeweils gleich lang sind. Das ist hier gegeben, denn es gilt $|\overline{BC}| = |\overline{BF}|$ und $|\overline{GC}| = |\overline{GF}|$.

$\operatorname{norm}(b-c)=\operatorname{norm}(b-f)$ $\quad$ true

$\operatorname{norm}(g-c)=\operatorname{norm}(g-f)$ $\quad$ true

Alternativer Lösungsweg:
Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und $\overrightarrow{BG}$ halbiert $|\overline{CF}|$.
$\overrightarrow{BG} \circ \overrightarrow{CF} = 0 \Longrightarrow \overline{BG} \perp \overline{CF}$

$\operatorname{dotP}(g-b,f-c)$ $\quad$ 0

Der Punkt M(5|2|2) ist der Mittelpunkt von $\overline{CF}$. M liegt auf der Geraden durch B und G, also liegt M sowohl auf $\overline{CF}$ als auch auf $\overline{BG}$ und halbiert die Diagonale $\overline{CF}$.

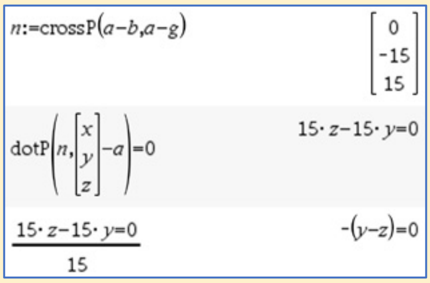
$m:=\frac{c+f}{2}$ $\quad\begin{bmatrix}5\\2\\2\end{bmatrix}$

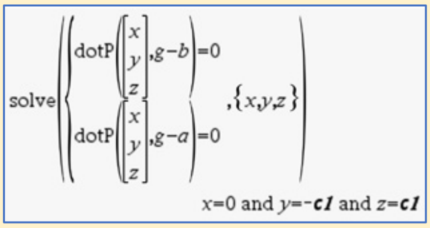
$\operatorname{solve}(m=b+r\cdot(g-b),r)$ $\quad r=\frac{2}{3}$

</td></tr>
</table>

[10] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_14.pdf

<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Ebene L durch die Punkte A, B und G kann in der Normalenform durch $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ dargestellt werden, wobei z. B. $\vec{n} = \overrightarrow{BG} \times \overrightarrow{BA}$ ein Normalenvektor von L ist.



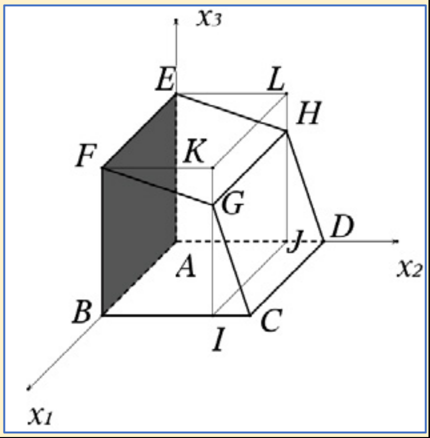


Eine Gleichung der Ebene L ist $-x_2 + x_3 = 0$. Durch einen Vergleich mit der Ebenengleichung $r \cdot x_2 + s \cdot x_3 = t$ ergibt $r = -1; s = 1; t = 0$.

Hinweis:
Der Normalenvektor kann auch mit dem Skalarprodukt ermittelt werden.

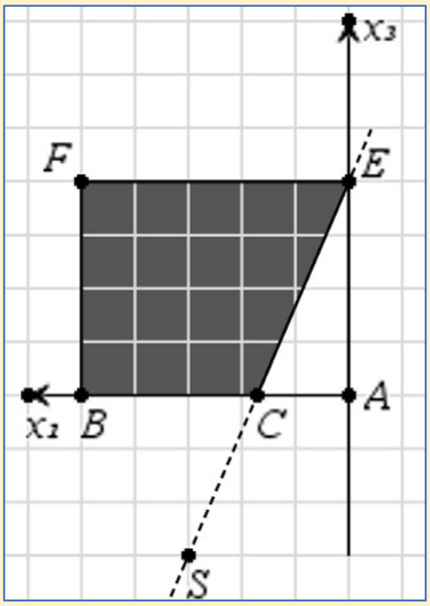
Alternative Lösung:
Da der Ursprung A in der Ebene liegt, gilt t = 0. Setzt man die Koordinaten von G in die Gleichung $r \cdot x_2 + s \cdot x_3 = 0$ ein, so ergibt sich $r \cdot 3 + s \cdot 3 = 0$, also r = –s, z. B. r = 1 und s = –1.
</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Ebene L ist eine Symmetrieebene des Prismas ABCDEFGH mit dem Drachenviereck BCGF als Grundfläche. ABCDEFGH ist ein gerades Prisma, L enthält die Symmetrieachse $\overline{BG}$ der Grundfläche und steht zu dieser senkrecht.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Gleichung I: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$:
Das Prisma ABCDEFGH hat die Höhe 5. Der Inhalt der Grundfläche BCGF ist doppelt so groß wie der Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3$ des Dreiecks BCG.

Gleichung II: $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$:
Denkt man sich das Teilprisma ICGJDH vom großen Prisma abgeschnitten und umgeklappt auf die Fläche EFGH gelegt, dann entsteht ein volumengleiches Prisma mit der rechteckigen Grundfläche BIKF und der Höhe $\overline{FE} = 5$. Mit $|\overline{BI}| = |\overline{FK}| = 3$ und $|\overline{BF}| = 4$ ist dann $V = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.
Hinweis: Es ist nur für genau eine der Rechnungen eine Erläuterung verlangt.

</td></tr>
<tr><td>e
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die mittlere Geschwindigkeit wird mit $v = \frac{s}{t}$ berechnet. Für den Weg s kann die Länge der Strecke $\overline{FG}$ in Zentimeter und für die Zeit t der Wert in Sekunden eingesetzt werden. Unter der Annahme, dass die Punktkoordinaten in Meter angegeben sind, ergibt sich $v = \frac{|\overline{FG}| \cdot 100\ cm}{60\ s} \approx 5{,}3\ \frac{cm}{s}$.

$\text{norm}(g-f)$ $\sqrt{10}$
$\text{norm}(g-f)$ 3.162
$\frac{\text{norm}(g-f) \cdot 100}{60}$ $\frac{5 \cdot \sqrt{10}}{3}$
$\frac{\text{norm}(g-f) \cdot 100}{60}$ 5.27</td></tr>
</table>

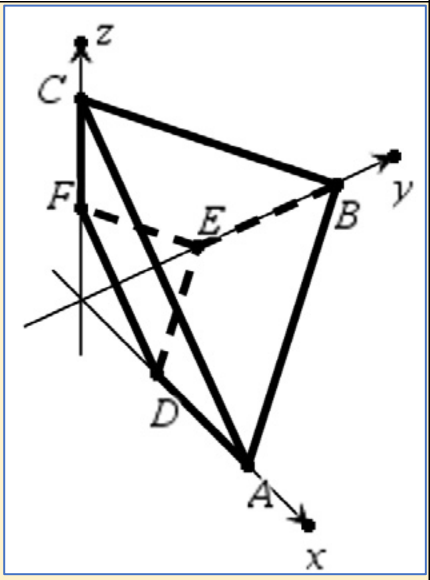
f (3 BE)	
	Der Untergrund wird durch die x_1x_2–Ebene bestimmt, die durch den Normalenvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ charakterisiert werden kann. Mit dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ kann dann der Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Untergrund trifft, berechnet werden durch $\sin(\varphi) = \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\|}$. Das ergibt einen Winkel der Größe von rund 55°. $\frac{\left\|\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)\right\|}{\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)}$ 0.8165 $\sin^{-1}(0.81649658092772)$ 54.74

g (5 BE)	
Lösung	$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ liefert $\mu = 3$ und damit (3|0|–3): Der Schatten, den das vollständig herabgelassene Rollo auf der Wand erzeugt, wird durch die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Sonnenstrahlen und dem festen Punkt H(0|3|3) bestimmt. Weil der Schatten auf der Wand liegt, ist für ihn der x_2–Wert gleich null. Damit ist der Punkt (3|0|-3) der Schnittpunkt S der Geraden durch H und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen mit der x_1x_3–Ebene. 

Alternative 2 - Aufgabe 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[11]

<table>
<tr><td>a
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Speichern Sie die Koordinaten der Ortsvektoren der Punkte A(4|0|0), B(0|4|0) und C(0|0|4) unter geeigneten Variablen.
Speichern Sie auch die Gleichung der Ebene L_1, in der A, B und C liegen, als Funktion $l_1(x,y,z) := x + y + z = 4$. Die Punkte DEF liegen in der Ebene $l_2(x,y,z) := 2x + 2y + 2z = 5$.

$a:=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$
$l1(x,y,z):=x+y+z=4$ Fertig
$l2(x,y,z):=2\cdot x+2\cdot y+2\cdot z=5$ Fertig


Skizze nicht maßstabgerecht

$\mathrm{norm}(b-c)$ $4\cdot\sqrt{2}$
$\mathrm{norm}(a-b)$ $4\cdot\sqrt{2}$
$\mathrm{norm}(a-c)$ $4\cdot\sqrt{2}$
$g:=a+\frac{1}{4}\cdot(c-a)$ $\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$

Das Dreieck ABC ist gleichseitig, denn es ist $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 4\cdot\sqrt{2}$.

Wenn für den Punkt G auf der Seite $\overline{AC}$ gelten soll $|\overline{AG}|:|\overline{GC}| = 1:3$, dann muss $|\overline{AG}|$ ein Viertel von $|\overline{AC}|$ sein:
$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$
G hat die Koordinaten G(3|0|1).</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Ebenen L_1 und L_2 haben beide den Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Die Ebenen sind also parallel oder identisch. Da aber z. B. der Punkt A(4|0|0) nicht die Gleichung von L_2 erfüllt, sind sie nicht identisch, sondern echt parallel, also haben L_1 und L_2 keinen Punkt gemeinsam.

$l2(4,0,0)$ false</td></tr>
</table>

[11] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_17.pdf

c
(3 BE)

Lösung

Die Punkte B und E liegen in den Ebenen L_1 bzw. L_2, die beide den Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ haben.

Der Punkt E liegt auf der y-Achse, für ihn gilt x = z = 0. Da E außerdem in der Ebene L_2 liegt, muss y = 2,5 sein.

solve$(l2(0,y,0),y)$	$y=\frac{5}{2}$
$e:=\begin{bmatrix}0\\2.5\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2.5\\0\end{bmatrix}$
$e-b$	$\begin{bmatrix}0\\-1.5\\0\end{bmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0\end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, deshalb ist der Abstand von B zu E größer als der Abstand von L_1 und L_2.

Alternative Lösung:
Die zu L_1 und L_2 senkrechte Gerade g durch den Ursprung hat die Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sie schneidet die Ebenen L_1 und L_2 in den Punkten $P\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$ bzw. $Q\left(\frac{5}{6}\middle|\frac{5}{6}\middle|\frac{5}{6}\right)$.

solve$(l1(t,t,t),t)$	$t=\frac{4}{3}$
solve$(l2(t,t,t),t)$	$t=\frac{5}{6}$

$p:=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$
$q:=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$

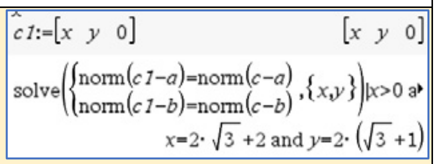
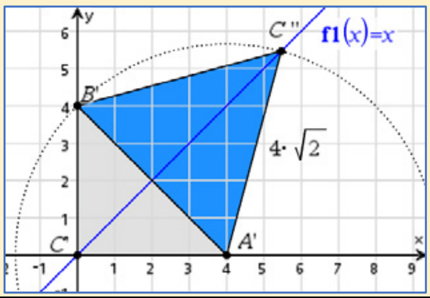
Der Abstand beider Ebenen entspricht dem Abstand von P und Q und beträgt $|\overline{PQ}| \approx 0{,}866$. Er ist kleiner als der Abstand von B und E mit $|\overline{BE}| = 1{,}5$.

norm$(e-b)$	1.5
norm$(p-q)$	0.866

d
(3 BE)

Lösung

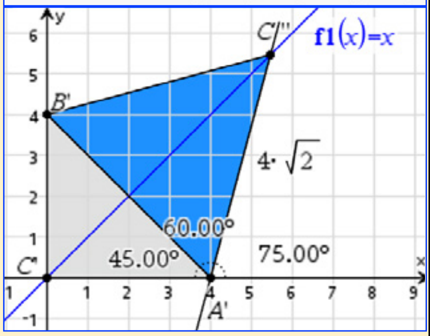
Die Größe des Winkels, den zwei Ebenen miteinander einschließen, entspricht der Größe des Winkels φ, den ihre Normalenvektoren miteinander einschließen. Es ist $\varphi \approx 54{,}74°$.

	Der Normalenvektor der xy-Ebene ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, von L_2 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 
e (4 BE)	
Lösung	Es sei O der Ursprung des Koordinatensystems. Betrachtet man die Pyramide OABC mit der Grundfläche OAB und der Höhe $\|\overline{OC}\| = 4$, dann hat die Grundfläche die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\|\overline{OA}\| = \|\overline{OB}\| = 4$. Das Volumen der Pyramide OABC kann dann angegeben werden durch $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 4$. Dies ist der erste Summand der angegebenen Formel. Analog kann der zweite Summand $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot k^2\cdot k$ interpretiert werden als Formel für das Volumen der Pyramide ODEF mit der Höhe $\|\overline{OF}\| = k$ sowie der Grundfläche ODE in der Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\|\overline{OD}\| = \|\overline{OE}\| = k$. Die Differenz beider Volumina gibt dann das Volumen des Körpers ABCDEF an. Der passende Wert für k ergibt sich z. B. aus der Länge der Strecke $\|\overline{OF}\| = k$. Da F die Koordinaten x = y = 0 hat, gilt mit der Gleichung von L_2: 2z = 5, also z = 2,5. Demzufolge hat k in diesem Sachzusammenhang den Wert k = 2,5.
f (4 BE)	
	Der Punkt C' muss in der xy-Ebene liegen, also C'(x,y,0) und von A und B den gleichen Abstand haben wie C.  $\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix}2+2\cdot\sqrt{3}\\2+2\cdot\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ Alternative Lösung 1: Man stelle sich das gleichseitige Dreieck ABC um die Seite $\overline{AB}$ in die xy-Ebene umgeklappt vor. Das Bilddreieck ABC" ist dann ebenfalls gleichseitig mit der Seitenlänge $4\cdot\sqrt{2}$. 

Die Koordinaten des Bildpunktes C“ von C können als Schnittpunkt des Kreises um den Punkt A(4|0|0) mit dem Radius $r = 4 \cdot \sqrt{2}$ und der Geraden y = x berechnet werden.

$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} y=x \\ (x-4)^2+y^2=(4\cdot\sqrt{2})^2 \end{cases},\{x,y\}\right)|x>0$

$x=2\cdot(\sqrt{3}+1)$ and $y=2\cdot(\sqrt{3}+1)$



Alternative Lösung 2:

Man stelle sich das gleichseitige Dreieck ABC um die Seite $\overline{AB}$ in die xy-Ebene umgeklappt vor. Das Bilddreieck ABC“ ist dann ebenfalls gleichseitig mit dem Innenwinkel bei A‘ von 60°. Das Dreieck A’B’C‘ ist rechtwinklig und gleichschenklig, deshalb ist der Innenwinkel bei A‘ in diesem Dreieck 45° groß. Die Gerade g durch die Punkte A‘ und C“ bildet dann mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von $180° - (45° + 60°) = 75°$. Eine Gleichung von g ist damit gegeben durch

$y = \tan(75°) \cdot (x - 4)$.

$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} y=x \\ y=\tan(75°)\cdot(x-4) \end{cases},\{x,y\}\right)|x>0$

$x=2\cdot(\sqrt{3}+1)$ and $y=2\cdot(\sqrt{3}+1)$

Die Koordinaten des Bildpunktes C“ von C können als Schnittpunkt der Geraden g und der Geraden y = x berechnet werden.

Alternative Lösung 3:

$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} y=x \\ (x-2)^2+(y-2)^2=(2\cdot\sqrt{6})^2 \end{cases},\{x,y\}\right)|x>0$

$x=2\cdot(\sqrt{3}+1)$ and $y=2\cdot(\sqrt{3}+1)$

Beim Umklappen des Dreiecks ABC beschreibt der Punkt C einen Kreis um M(2|2|0) mit dem Radius $r = 2 \cdot \sqrt{6}$.
Dieser Kreis schneidet die Gerade y = x im Punkt C“.

Alternative Lösung 4:

a:=$[4\ 0\ 0] \blacktriangleright [4\ 0\ 0]$ **b:=**$[0\ 4\ 0] \blacktriangleright [0\ 4\ 0]$
c:=$[0\ 0\ 4] \blacktriangleright [0\ 0\ 4]$

Mittelpunkt m: $m:=\frac{a+b}{2} \blacktriangleright [2\ 2\ 0]$ **Länge** $\operatorname{norm}(m) \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{2}$

Länge CM: $\operatorname{norm}(m-c) \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{6}$

Abstand des Punktes C' vom Ursprung:

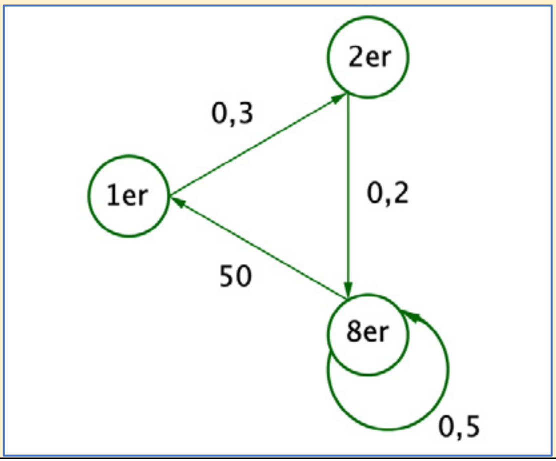
$\operatorname{norm}(m-c)+\operatorname{norm}(m) \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{2}$

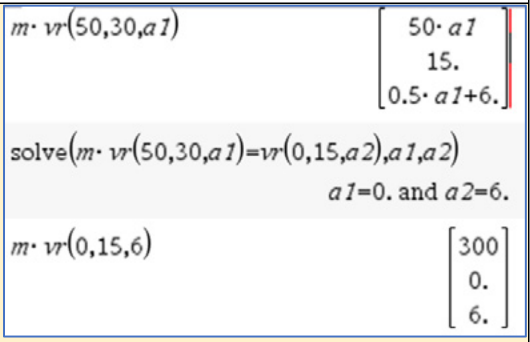
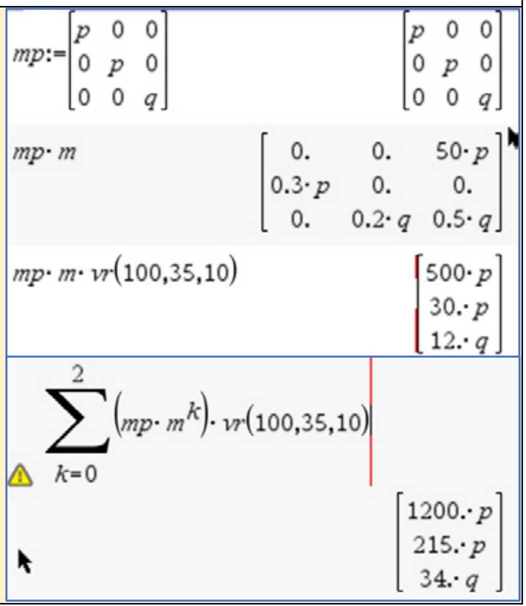
Wegen Symmetrie und Pythagoras gilt:

$\operatorname{solve}\left(2\cdot x^2=(\operatorname{norm}(m-c)+\operatorname{norm}(m))^2,x\right) \blacktriangleright x=-2\cdot\sqrt{3}-2$ or $x=2\cdot\sqrt{3}+2$

Analytische Geometrie/Lineare Algebra - erhöhtes Anforderungsniveau

Alternative 1 - Aufgabe 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[12]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Übergangsdiagramm 
b (2 BE)	
Lösung	Für die weiteren Berechnungen kann man sich zunächst die Übergangsmatrix und einen allgemeinen Startvektor definieren. Um die Aussage beurteilen zu können und nicht nur wahllos zu probieren, betrachtet man den allgemeinen Zustand des Vektors $\overrightarrow{vr}$ nach der 1. Stufe. Es ist einfach zu erkennen, dass z. B. für a = 0 die Gesamtzahl der Münzen kleiner wird. Ein mögliches Beispiel wird hier gezeigt, d. h. die Aussage ist falsch. $m:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ $vr(e,z,a):=\begin{bmatrix} e \\ z \\ a \end{bmatrix}$ $\quad$ *Fertig* $m\cdot vr(e,z,a)$ $\quad \begin{bmatrix} 50\cdot a \\ 0.3\cdot e \\ 0.2\cdot z+0.5\cdot a \end{bmatrix}$ $m\cdot vr(10,5,0)$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3. \\ 1. \end{bmatrix}$

c (3 BE)	
Lösung	Setzt man die gegebenen Daten für die erste und zweite Stufe in die Gleichung $M \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ a1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ a2 \end{pmatrix}$ ein und löst diese Gleichung, so erhält man a1 = 0 und a2 = 6. Berechnet man nun hiermit die Werte für die dritte Stufe, so lässt sich zeigen, dass die dargestellten Anzahlen auftreten können. 
d (3 BE)	
Lösung	Da die Übergangsmatrix dreimal auf den Startvektor angewendet wird, gibt der Vektor $\begin{pmatrix} 600 \\ 180 \\ 36 \end{pmatrix}$ die Verteilung der Münzenanzahl in der vierten Stufe an. Betrachtet wird dann der prozentuale Anteil der 8er Münzen in dieser Stufe, der 4 % beträgt.
e (5 BE)	
	Um die geforderten Bedingungen über die Anteile der Münzen in den einzelnen Stufen zu berücksichtigen, muss die Übergangsmatrix noch mit einer quadratischen Matrix multipliziert werden, die die beschriebenen Anteile enthält. Die Verteilung der Münzen nach den ersten drei Stufen kann mit Hilfe des Summenoperators oder auch schrittweise berechnet werden. 

	Weiterhin wird eine Matrix (im Bild mz) benötigt, die den Wert der einzelnen Münzen berücksichtigt. Da am Ende 300 Münzen mit einem Gesamtwert von 462 Punkten vorhanden sein sollen, muss die rechts angegebene Gleichung gelöst werden. Der gesuchte Anteil ist p = 20 %.	$mz:=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&8\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&8\end{bmatrix}$ $mz\cdot\begin{bmatrix}1200.\cdot p\\215.\cdot p\\34.\cdot q\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}1415.\cdot p+34.\cdot q\\1630.\cdot p+272.\cdot q\end{bmatrix}$ $\text{solve}\left(mz\cdot\begin{bmatrix}1200.\cdot p\\215.\cdot p\\34.\cdot q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300\\462\end{bmatrix},p,q\right)$ $p=0.2$ and $q=0.5$
2		
a (4 BE)		
Lösung	Es ist sinnvoll, alle gegebenen Ortsvektoren im CAS zu speichern. Dabei werden die Ortsvektoren A_k und B_k in Abhängigkeit vom Parameter k gespeichert.	$a(k):=\begin{bmatrix}0\\k-1\\0\end{bmatrix}$ *Fertig* $b(k):=\begin{bmatrix}2\cdot k+2\\k-1\\0\end{bmatrix}$ *Fertig* $c:=\begin{bmatrix}5\\6\\0\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}5\\6\\0\end{bmatrix}$
	Aufgrund der Skizze vermutet man, dass die Strecken $\overline{CD}$ *und* $\overline{A_kB_k}$ parallel sein könnten. Bestimmt man die zugehörigen Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{B_kA_k}$, so erkennt man, dass beide Vektoren sich nur in x-Richtung „bewegen“, also parallel sind.	$d-c$ $\quad\begin{bmatrix}-5\\0\\0\end{bmatrix}$ $a(k)-b(k)$ $\quad\begin{bmatrix}-2\cdot k-2\\0\\0\end{bmatrix}$
	Dies kann auch rechnerisch überprüft werden.	$\text{solve}(d-c=r\cdot(a(k)-b(k)),r)$ $\quad r=\frac{5}{2\cdot(k+1)}$
	Das Trapez ist ein Rechteck, wenn $\overline{CD} = \overline{A_kB_k}$ ist. Dies wird mit dem MMS berechnet. Es ergibt sich k = $\frac{3}{2}$.	$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}-2\cdot k-2\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\text{norm}\left(\begin{bmatrix}-5\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ $\quad 2\cdot\lvert k+1\rvert=5$ $\text{solve}(2\cdot\lvert k+1\rvert=5,k)\mid 0\leq k<7$ $\quad k=\frac{3}{2}$

<table>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Da sich der Punkt A_k nur auf der y-Achse bewegt und der Punkt S die y-Koordinate y = 0 hat, kann man den gesuchten Winkel im Dreieck SA_kO mittels trigonometrischer Beziehungen berechnen.

Es gilt: $\tan(60°) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OA_k}}$ mit $k \in [0; 7[$.

$\text{solve}\left(\tan(60°)=\frac{\text{norm}(s)}{\text{norm}(a(k))},k\right)|0\le k<7$
$k=4.4641$

Es ergibt sich k ≈ 4,5.

Lösungsvariante:

Der Winkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene kann auch vektoriell ermittelt werden.

Es gilt $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$, mit dem Richtungsvektor $\vec{m}$ der Geraden und einem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene. Da die Pyramide auf der xy-Ebene steht, gilt z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und für den Richtungsvektor gilt z. B.

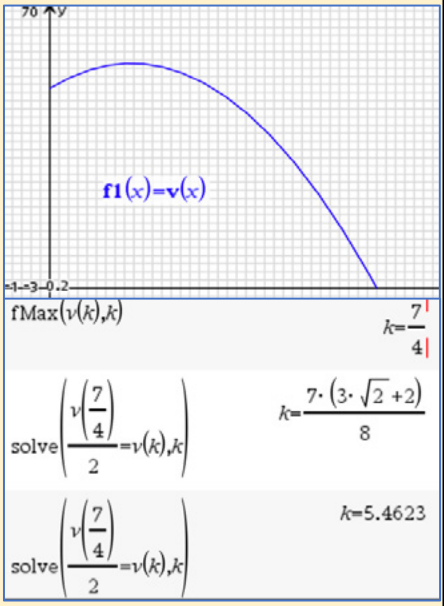
$\vec{m} = \overrightarrow{A_kS} = \begin{pmatrix}0\\1-k\\6\end{pmatrix}$.

Hiermit kann nun der Wert von k berechnet werden.

Aus $\sin(60°) = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$ folgt k ≈ 4,5.

$n:=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
$m:=s-a(k)$ $\begin{bmatrix}0\\-(k-1)\\6\end{bmatrix}$
$\text{solve}\left(\sin(60°)=\frac{\text{dotP}(m,n)}{\text{norm}(m)\cdot\text{norm}(n)},k\right)|0\le k<7$
$k=2\cdot\sqrt{3}+1$
$\text{solve}\left(\sin(60°)=\frac{\text{dotP}(m,n)}{\text{norm}(m)\cdot\text{norm}(n)},k\right)|0\le k<7$
$k=4.4641$</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Das Volumen der vierseitigen Pyramide kann in Abhängigkeit von k nach der Formel V(k) = $\frac{1}{3}A_g \cdot h$ berechnet werden. Da die Pyramide auf der Grundfläche steht und eine gerade Pyramide ist, gilt h = 6 (z-Koordinate von S). Die Grundfläche ist ein Trapez, dessen Fläche sich mit der Formel A = $\frac{a+c}{2} \cdot h$ berechnen lässt. Die beiden zueinander parallelen Seiten a und c entsprechen hier den Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{A_kB_k}$.
Die Trapezhöhe entspricht der Strecke $\overline{A_kD}$.

$h(k):=\text{norm}(d-a(k))$ Fertig
$\frac{\text{norm}(b(k)-a(k))+\text{norm}(d-c)}{6}\cdot h(k)$
$\frac{|k-7|\cdot(2\cdot|k+1|+5)}{6}$
$v(k):=|k-7|\cdot(2\cdot|k+1|+5)|0\le k<7$ Fertig</td></tr>
</table>

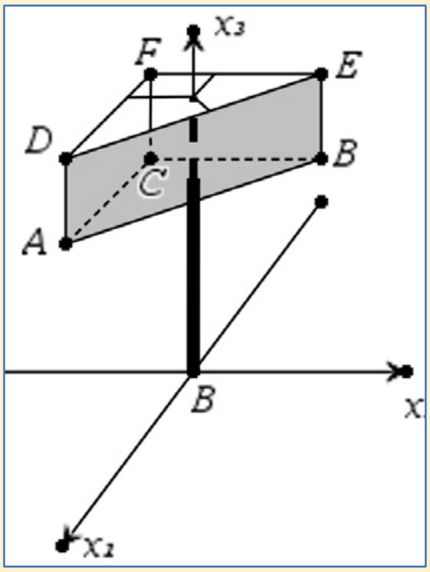
	Es ergibt sich (unter Beachtung der Intervallgrenzen) für das Volumen die Formel V(k) = $\|k-7\| \cdot (2 \cdot \|k+1\| + 5$. Eine Kontrolle ist im Grafikfenster möglich. Da $V(k_1) = 2V(k_2)$ gelten soll, darf $V(k_2)$ maximal halb so groß sein wie das maximale Volumen der Pyramide. Man bestimmt das maximal mögliche Volumen und bestimmt diejenige Stelle k_3, für die gilt $V(k_3) = \frac{1}{2}V(k_{\max})$. Man ermittelt $k_3 \approx 5{,}5$. Aufgrund des Monotonieverhaltens der Funktion V(k) gilt für das gesuchte Intervall $k_2 \in [k_3; 7[$ mit $k_3 \approx 5{,}5$. 

Alternative 2 - Aufgabe 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[13]

1	
a (4 BE)	

Lösung

Definieren Sie die Ortsvektoren der gegebenen Punkte A(5|–2|11), E(–2|5|15) und F(–2|–2|15) unter geeigneten Variablen auf dem MMS.
Da die Seitenflächen Rechtecke sind, lässt sich auch auf die Koordinaten von D, B und C schließen:
D(5|–2|15), B(–2|5|11) und C(–2|–2|11).
Für den Flächeninhalt des grau gefärbten Rechtecks gilt:
$A_R = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = 28 \cdot \sqrt{2} \approx 40\, m^2$.



$a:=\begin{bmatrix}5\\-2\\11\end{bmatrix}:e:=\begin{bmatrix}-2\\5\\15\end{bmatrix}:f:=\begin{bmatrix}-2\\-2\\15\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}-2\\-2\\15\end{bmatrix}$

$c:=\begin{bmatrix}-2\\-2\\11\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}5\\-2\\15\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}-2\\5\\11\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}-2\\5\\11\end{bmatrix}$

$\text{norm}(d-a)\cdot \text{norm}(b-a) \quad 28\cdot\sqrt{2}$

$\text{norm}(d-a)\cdot \text{norm}(b-a) \quad 39.5979797464$

Abbildung nicht maßstabsgerecht

Wenn die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen, dann muss z. B. gelten $\overrightarrow{FD} \circ \overrightarrow{FE} = 0$. Dies ist der Fall, also bilden die beiden anderen Rechteckflächen einen rechten Winkel an der Kante $\overline{FC}$.

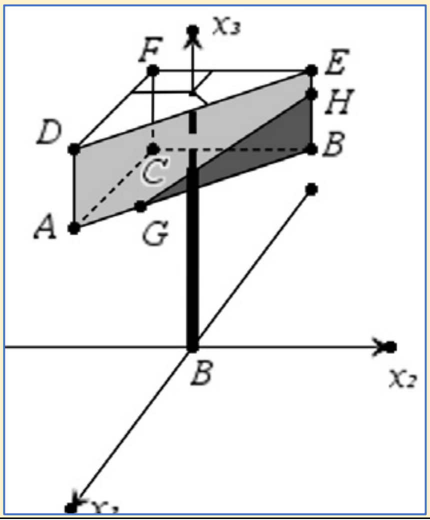
$\text{dotP}(d-f, e-f) \quad 0$

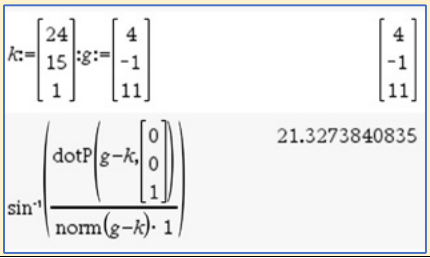
[13] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_2.pdf

b (3 BE)	
Lösung	Eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die grau gefärbte Werbetafel liegt, kann z. B. über die Normalengleichung $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ bestimmt werden, wobei gilt: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. $n{:=}\mathrm{crossP}(b-a,d-a) \quad \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{dotP}\left(n,\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-a\right)=0 \quad 28\cdot x+28\cdot y-84=0$ $\dfrac{28\cdot x+28\cdot y-84=0}{28} \quad x+y-3=0$ Die Ebene hat die Gleichung $x_1 + x_2 = 3$. Der Vergleich mit der gegebenen Ebenengleichung $a \cdot x_1 + a \cdot x_2 = b$ liefert a = 1 und b = 3.
c (5 BE)	
Lösung	Der Mittelpunkt M der oberen Kante der grau dargestellten Werbefläche hat wegen $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{2}$ die Koordinaten $M\left(\frac{3}{2}\middle\vert\frac{3}{2}\middle\vert 15\right)$. Der Mast, genauer die x_3–Achse, durchstößt die Fläche DEF im Punkt N(0|0|15). $m{:=}\dfrac{d+e}{2} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 15 \end{bmatrix}$ $n{:=}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ $\mathrm{dotP}(m-n,e-d) \quad 0$ Die Strecke $\overline{NM}$ ist wegen $\overrightarrow{NM} \circ \overrightarrow{DE} = 0$ senkrecht zur Kante $\overline{DE}$. Die Strecke $\overline{NM}$ hat deshalb den kürzesten Abstand vom Punkt N zur Kante $\overline{DE}$. Da die Werbefläche parallel zum Mast (zur x_3–Achse) ist, hat auch kein anderer Punkt dieses Rechtecks einen kürzeren Abstand zu P. Alternativer Lösungsweg: siehe IQB-Musterlösung.

<table>
<tr><td>d
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Definieren Sie die Ortsvektoren der Punkte K(24|15|1) und G(4|–1|11) auf dem MMS.
Der Winkel, den die Sichtlinie mit der Horizontalen bildet, kann über den Sinus des Winkels, den der Vektor $\overrightarrow{KG}$ mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der x_1x_2–Ebene bildet, berechnet werden:

$$\varphi = arcsin\left(\frac{\overrightarrow{KG}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{KG}\right|\cdot 1} \approx 21{,}3°\right)$$

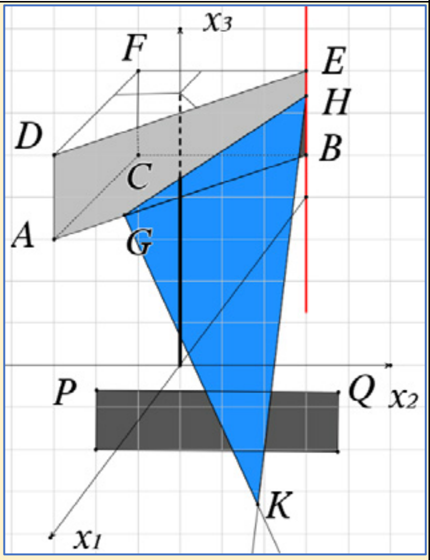




</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>e
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Die Abbildung veranschaulicht (nicht maßstabgerecht) die Situation. Die Mauer mit der oberen Kante $\overline{PQ}$ schränkt das Sichtfeld des Kindes (K) ein. Die blau eingezeichnete Ebene, die durch die Punkte K, P und Q bestimmt wird, beschreibt einen Teil der unteren Grenze dessen, was das Kind von der Konstruktion sehen kann. Die Koordinaten des Punktes H können dann über den Schnittpunkt der Geraden durch B und E (rot eingezeichnet) und der Ebene KPQ berechnet werden.



Definieren Sie die Ortsvektoren der Punkte P(20|–5|3) und Q(20|25|3) auf dem MMS.
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene KPQ auf, z. B. durch
$\left(\overrightarrow{KP} \times \overrightarrow{KQ}\right) \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OK}\right) = 0.$
Eine Gleichung der Geraden durch B und E wird durch $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BE}$ bestimmt. Der Schnittpunkt beider Punktmengen muss dann der Punkt H sein.

$$p:=\begin{bmatrix}20\\-5\\3\end{bmatrix}:q:=\begin{bmatrix}20\\25\\3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}20\\25\\3\end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\text{crossP}(p-k,q-k),\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-k\right)=0 \qquad -60\cdot x-120\cdot z+1560=0$$

$$gg(s):=b+s\cdot(e-b) \qquad \text{Fertig}$$

$$gg(s) \qquad \begin{bmatrix}-2\\5\\4\cdot s+11\end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(-60\cdot -2-120\cdot(4\cdot s+11)+1560=0,s) \qquad s=\frac{3}{4}$$

$$gg(s)|s=\frac{3}{4} \qquad \begin{bmatrix}-2\\5\\14\end{bmatrix}$$

Der Punkt H hat die Koordinaten H(–2|5|14).

Alternative Lösung:

Die Ebene E_1, die durch K, P und Q bestimmt ist, schneidet die Ebene E_2, die durch A, B und D festgelegt ist, in einer Geraden s_1. Die Gerade s_1 schneidet die Gerade s_2 durch B und E im Punkt H und die Gerade s_3 durch A und B im Punkt G. Die Berechnung von G ist nicht verlangt,

</td></tr>
</table>

bietet aber eine gute Kontrollmöglichkeit durch den Vergleich mit den gegebenen Koordinaten.

Die notwendigen Rechnungen werden dem MMS überlassen:

$e1(r,s):=a+r\cdot(d-a)+s\cdot(b-a)$ *Fertig*

$e2(t,u):=k+t\cdot(p-k)+u\cdot(q-k)$ *Fertig*

$\text{solve}(e1(r,s)=e2(t,u),r,s,t,u)$

$r=\frac{5\cdot \mathbf{c1}-14}{8}$ and $s=\frac{5\cdot \mathbf{c1}-13}{7}$ and $t=\frac{\mathbf{c1}+6}{4}$ an▸

$e1(r,s)|r=\frac{5\cdot \mathbf{c1}-14}{8}$ and $s=\frac{5\cdot \mathbf{c1}-13}{7}$

$$\begin{bmatrix} 18-5\cdot \mathbf{c1} \\ 5\cdot \mathbf{c1}-15 \\ \frac{5\cdot \mathbf{c1}}{2}+4 \end{bmatrix}$$

$s1(v):=\begin{bmatrix} 18-5\cdot v \\ 5\cdot v-15 \\ \frac{5\cdot v}{2}+4 \end{bmatrix}$ *Fertig*

$s2(w):=b+w\cdot(e-b)$ *Fertig*

$\text{solve}(s1(v)=s2(w),v,w)$ $\quad v=4$ and $w=\frac{3}{4}$

$s1(4)$ $\quad \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$

Der Punkt H hat die Koordinaten H(-2|5|14).

$s3(v):=a+v\cdot(b-a)$ *Fertig*

$\text{solve}(s1(t)=s3(v),t,v)$ $\quad t=\frac{14}{5}$ and $v=\frac{1}{7}$

$s1\left(\frac{14}{5}\right)$ $\quad \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$

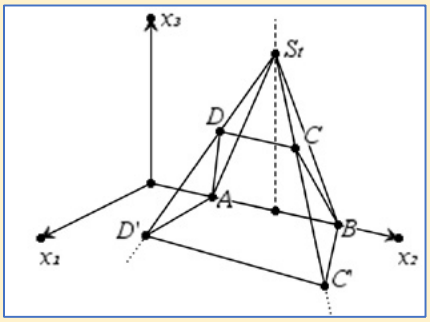
Für den Punkt G wurden die Koordinaten G(4|-1|11) ermittelt. Sie stimmen überein mit den im Aufgabentext gegebenen Koordinaten.

f (2 BE)	
	Schreibt man den Ortsvektor der „Fußballpunkte“ auf, so ergibt sich $\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} 32 - 8t \\ 5 \\ -5t^2 + 6{,}5t + 0{,}3 \end{pmatrix}$. Da die x_2–Koordinate konstant ist, haben alle Punkte den Abstand 5 von der x_1x_3–Ebene. Die Gleichung der Ebene L, in der die „Fußballpunkte“ liegen, ist $x_2 = 5$.
g (3 BE)	
Lösung	Hier ist nur eine Beschreibung des Vorgehens verlangt: Die Gleichung $32 - 8t = 20$ hat eine Lösung t_1. Setzt man diese Lösung in die x_3 –Koordinate ein, so trifft der Ball auf die Mauer genau dann, wenn $0 < x_3(t_1) < 3$ ist, also für $0 < -5t_1^2 + 6{,}5t_1 + 0{,}3 < 3$. Eine Rechnung ist nicht erforderlich. Sie wird hier nur der Vollständigkeit halber angegeben. solve$(32-8\cdot t=20,t)$ $t=\frac{3}{2}$ $-5\cdot t^2+6.5\cdot t+0.3\vert t=\frac{3}{2}$ -1.20000000000 Der Ball trifft nicht die Mauer, da t > 0 sein muss.

Alternative 2 - Aufgabe 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[14]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Speichern Sie die Ortskoordinaten der gegebenen Punkte unter geeigneten Variablen ab.

$a:=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}0\\9\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}2\\8\\4\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix}$
$s(t):=\begin{bmatrix}0\\6\\t\end{bmatrix}$ *Fertig*

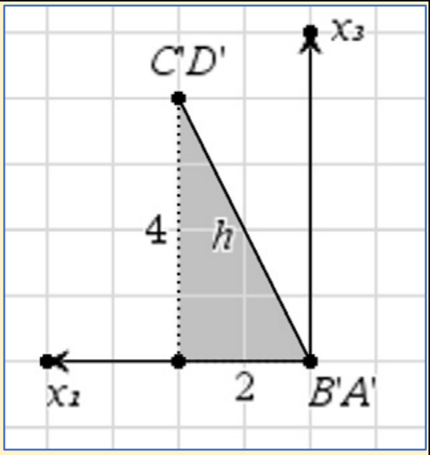
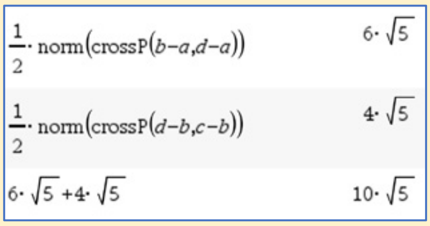
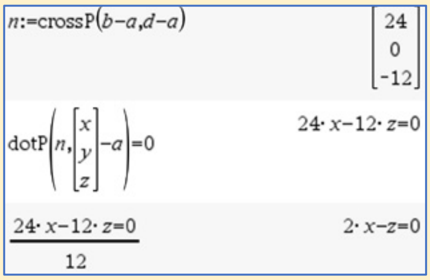


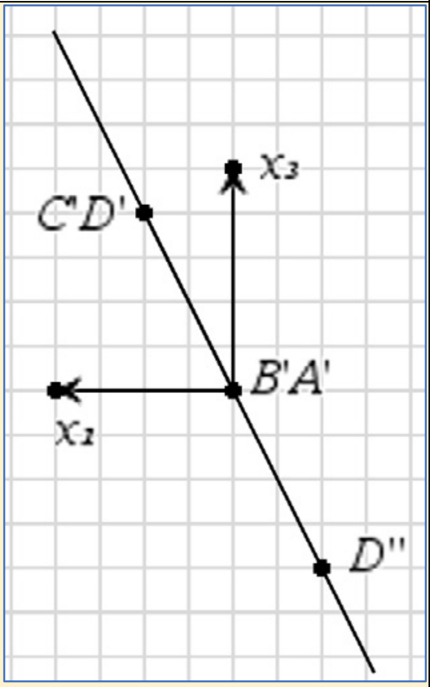
Den Punktkoordinaten lässt sich entnehmen:
A und B liegen auf der x_2–Achse und haben den Abstand 9 – 3 = 6 voneinander.
C und D liegen auf einer Parallelen zur x_2–Achse in der Höhe 4. Sie haben den Abstand 8 – 4 = 4 voneinander.
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind also nicht gleich lang, aber parallel zueinander.

$\text{norm}(d-a)$ $\sqrt{21}$
$\text{norm}(c-b)$ $\sqrt{21}$
$\text{dotP}(b-a,d-a)$ 6

Von gleicher Länge sind die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten: $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = \sqrt{21}$.
Da für das Skalarprodukt gilt: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 6 \neq 0$, schließen die benachbarten Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$ keinen rechten Winkel ein.
Aus dem bisher Nachgewiesenen folgt, dass ABCD ein gleichschenkliges Trapez, aber kein Rechteck ist.
</td></tr>
</table>

[14] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_3.pdf

b (3 BE)	
Lösung	Schaut man in Richtung der x_2–Achse auf die x_1x_3–Ebene, so ergibt sich nebenstehende Seitenansicht. Die Höhe h des Trapezes ABCD kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden: $h = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{5}$ Der Flächeninhalt des Trapezes ist $A_{Trapez} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \cdot h$ $A_{Trapez} = \frac{4+6}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{5}.$  Alternative Lösung mithilfe des Vektorprodukts: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\rvert + \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} \right\rvert = 10 \cdot \sqrt{5}.$ 
c (3 BE)	
Lösung	Der Normalenvektor der Ebene E kann z. B. mit dem Vektorprodukt ermittelt werden: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. Damit wird über die Normalengleichung die Koordinatengleichung der Ebene E bestimmt: $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0.$  Die Gleichung der Ebene E ist $2x_1 - x_3 = 0$.

d (2 BE)	
Lösung	Schaut man wie bei Teilaufgabe b) in Richtung der x_2–Achse auf die x_1x_3–Ebene, so ergibt sich nebenstehende Seitenansicht mit der Schnittgeraden zwischen der Ebene E und der x_1x_3–Ebene. Alle Punkte, die auf dieser Geraden symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, haben den Wert $x_2 = 0$. Die x_1–Koordinaten dieser symmetrisch zum Ursprung liegenden Punkte haben den gleichen Betrag und entgegengesetzte Vorzeichen. Für die x_3–Koordinaten gilt $x_3 = 2 \cdot x_1$. Demzufolge haben auch die x_3–Koordinaten dieser Punkte den gleichen Betrag und entgegengesetzte Vorzeichen. Für die Lösung dieser Teilaufgabe genügt die Angabe zweier solcher Punkte, z. B. (2|0|4) und (–2|0|–4). 

e
(5 BE)

Lösung

Die Lotgerade ℓ von S_t auf die Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n}$ von E als Richtungsvektor und den Punkt S_t als Stützvektor. Die Menge aller Lotgeraden bildet eine Ebene L, die senkrecht auf E steht und mit E eine Schnittgerade g_1 bildet. Aus den Schnittpunkten von g_1 mit den Geraden g_2 durch C und D sowie der Geraden g_3 durch A und B lässt sich auf die gesuchten Werte von t schließen.

Lotgerade/ senkrechte Lotebene L:

$l(t,r):=s(t)+r\cdot n$	*Fertig*
$l(t,r)$	$\begin{bmatrix} 24\cdot r \\ 6 \\ t-12\cdot r \end{bmatrix}$

Einsetzen in die Gleichung der Ebene E: $2x_1 - x_3 = 0$.

$2\cdot 24\cdot r-(t-12\cdot r)=0$	$60\cdot r-t=0$
$\text{solve}(60\cdot r-t=0,r)$	$r=\frac{t}{60}$

Schnittgerade g_1 von L und E:

$g1(t):=s(t)+\frac{t}{60}\cdot n$	*Fertig*

Gerade g_2 und Schnitt von g_1 mit g_2:

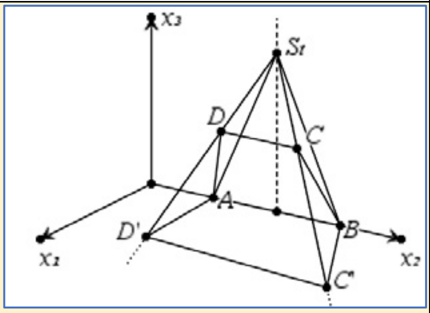
$g2(r):=c+r\cdot(d-c)$	*Fertig*
$\text{solve}(g1(t)=g2(r),t,r)$	$t=5 \text{ and } r=\frac{1}{2}$

Gerade g_3 und Schnitt von g_1 mit g_3:

$g3(r):=a+r\cdot(b-a)$	*Fertig*
$\text{solve}(g1(t)=g3(r),t,r)$	$t=0 \text{ and } r=\frac{1}{2}$

Die untere der parallelen Trapezseiten wird für t = 0 geschnitten.
Die obere der parallelen Trapezseiten wird für t = 5 geschnitten.
Für 0 < t < 5 liegen die Lotfußpunkte im Inneren des Trapezes.

Alternative Lösung:
Eine Gleichung der Geraden, die durch S_t verläuft und senkrecht zu E steht, ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS_t} + r\cdot\vec{n}$. Mit $2x_1 - x_3 = 0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $\left(\frac{2}{5}t|6|\frac{4}{5}t\right)$. Dieser liegt nur für $0 < \frac{2}{5}t| < 2$, also für 0 < t < 5 im Inneren des Vierecks.

f (5 BE)	
	Die Gleichungen I und II liefern denjenigen Wert von t, für den das Viereck $ABC_t'D_t'$ ein Rechteck ist. Begründung: Die Gleichungen I und II liefern denjenigen Wert von t, für den $\overline{BC_t'}$ senkrecht zu $\overline{AB}$ ist. Da das Viereck ABCD symmetrisch bezüglich der Ebene mit der Gleichung $x_2 = 6$ ist und S_t in dieser Ebene liegt, ist dann auch $\overline{AD_t'}$ orthogonal zu $\overline{AB}$ und außerdem ist $\overline{C_t'D_t'}$ parallel zu $\overline{AB}$.
g (3 BE)	
Lösung	 Fall 1: Geht t von oben gegen 4 (Achtung, in der Aufgabenstellung ist t > 4 vorausgesetzt!), liegt S_t fast in der Höhe der Punkte C und D. Dann verlaufen die Strahlen von S_t durch C und D fast parallel zur x_1x_2 −Ebene, d. h. die Grundfläche der Pyramide wird unendlich groß. Wegen t > 4 ist die Höhe der Pyramide immer größer als 4. Fall 2: Geht t gegen unendlich, wird die Höhe beliebig groß. Die Punkte D‘ und C‘ rücken dann immer näher an die x_2 −Achse heran, sie sind aber stets mehr als zwei Einheiten von ihr entfernt, weil sie durch C und D verlaufen. Der Inhalt der Grundfläche ist deshalb stets größer als der des Vierecks mit den Eckpunkten A, B, (2|8|0) und (2|4|0). Das Volumen wird sowohl für $t \to 4^+$ als auch für $t \to \infty$ unendlich groß. Diese Eigenschaft hat nur der Graph G_2, der hier als Lösung anzugeben ist. Alternativer Lösungsweg: Die Gerade h_1 beschreibt die Gerade von s(t) durch D: $h1(t,r):=d+r\cdot(d-s(t))$ *Fertig* $h1(t,r)$ $\begin{bmatrix} 2\cdot r+2 \\ 4-2\cdot r \\ r\cdot(4-t)+4 \end{bmatrix}$ Die Gerade h_1 schneidet die x_1x_2 −Ebene im Punkt D‘ = D_1:

$$\text{solve}(r\cdot(4-t)+4=0,r) \qquad r=\frac{4}{t-4}$$

$$d1(t):=h1(t,r)|r=\frac{4}{t-4} \qquad \textit{Fertig}$$

$$(d1(t))^{T} \qquad \begin{bmatrix}\frac{8}{t-4}+2 & 4-\frac{8}{t-4} & 0\end{bmatrix}$$

Analog wird C‘ = C_1 ermittelt:

$$h2(t,r):=c+r\cdot(c-s(t)) \qquad \textit{Fertig}$$

$$h2(t,r) \qquad \begin{bmatrix}2\cdot r+2\\ 2\cdot r+8\\ r\cdot(4-t)+4\end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(r\cdot(4-t)+4=0,r) \qquad r=\frac{4}{t-4}$$

$$c1(t):=h2(t,r)|r=\frac{4}{t-4} \qquad \textit{Fertig}$$

$$(c1(t))^{T} \qquad \begin{bmatrix}\frac{8}{t-4}+2 & \frac{8}{t-4}+8 & 0\end{bmatrix}$$

Der Inhalt der Grundfläche der Pyramide wird bestimmt:

$$ff1(t):=\frac{1}{2}\cdot \text{norm}(\text{crossP}(a-d1(t),c1(t)-d1(t))) \qquad \textit{Fertig}$$

$$ff2(t):=\frac{1}{2}\cdot \text{norm}(\text{crossP}(b-c1(t),a-c1(t))) \qquad \textit{Fertig}$$

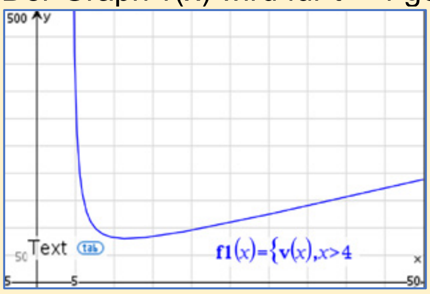
$$fg(t):=ff1(t)+ff2(t) \qquad \textit{Fertig}$$

Das Volumen v(t) der Pyramide wird berechnet:

$$v(t):=\frac{1}{3}\cdot fg(t)\cdot \text{norm}(s(t)) \qquad \textit{Fertig}$$

$$v(t) \qquad 2\cdot\sqrt{t^2+36}\cdot\left|\frac{t}{t-4}\right|+\frac{4\cdot t^2\cdot\sqrt{t^2+36}}{3\cdot(t-4)^2}$$

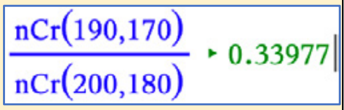
Der Graph v(x) wird für t > 4 gezeichnet:



Nur der in der Aufgabe gezeichnete Graph G_2 hat diesen Verlauf.

Stochastik - grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[15]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Da drei verschieden Röstgrade probiert werden sollen, ergibt sich die Anzahl der Möglichkeiten aus $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
b (3 BE)	
Lösung	Die Aufgabe entspricht der Frage im Spiel „6 aus 49“, einen Sechser zu haben. Es wird demzufolge die Lottoformel genutzt. Bezogen auf die gegebenen Daten gilt: $P(B) = \frac{\binom{10}{10}\binom{190}{170}}{\binom{200}{180}} \approx 0{,}34$ 
2	
a (4 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Säcke, die den Qualitätsanforderungen entsprechen“, ist binomialverteilt und es gilt $X \sim B_{50;0.96}$ bzw. $B_{25;0.96}$. Beide Untersuchungsschritte können in der Berechnung zusammen betrachtet werden: Schritt 1 Schritt 2 $P_{50}(X \geq 48) + P_{50}(X = 47) \cdot P_{25}(X \geq 24) \approx 0{,}81$  Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vertrag abgeschlossen wird, beträgt ca. 81 %.

[15] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_24.pdf

b
(2 BE)

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens ein Sack nicht den Qualitätsanforderungen entspricht und der Vertrag damit abgeschlossen wird, ist bei 15 Säcken größer als bei 25. Damit könnte die kleinere Anzahl von Säcken im möglichen zweiten Schritt für den Großhändler vorteilhaft sein.
Eine rechnerische Kontrolle ist leicht möglich.

```
binomCdf(50,0.96,48,50)+binomPdf(50,0.96,47)·binomCdf(15,▸
                                                  0.83893
```

c
(2 BE)

Lösung

Das Ereignis $M_1 \cap \overline{M_2}$ bedeutet:
Der Sack enthält mindestens 60 kg Kaffee, weist aber zu viele Verunreinigungen auf.

d
(3 BE)

Lösung

Es bietet sich an, die gegebenen Daten in eine Vierfeldertafel einzutragen.

	M_2	$\overline{M_2}$	
M_1			**0,01**
$\overline{M_1}$	0,03	**0,96**	0,99
			1

Mit den Bezeichnungen
M_1: „Der Kaffee weist zu viele Verunreinigungen auf."
M_2: „Der Sack enthält weniger als 60 kg Kaffee.

lassen sich aus dem Text zunächst die Wahrscheinlichkeiten $P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = 0{,}96$ und $P(M_1) = 0{,}01$ eintragen. Damit gilt auch $P(\overline{M_1}) = 0{,}99$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgewählte Sack weniger als 60 kg Kaffee enthält (M_2), aber nicht zu viele Verunreinigungen aufweist ($\overline{M_1}$), ist damit $P(\overline{M_1} \cap M_2) = 0{,}03$.

e
(4 BE)

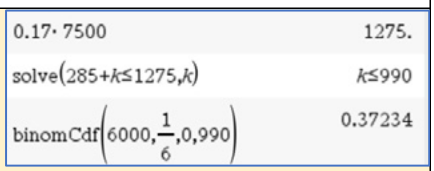
Lösung

Da die beiden Ereignisse M_1 und M_2 stochastisch unabhängig voneinander sind, gilt z. B. $P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = P(\overline{M_1}) \cdot P(\overline{M_2})$. Hiermit folgt $P(\overline{M_2}) = \frac{0{,}96}{0{,}99} = \frac{32}{33}$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann $P(M_2) = \frac{1}{33}$.
Variante: Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt auch:
$P(M_2) = P(M_2|\overline{M_1}) = \frac{P(\overline{M_1} \cap M_2)}{\overline{M_1}} = \frac{0{,}03}{0{,}99} = \frac{1}{33}$.

Aufgabe 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[16]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Bei jedem Wurf gibt es nur zwei mögliche Ergebnisse. Dabei tritt das Ergebnis „4" (Treffer) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auf, da zwei der sechs Seiten des Würfels mit dieser Zahl beschriftet sind und die Wahrscheinlichkeit für alle Seiten des Würfels mit $\frac{1}{6}$ gleich groß ist. Jeder Wurf ist unabhängig von den anderen Würfen.
b (2 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Zahl 4 bei 30 Würfen“ ist binomialverteilt und es ist $X \sim B_{30;\frac{1}{3}}$. Es gilt P(X > 15) ≈ $0{,}02$. $\text{binomCdf}\left(30,\frac{1}{3},16,30\right)$ 0.0188
c (2 BE)	
Lösung	Bei neun von 30 Würfen wird eine „4" erzielt, unter anderem beim letzten Wurf (oder ersten Wurf).
d (3 BE)	
Lösung	Der Erwartungswert für die Häufigkeit der Zahl 4 ist E(X) = $30 \cdot \frac{1}{3} = 10$. Damit folgt für den Erwartungswert für die Summe der erzielten Zahlen E(Y) = $10 \cdot 4 + (30 - 10) \cdot 2 = 80$.
e (2 BE)	
Lösung	Der Term hat die Struktur für die Berechnung eines Gegenereignisses $P(E) = 1 - P(\bar{E})$. Das Gegenereignis zum Ereignis E: „Das Spiel ist spätestens nach dem dritten Wurf entschieden“, ist $\bar{E}$: Das Spiel ist frühestens nach dem vierten Wurf entschieden. Dies tritt ein, wenn entweder dreimal hintereinander eine „4“ geworfen wird – dafür gilt die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ – oder wenn dreimal hintereinander eine „2“ geworfen wird – dafür gilt die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

[16] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/grundlegend/2023_M_grundlege_25.pdf

	Damit gilt P(E) = 1 – $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$.
f (3 BE)	
Lösung	Da der Würfel höchstens viermal geworfen werden soll, müssen folgende Fälle betrachtet werden: 1. Die Person, die beginnt (Person A), verliert nach dem zweiten Wurf: A muss eine „2“ werfen und Person B eine „4“. Dafür gilt P(2) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$. 2. Die Person, die beginnt (Person A), verliert nach dem dritten Wurf: A muss eine „4“ werfen und B danach auch. Anschließend muss A eine „2“ werfen. Dafür gilt P(3) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$. 3. Die Person, die beginnt (Person A), verliert nach dem vierten Wurf: A muss eine „2“ werfen, B danach auch und A im dritten Wurf noch eine „2“. Danach muss B eine „4“ werfen, um das Spiel zu beenden. Es gilt P(4) == $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$. Insgesamt ergibt sich P(E) = P(2) + P(3) + P(4) = $\frac{32}{81}$.
2	
a (2 BE)	
Lösung	Für die relative Häufigkeit der Zahl 3 gilt $h_3 = \frac{1500-(735+285)}{1500} \approx 0{,}32$.
b (4 BE)	
Lösung	 Da bereits 1500 der 7500 Würfe erfolgt sind, müssen nur noch die übrigen 6000 Würfe betrachtet werden. Es dürfen höchstens 1275 Sechsen geworfen werden (17 % von 7500). Da schon bei den ersten 1500 Würfen 285 Sechsen gefallen sind, bleiben für die restlichen 6000 Würfe maximal 990 Sechsen übrig. Die Zufallsgröße Y: Anzahl der Zahl „6“ bei 6000 Würfen ist binomialverteilt und es ist $Y \sim B_{6000;\frac{1}{6}}$. Die Berechnung ergibt P(Y≤990)≈ 0,37.

Stochastik - erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[17]

1
(3 BE)

Lösung

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der erzielten ungeraden Zahlen“ ist binomialverteilt und es gilt: $X \sim B_{20;0.5}$.

Ereignis A

Es soll P(X = 7) berechnet werden.

$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^3$$

nCr(20,7)·(0.5)^7·(0.5)^13	0.074
binomPdf(20,0.5,7)	0.074

Man kann mit dieser Formel bzw. auch mit der im MMS definierten Funktion *binomPdf(n,p,k)* den gesuchten Wert berechnen. Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 7,4 %.

Ereignis B

$$P(8 \le X \le 12) = \sum_{k=8}^{12} \binom{20}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{20-k}$$

Man kann mit dieser Formel bzw. auch der im MMS definierten Funktion *binomCdf(n,p,a,e)* den gesuchten Wert berechnen.

$\sum_{k=8}^{12}$ (nCr(20,k)·(0.5)^k·(0.5)^(20−k))	0.737
binomCdf(20,0.5,8,12)	0.737

Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 73,7 %.

2
(5 BE)

Lösung

Betrachtet man die möglichen Ergebnisse für das zweimalige Drehen des Glücksrades, kann man die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse C: „Die Summe ist kleiner als 4“ und D: „Das Produkt ist 2 oder 3“ ermitteln.

	0	1	2	3	4...9
0	C	C	C	C	
1	C	C	C; D	D	
2	C	C; D			
3	C	D			
4...9					

Da der Ergebnisraum 100 gleichwahrscheinliche Ergebnisse umfasst, ist $P(C) = \frac{10}{100} = 0{,}1$ und $P(D) = \frac{4}{100} = 0{,}04$.

Für stochastische Unabhängigkeit muss gelten:
$P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$.

[17] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_10.pdf

Es gilt aber

$P(C \cap D) = \frac{2}{100} = 0{,}02 \neq P(C) \cdot P(D) = 0{,}004.$

Damit sind die beiden Ereignisse C und D stochastisch voneinander abhängig.

3

a
(2 BE)

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Drehen des Glücksrades keine „0“ zu erzielen, beträgt $\frac{9}{10}$. Damit kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, beim viermaligen Drehen keine „0“ zu erhalten.
$P(A) = 0{,}9^4 \approx 0{,}66.$

b
(4 BE)

Lösung

Der Erwartungswert für das Ereignis X: „Höhe der Auszahlung“ ergibt sich mit

x_i	0	61	62	...	69
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1		0,1

zu E(X) = 0,1(61 + 62 + ...+ 69) = 58,5.
Da 58,5 < 60 ist, sollte der Spieler das Spiel besser beenden.

c
(4 BE)

Lösung

Geht man zunächst von zwei aufeinander folgenden Werten für n aus, dann muss die Gleichung $5n \cdot 0{,}9^n = 5(n+1) \cdot 0{,}9^{n+1}$ erfüllt sein.
Diese Gleichung hat als einzige Lösung n = 9. Nachrechnen zeigt, dass die Erwartungswerte für n = 9 und n = 10 wirklich gleich sind.
Wenn es aber drei aufeinanderfolgende Werte von n mit gleichem Erwartungswert gäbe, dann müssten n = 9 und n = 10 dazugehören und außerdem n = 8 oder n = 11 denselben Erwartungswert wie n = 9 und n = 10 haben. Dies ist aber nicht der Fall (siehe Screenshot).
Die Aussage ist also richtig.

$\text{solve}\left(5 \cdot n \cdot (0.9)^n = 5 \cdot (n+1) \cdot (0.9)^{n+1}, n\right) \quad n=9.$

$5 \cdot n \cdot (0.9)^n|n=9 \quad 17.4339$

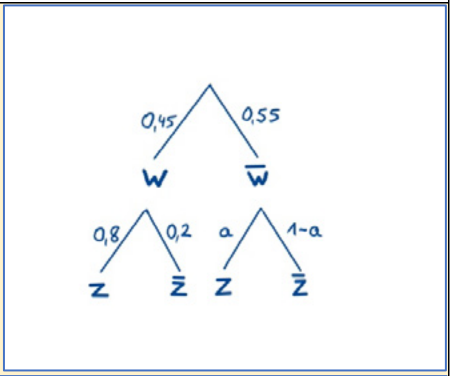
$5 \cdot n \cdot (0.9)^n|n=10 \quad 17.4339$

$5 \cdot n \cdot (0.9)^n|n=8 \quad 17.2187$

$5 \cdot n \cdot (0.9)^n|n=11 \quad 17.2596$

4	
a (3 BE)	
Lösung	Die ermittelte relative Häufigkeit h = $\frac{12}{80}$ = 0,15 ist größer als 0,1 und liegt innerhalb des Konfidenzintervalls. Damit ist die rechte Grenze des Intervalls auf jeden Fall größer als 0,1. Das angegebene Ergebnis der 80 Würfe steht bei der gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit in Einklang mit der vorgegebenen Annahme, da dieser Wert innerhalb des 95 %- Konfidenzintervalls liegt. Alternative: Die Berechnung des Konfidenzintervalls zeigt, dass die obere Grenze (≈0,244) größer als 0,1 ist. Konfidenzintervall berechnen $\mathbf{n}:=80 \blacktriangleright 80 \quad \mathbf{h}:=\frac{12}{80} \blacktriangleright \frac{3}{20} \quad \mathbf{c}:=1.96 \blacktriangleright 1.96$ $\text{solve}\left((\mathbf{h}-p)^2=\frac{\mathbf{c}^2\cdot p\cdot(1-p)}{\mathbf{n}},p\right)$ $\blacktriangleright p=0.088 \text{ or } p=0.244$
b (4 BE)	
Lösung	Für die 95 %-Sicherheitswahrscheinlichkeit gilt die Betragsungleichung $\lvert h-p\rvert \leq 1{,}96\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$ mit p = 0,1 und h = 0,15 folgt $\text{solve}\left(\lvert 0.15-0.1\rvert \leq 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.1\cdot 0.9}{n}},n\right)$ $0.<n\leq 138.3$ Für $0 \leq n \leq 138$ wäre die Doppelungleichung erfüllt, also ist n = 139 der kleinste Wert, für den diese Doppelungleichung nicht erfüllt ist.

Aufgabe 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[18]

1	
a (4 BE)	
Lösung	Baumdiagramm Berechnung von a: Es gilt P(Z) = 0,778, d. h. $0{,}45 \cdot 0{,}8 + 0{,}55 \cdot a = 0{,}778$ Es ergibt sich a = 0,76.  solve(0.45· 0.8+0.55· a=0.778,a) a=0.76
b (2 BE)	
Lösung	Es sind die Wahrscheinlichkeiten $P(W \cap Z)$ und $P(\overline{W} \cap Z)$ unter der Bedingung a = 0,7 gesucht. $P(W \cap Z)$ = 0,45 · 0,8 = 0,36 $P(\overline{W} \cap Z)$ = 0,55 · 0,7 = 0,385 Damit gilt $P(W \cap Z) < P(\overline{W} \cap Z)$. Für a = 0,7 würde es demzufolge weniger weibliche als nicht weibliche Personen geben, die mit der Urlaubsreise zufrieden waren.

[18] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2023/abitur/pools2023/mathematik/erhoeht/2023_M_erhoeht_B_11.pdf

c (3 BE)	
Lösung	Für den Wert von a = 0,8 ist der Anteil derjenigen, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren, unter den nicht weiblichen Personen ebenso groß wie unter den weiblichen. Eine Kontrolle durch Rechnung zeigt die Richtigkeit der Überlegung: Für stochastische Unabhängigkeit muss gelten: $P(W \cap Z) = P(W) \cdot P(Z)$ $P(W \cap Z) = 0{,}45 \cdot 0{,}8 = 0{,}36 = 0.45 \cdot (0{,}45 \cdot 0{,}8 + 0{,}55 \cdot a)$ Es ergibt sich a = 0,8 $\text{solve}(0.45 \cdot (0.45 \cdot 0.8+0.55 \cdot a)=0.36,a)$ $a=0.8$
d (3 BE)	
Lösung	Wenn a größer wird, dann wird der Anteil der unzufriedenen nicht weiblichen Personen (1 – a) kleiner. Da der Anteil der unzufriedenen weiblichen Personen konstant bleibt, steigt damit der Anteil der unzufriedenen Frauen unter allen Unzufriedenen.
2	
a (4 BE)	
Lösung	Die Wahrscheinlichkeit für einen Strandkorb ist $1 - (8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-6}) = 0{,}999127$ Da 0,999127 > 1 – 0,001 ist die Aussage wahr. Die Gleichung zur Berechnung des Erwartungswertes $\text{solve}(0.999127 \cdot x+200 \cdot 8 \cdot 10^{-4}+500 \cdot 5 \cdot 10^{-5}+1000 \cdot 2 \cdot 10^{-5}+10000 \cdot 3 \cdot 10^{-6}=0.435,x)$ ▸ $x=0.20017$ liefert $x \approx 0{,}20$, d. h. der Wert des Sachgewinns beträgt etwa 20 Cent.

b
(4 BE)

Lösung

Die Zufallsgröße X: „Person erhält zwei Strandkörbe angezeigt“, kann als binomialverteilt angesehen werden, es gilt: $X \sim B_{80000;0.0008}$.
Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 80000 \cdot 0{,}0008$ = 64.

Mit dem Ansatz $P(64 - c \leq X \leq 64 + c) \geq 0{,}8$ kann man durch systematisches Probieren den Wert für c ermitteln.
Das kleinstmögliche c, damit das Intervall mindestens 80 % umfasst, ist c = 10.

$\text{binomCdf}(80000, 8 \cdot 10^{-4}, 64-c, 64+c)\vert c=9$	0.76565
$\text{binomCdf}(80000, 8 \cdot 10^{-4}, 64-c, 64+c)\vert c=10$	0.81141

c
(5 BE)

Der Fehler zweiter Art kann auftreten, wenn p < 0,02 gilt, beispielsweise für p = 0,015, aber H_0 aufgrund des Testergebnisses nicht abgelehnt wird. Für diesen Wert von p liegt der Graph für n_2 oberhalb des Graphen für n_1. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, das Gewinnspiel irrtümlich zu verlängern, für n_2 kleiner als für n_1.

Hierzu ein illustrierendes Beispiel:

Wir betrachten 2 Tests:

Test 1 n = 1000 Test 2 n = 2000

binomCdf(1000,0.02,0,12)	0.0376
binomCdf(1000,0.02,0,13)	0.06423
binomCdf(2000,0.02,0,29)	0.04171
binomCdf(2000,0.02,0,30)	0.05984

Verwerfungsbereiche:

$V_1 = \{0; 1; \ldots; 12\}$ $V_2 = \{0; 1; \ldots; 29\}$

Um den Fehler 2. Art zu berechnen (H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_0 falsch ist. Es wird also die bedingte Wahrscheinlichkeit

P(H_0 wird nicht abgelehnt| H_0 ist falsch) gesucht.), nehmen wir an, dass p = 0,15 ist.

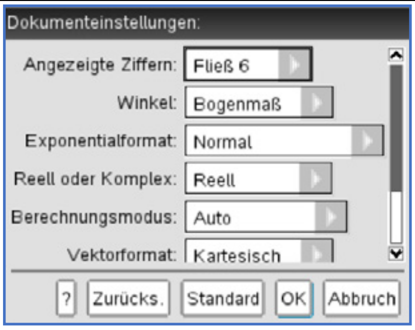
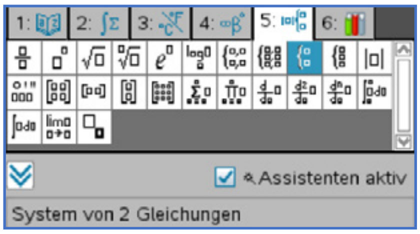
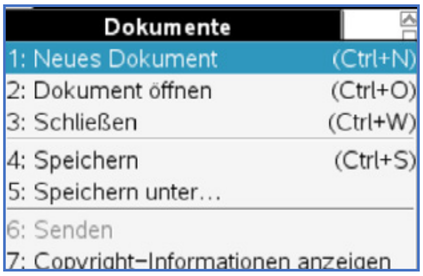
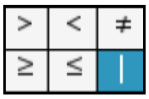
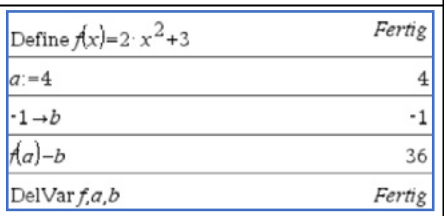
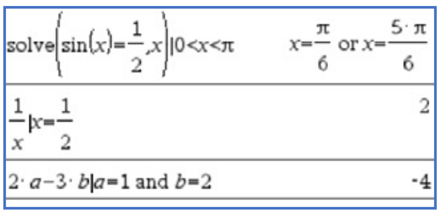
binomCdf(1000,0.015,13,1000)	0.73427
binomCdf(2000,0.015,30,2000)	0.52483

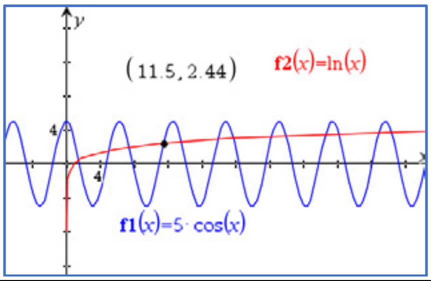
Wir erhalten $\beta_1 \approx 0{,}73$ bzw. $\beta_2 \approx 0{,}52$.

	Bei größerem Stichprobenumfang ist für das Unternehmen also das Risiko, durch eine Verlängerung des Gewinnspiels finanzielle Verluste zu erleiden, geringer. Gleichzeitig sind aber die Kosten für die Durchführung des Tests höher. Damit könnte sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen nur lohnen, wenn die zusätzlichen Kosten für den größeren Stichprobenumfang verhältnismäßig gering wären.

Kompetenzen im Umgang mit TI-Nspire™ CX CAS

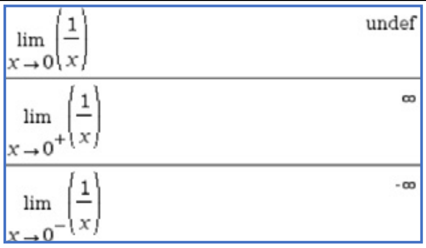
Nachstehend werden zusammenfassend einige grundlegende Kompetenzen im Umgang mit dem CAS-Rechner TI-Nspire™ CX CAS dargestellt. Sie erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Der Schüler kann	
– Einstellungen vornehmen, u. a.: • Winkelmaß (Grad- und Bogenmaß), • angezeigte Ziffern, • Helligkeit des Displays, – das Betriebssystem aktualisieren, – den Prüfungsmodus herstellen, – den Ladezustand überprüfen. – den Katalog und die Vorlagen nutzen. – Dokumente • anlegen, • speichern, • aufrufen, • löschen, • in Probleme und Seiten gliedern.	  
– Variablen und Funktionen definieren und löschen. – den Bedingungsoperator (WITH-Operator) zur Einschränkung von Definitionsbereichen, zum Ersetzen von Variablen u. ä. verwenden. (Zweitbelegung von ⊟) 	 

– Terme • berechnen, • umformen, • ausmultiplizieren, • faktorisieren, • in unechte Brüche zerlegen. – das Summenzeichen verwenden.	$\sqrt[3]{0.001}$ $\quad 0.1$ $10^{-99}\cdot 1.\text{E}99$ $\quad 1.$ $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ $\quad a^2+a\cdot b+b^2$ $\text{expand}\left((a+b)^3\right)$ $\quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$ $\text{factor}\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)$ $\quad (a+b)^3$ $\text{expand}\left(\frac{4\cdot x^2+1}{x+1}\right)$ $\quad \frac{5}{x+1}+4\cdot x-4$ $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)$ $\quad \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$
– Gleichungen/Ungleichungen/ Gleichungssysteme mit dem *solve*-Befehl lösen und dabei – die Anzeigen des Rechners richtig interpretieren. – Gleichungen und Ungleichungen mit *nSolve* näherungsweise lösen. (sinnvollen Startwert verwenden) – Gleichungen mit grafischen Verfahren lösen.	$\text{solve}\left(2\cdot x^2-2\cdot x=4,x\right)$ $\quad x=-1 \text{ or } x=2$ $\text{solve}\left(x^2-4<0,x\right)$ $\quad -2<x<2$ $\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x+y=2\end{cases},x,y\right)$ $\quad x=\frac{3}{2} \text{ and } y=\frac{1}{2}$ $\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=2\end{cases},x,y\right)$ $\quad \text{false}$ $\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=1\end{cases},x,y\right)$ $\quad x=\boldsymbol{c1}+1 \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$ $\text{solve}(\sin(x)=0,x)$ $\quad x=\boldsymbol{n2}\cdot\pi$ $\text{nSolve}\left(\sin(x)=e^{-x},x,3\right)$ $\quad 3.09636$ $\text{nSolve}\left(\sin(x)=e^{-x},x,7\right)$ $\quad 9.4247$ 
– Ableitungen von Funktionen ermitteln. – bestimmte und unbestimmte Integrale von Funktionen bestimmen.	$\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\sin(x)\right)$ $\quad x^2\cdot\cos(x)+2\cdot x\cdot\sin(x)$ $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \frac{2}{x^3}$ $\frac{d}{da}\left(b\cdot e^{-2\cdot a}\right)$ $\quad -2\cdot e^{-2\cdot a}\cdot b$ $\int\left(x\cdot\ln(x)\right)dx$ $\quad \frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$ $\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx$ $\quad 9$

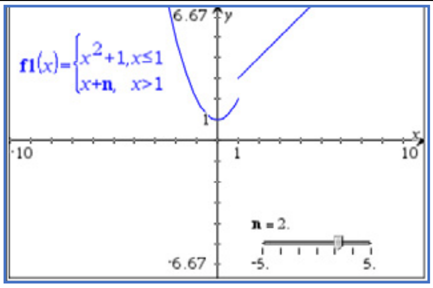
<table>
<tr><td>
– Grenzwerte von Funktionen ermitteln.

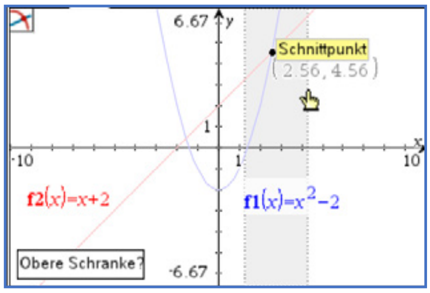
– den Definitionsbereich von Termen/Funktionen ermitteln.

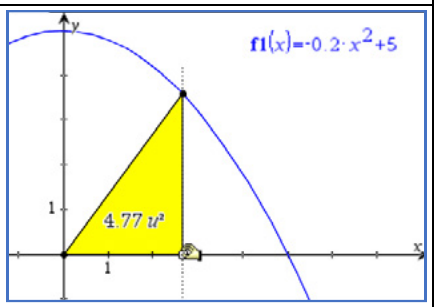
– Volumen von Rotationskörpern ermitteln.
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>
– Graphen zeichnen und dabei ggf.

geeignete Fenstereinstellungen vornehmen,
Wertetabellen anzeigen,
stückweise definierte Funktionen darstellen,
Funktionenscharen darstellen,
das Menü Graphen analysieren nutzen,
Schieberegler verwenden.

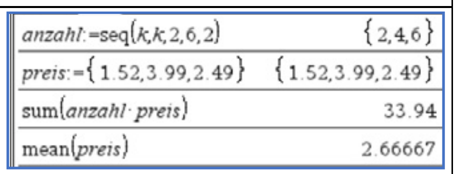
</td><td>




</td></tr>
<tr><td>
– einfache geometrische Objekte konstruieren.
– den Zugmodus nutzen.
– Größen messen.
</td><td>


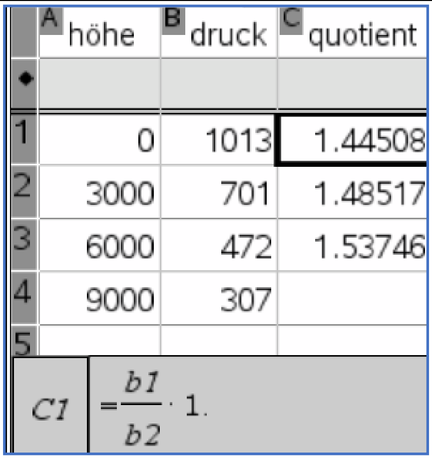
</td></tr>
<tr><td>
– Listen

definieren,
auswerten.

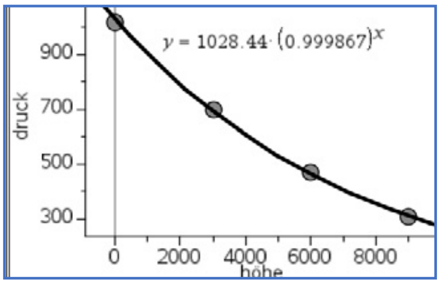
</td><td>


</td></tr>
</table>

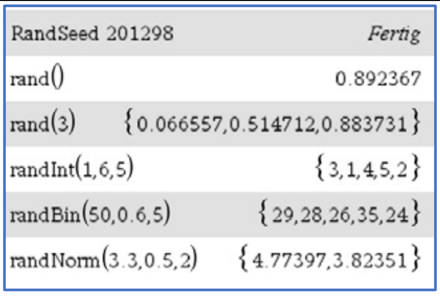
- Tabellen füllen.
- Spalten mit Listen verknüpfen.
- Operationen auf Spalten bzw. Zellen anwenden.



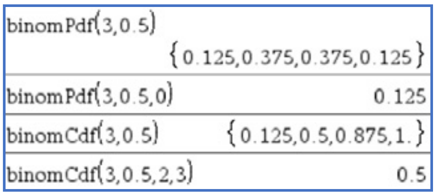
- Diagramme in *Data&Statistics* erstellen.
- Daten mit Regression analysieren.



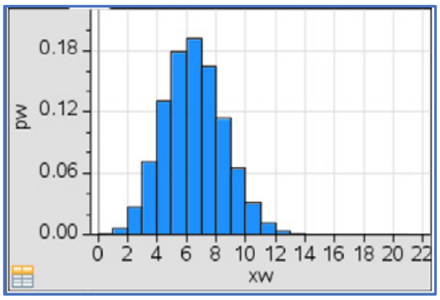
- Zufallszahlen erzeugen.

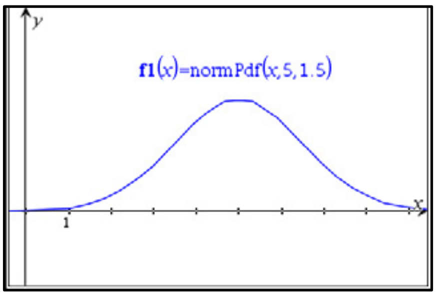


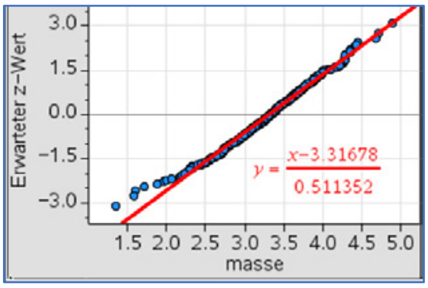
- Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen.



- binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen graphisch darstellen.





– Berechnungen im Zusammenhang mit normalverteilten Zufallsgrößen rationell durchführen.	$\text{normCdf}(-\infty,0,0,1)$ → 0.5 $\text{invNorm}(0.8,4,0.5)$ → 4.42081 $\text{nSolve}(\text{invNorm}(0.6,m,0.4)=2,m)$ → 1.89866
– ein Normalwahrscheinlichkeits-diagramm erstellen und beurteilen	
– Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren eingeben. – mit Vektoren rechnen – den Betrag eines Vektors ermitteln. – das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.	$[1\ 2\ 3]\to a$ → $[1\ 2\ 3]$ $b:=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $a:=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$ $2\cdot a+b-0.2\cdot c$ → $\begin{bmatrix}5.1\\-5.2\end{bmatrix}$ $\text{solve}(a=k\cdot c,k)$ → $k=-2.$ $\text{solve}(a=k\cdot b,k)$ → false $\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ → $\sqrt{30}$ $\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ → 5.47723 $a:=[1\ 0\ 0]:b:=[0\ 1\ 0]$ → $[0\ 1\ 0]$ $\text{dotP}(a,b)$ → 0 $\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\cdot\text{norm}(b)}\right)$ → $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ ▸DD → $90°$
– das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.	$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ → $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

– Geradengleichungen der Form – $\vec{x} = \overrightarrow{p_0} + t \cdot \vec{a}$ als Variable speichern und damit arbeiten.	$g(t):=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ Fertig $g(1)$ $\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$ $\text{solve}\left(\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}=g(t),t\right)$ false
– die gegenseitige Lage von Geraden bzw. Geraden und Koordinatenebenen bestimmen.	$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix},t,s\right)$ $t=\frac{-2}{7}$ and $s=\frac{-1}{7}$
– Abstand Punkt – Gerade berechnen.	$p1:=\begin{bmatrix}6\\-6\\14\end{bmatrix}: g(t):=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ Fertig $\text{fMin}(\text{norm}(p1-g(t)),t)$ $t=4$ $\text{norm}(p1-g(t))\vert t=4$ 8.94427
– den Abstand windschiefer Geraden berechnen.	$h(t):=\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:g(s):=\begin{bmatrix}4\\7\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ Fertig $v1:=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:v2:=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $d(t,s):=h(t)-g(s)$ Fertig $\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}(v1,d(t,s))=0\\\text{dotP}(v2,d(t,s))=0\end{cases},\{t,s\}\right)$ $s=-1$ and $t=1$ $\text{norm}(d(1,-1))$ 3
– Ebenengleichungen in Parameterform als Variable speichern und damit arbeiten.	$e(r,s):=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$ Fertig $e(1,1)$ $\begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$ $\text{solve}(g(t)=e(r,s),r,s,t)$ $r=-1$ and $s=0$ and $t=-3$
– Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform erstellen.	$n:=\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=0$ $x+z=0$

– Matrizen erstellen und mit Matrizen arbeiten.	$m:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $m\cdot\begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 86. \\ 81. \\ 63. \end{bmatrix}$ $m\cdot m^{-1} \quad \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & -1.\mathrm{E}{-14} \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$

T³ Teachers Teaching with Technology

Netzwerk
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

Fortbildungen
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

Materialien
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr

Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:
www.t3deutschland.de I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

T3 Europe

TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE


sin(φ)
cos
$= y_p$
2 sin²(x)