Andreas Möckli

Reibung

Ausgangssituation

Eine Masse m wird entlang einer Horizontalebene mit der Kraft F gezogen:

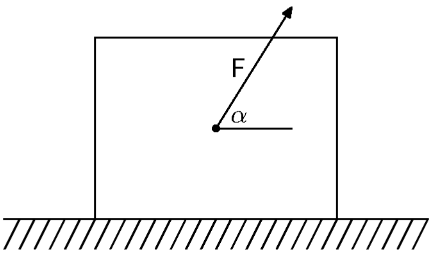

Abb. 1

Die resultierende Kraft ist horizontal, da die Bewegung horizontal verläuft. Die Grundfrage lautet, bei welchem Winkel α diese Kraft am grössten wird, wenn die Reibungskraft berücksichtigt wird.
Insgesamt ergeben sich folgende Fragestellungen:

a. Bei welchem Winkel α wird die resultierende Horizontalkraft am grössten?
b. Was passiert mit dem Anstellwinkel α, wenn der Gleitreibungskoeffizient μ zunimmt und die resultierende Horizontalkraft maximal bleiben soll?
c. Was passiert mit der horizontalen Maximalkraft, wenn der Reibungskoeffizient μ zunimmt ?
d. Was passiert mit der Bewegung, wenn die Zugkraft F grösser als die Gewichtskraft G ist ?

Sofern nichts anderes vermerkt wird, verwenden wir in den folgenden Beispiele die Werte F = 20 N, m = 10 kg und μ = 0.1.

Lösungsidee

Es sei F_H die resultierende Horizontalkraft. Sie setzt sich aus der Horizontalkomponente der Zugkraft F und der Reibungskraft F_R zusammen. Die Kraft F_R ist zur Horizontalkomponente der Kraft F entgegengesetzt gerichtet. Es gilt:

(1) $F_H = F \cdot \cos(\alpha) - F_R$

Die Normalkraft F_N des Bodens ist vom Betrag her nicht gleich der Gewichtkraft $G = m \cdot g$, da noch die Vertikalkomponente der Kraft F dazukommt. D.h.:

(2) $F_N = G - F \cdot \sin(\alpha)$

Die Reibungskraft F_R ist abhängig von F_N und dem Reibungskoeffizienten μ. Das ergibt:

(3) $F_R = F_N \cdot \mu$

Man setzt die Gleichung (2) in Gleichung (3) und schliesslich in Gleichung (1) ein. Für F_H ergibt sich folgender Ausdruck:

(4) $F_H = F \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot F \cdot \mu - m \cdot g \cdot \mu$

Frage a.

Man gibt die Funktionsgleichung in den Editor ein und bestimmt das Maximum graphisch, unter Verwendung der obigen Parameterwerte ($0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le 12$).

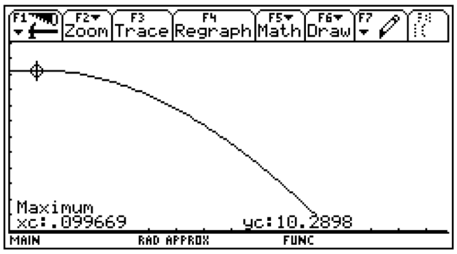

Abb. 2

Das Maximum der Horizontalkomponente wird für $\alpha_{Radiant} = 0.0997$ erreicht. Der Winkel α in Grad beträgt 5.7°. Das Maximum kann auch bestimmt werden, indem man die erste Ableitung von F_H nach α bildet (Gl. 4). Der Taschenrechner bietet Hilfe mit nSolve:
nSolve(*d*(20·cos(α)+20·0.1·sin(α) -9.81·10·0.1,α)=0,α)

Frage b.

Man variiert den Reibungskoeffizienten μ. Die Vermutung liegt nahe, dass der Winkel α zunimmt, wenn der Reibungskoeffizient μ wächst. Wird der Winkel α grösser, so vergrössert sich auch die Vertikalkomponente der Zugkraft F. Dieser Umstand bewirkt eine Verringerung der Normalkraft F_N, weshalb auch die Reibungskraft F_R kleiner wird. Diese Vermutung wird im Folgenden bestätigt. Der Befehl seq leistet uns hier vorzügliche Hilfe:
seq(nSolve(*d*(20·cos(α)+20·sin(α)·μ-9.81·10·μ,α)=0, α),μ,0.1,0.5,0.1)

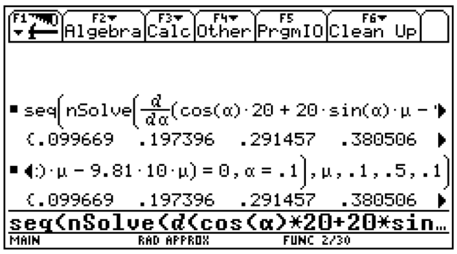

Abb. 3

Um den Winkel, der zur maximalen Horizontalkomponente der resultierenden Kraft führt, direkt zu berechnen, leiten wir F_H gemäss der Funktionsgleichung (4) nach α ab:

(5) $F'_H(\alpha) = -\sin(\alpha) \cdot F + \cos(\alpha) \cdot F \cdot \mu$

Setzt man die obige Ableitung gleich 0, so erhält man:

(6) $\tan(\alpha) = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan(\mu)$

Der Anstellwinkel α wird mit Zunahme des Reibungskoeffizienten μ grösser. Dieser Zusammenhang ist verständlich, da der Einfluss der

Reibung immer markanter wird und durch die Vertikalkomponente der Kraft F verringert wird.

Frage c.

Setzt man die Gleichung (6) in Gleichung (4) ein, so erhält man:

(7) $F_H = F \cdot \cos(\arctan(\mu)) + \sin(\arctan(\mu)) \cdot F \cdot \mu - m \cdot g \cdot \mu$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen vereinfachen. Der Taschenrechner verwandelt die rechte Seite direkt in

(8) $F_H = F \cdot (1 + \mu^2)^{0.5} - m \cdot g \cdot \mu$

Die folgende Abbildung stellt die Maximalkraft F_H in Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten μ dar, unter Verwendung der obigen Parameterwerte. Setzen wir die Variable m auf 10 (mit 10->m) und geben wir y1(x) gemäss (8) im Funktionseditor ein:

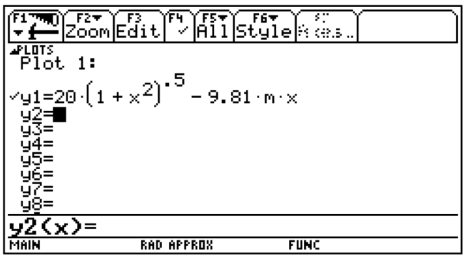

Abb. 4

so resultiert für 0 ≤ x ≤ 0.5 und 0 ≤ y ≤ 20 die Graphik

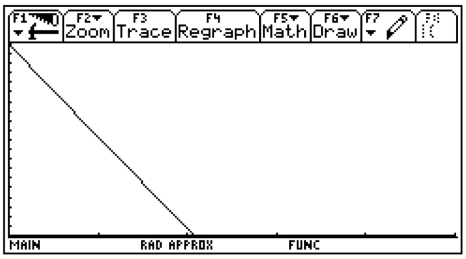

Abb. 5

Man variiert die Masse m und speichert die Massen (10 kg, 5 kg, 1kg, 0.5 kg) in m als eine Liste ab:

{ 10, 5, 1, 0.5 } -> m

Daraus resultieren für 0 ≤ x ≤ 2 und 0 ≤ y ≤30 die Graphen

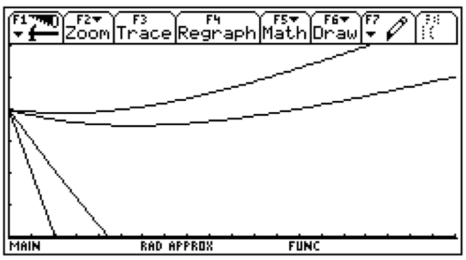

Abb. 6

Man sieht, dass die Kurven für die Massen 10 kg und 5 kg die x-Achse schneiden. Es gibt offensichtlich eine obere Grenze für μ, oberhalb welcher keine Fortbewegung mehr möglich ist.

Betrachtet man die beiden Graphen für die Massen 1 kg und 0.5 kg, so nimmt die maximale Horizontalkraft F mit Zunahme des Reibungskoeffizienten μ zunächst ab, erreicht ein Minimum und nimmt anschliessend wieder zu. Dass die maximale Horizontalkraft bei Zunahme des Reibungskoeffizienten abnimmt, ist verständlich. Verblüffend und zunächst unerklärlich ist hingegen der anschliessende Anstieg.

Wir betrachten den Kurvenverlauf für eine Masse von 1 kg und bestimmen deren Minimum. Den Graph erhalten wir, indem wir 1->m eingeben.

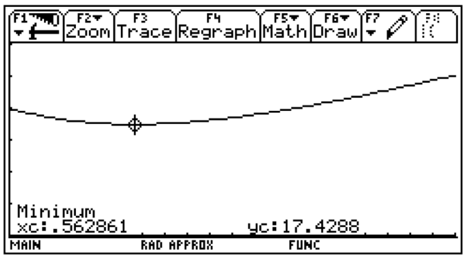

Abb. 7

In Abb. 7 bedeutet immer noch:

x : Reibungskoeffizient

y : Maximum der Horizontalkraft F_H

Die horizontale Maximalkraft hat das Minimum bei einer Reibungszahl μ von 0.56. Dieser Umstand tritt ein bei einem Anstellwinkel α von 0.51 (29.4°).

Es drängen sich folgende Fragen auf :

1. Welche Bedeutung hat das Minimum und wie lässt sich das Minimum physikalisch interpretieren?
2. Gibt es einen formalen Zusammenhang zwischen Minimum und physikalischer Situation?

Frage d.

Physikalische Situation

Ist die Vertikalkomponente der Zugkraft F grösser als die Gewichtskraft G = m · g, so hebt, nach einer anfänglichen Kippbewegung, die Masse m von der Unterlage ab. Die Bedingung lautet:

(9) $G < \sin(\alpha) \cdot F$

Es folgt sin (α) = G / F, somit α = arcsin (G / F). Ist die Kraft F grösser als die Gewichtskraft G, so gibt es einen reellen Winkel α zwischen 0 und π/2, der diese Bedingung erfüllt. Ist der Anstellwinkel grösser als dieser Grenzwinkel, hebt der Körper ab.

Formaler Zusammenhang

Leitet man die Gleichung (8) nach dem Reibungskoeffizienten μ ab, so erhält man:

$$F'_H(\mu) = F \cdot \mu / (\mu^2+1)^{0.5} - G$$

Um das Extremum zu bestimmen, setzt man die erste Ableitung gleich Null und löst nach dem Reibungskoeffizienten μ auf. Es ergibt sich:

$$\mu = G / (F^2 - G^2)^{0.5}$$

Für μ ergibt sich nur ein reeller Wert, wenn die Zugkraft F grösser als die Gewichtskraft G ist. (Die

negative Lösung für μ vernachlässigt man, da hier ein negativer Reibungskoeffizient keinen Sinn ergibt.)
Die Gleichung $F'_H (\mu) = 0$ lässt sich auch schreiben als :

$$G = F \cdot \mu / (\mu^2 + 1)^{0.5}$$

Da $\mu = \tan (\alpha)$ nach Gl. (6), folgt
$G = F \cdot \tan (\alpha) / (1 + \tan^2(\alpha))^{0.5} = F \cdot \sin (\alpha)$
Dieser Ausdruck ist der gleiche wie bei der Beschreibung der physikalischen Situation. Offensichtlich sind die Werte der Maximalkraft physikalisch richtig bis zum Extremum. Nachher hat man mathematische Werte, die physikalisch keinen Sinn mehr ergeben.

Nullstelle

Wenn das Minimum von $F_H (\mu)$ oberhalb der x-Achse liegt, dann hat $F_H (\mu)$ keine reellen Nullstellen. Diese Tatsache kann man zeigen, indem man die Nullstelle der Funktionsgleichung 8 bestimmt. Löst man die Gleichung

$$F \cdot (1 + \mu^2)^{0.5} - G \cdot \mu = 0$$

nach der Reibungszahl μ auf, so erhält man

$$\mu^2 = F^2 / (G^2 - F^2)$$

Da μ positiv sein muss, gilt

$$\mu = F / (G^2 - F^2)^{0.5}$$

Für μ ergibt sich nur eine reeller Wert, wenn die Gewichtskraft G grösser als die Zugkraft F ist. Dieser Zusammenhang ist korrekt und mit der physikalischen Situation verträglich. Ist die Zugkraft F grösser als die Gewichtskraft G, so kann man α so wählen, dass die Masse m in eine Kippbewegung gerät und schliesslich von der Horizontalebene abhebt.

Der Autor:

Andreas Möckli
Evangelische Mittelschule Schiers
anmoeckli@bluewin.ch