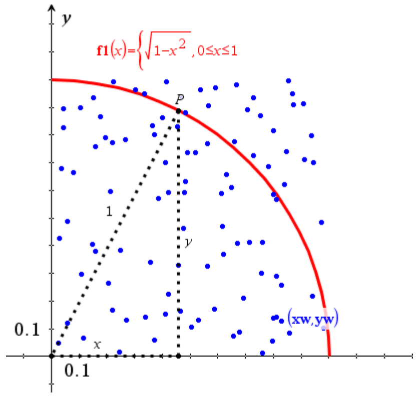
Näherungswerte für die Zahl π bestimmen (Monte-Carlo-Methode) mit dem TI-30X Plus MathPrint

Das bekannte Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl π mithilfe von Zufallszahlen kann auch mit dem wissenschaftlich-technischen Taschenrechner (WTR) TI-30X Plus MathPrint™ realisiert werden.

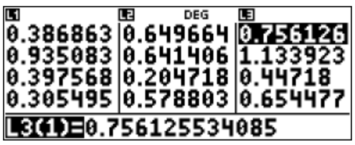
Mathematischer Hintergrund[1]:



- Der Vierteleinheitskreis hat den Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}$.
- Alle Punkte P(x; y), die auf dem Viertelkreisbogen oder im Inneren des Viertelkreises liegen, erfüllen nach dem Satz des Pythagoras die Ungleichung $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$.
- Es werden n Paare von Zufallszahlen x und y mit $0 \leq x \leq 1$ bzw. $0 \leq y \leq 1$ mit dem WTR (Anweisung **rand**) erzeugt.
- Es wird für jedes der n Zahlenpaare (x; y) geprüft, ob die Ungleichung $\sqrt{x^2+y^2} > 1$ erfüllt ist. Die Anzahl m dieser Zahlenpaare wird z. B. per Strichliste oder mit der Anweisung **iPart** ermittelt.
- Der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ist ein Näherungswert für die Zahl π.
- Lässt man das Verfahren mehrfach durchführen, können das arithmetische Mittel und die Standardabweichung aller ermittelten Näherungswerte berechnet werden.

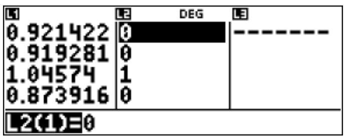
Verfahren im Überblick:

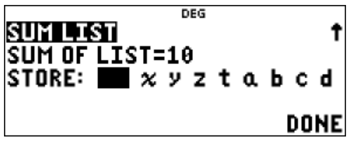
Variante 1:



Mit data wird in den Listen L1 und L2 je eine Folge von n = 50 Zufallszahlen mit **rand** erzeugt. Die Liste L3 wird mit den Ergebnissen der Listen L1 und L2 durch $\sqrt{(\mathbf{L1})^2+(\mathbf{L2})^2}$ berechnet. Man blättert L3 durch und führt eine Strichliste für die Anzahl m der Ergebnisse, die größer als 1 sind. Der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ist ein Näherungswert für die Zahl π.

Variante 2:



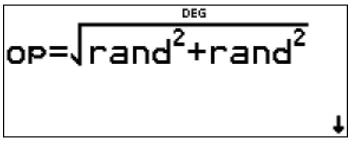


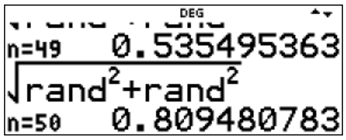
Mit data wird in der Liste L1 eine Folge von n = 50 Zufallszahlen durch die Bildungsvorschrift $\sqrt{\mathbf{rand}^2+\mathbf{rand}^2}$ erzeugt. In der Liste L2 wird mit **iPart** der ganzzahlige Anteil jedes Folgengliedes von L1 bestimmt. Man erhält also entweder eine 0 oder eine 1. In L3 wird die Summe m der Einsen von L2 bestimmt.
Der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ist ein Näherungswert für die Zahl π.

[1] Zeichnung erstellt mit einem TI-Nspire CX - CAS

Variante 3:

Mit **set op** wird die Bildungsvorschrift $\sqrt{\mathbf{rand}^2 + \mathbf{rand}^2}$ festgelegt. Nun wird wiederholt mit [2nd] [)] die Anwendung **op** geöffnet. Dabei wird jedes Mal eine Zufallszahl nach der Bildungsvorschrift zurückgegeben. Außerdem wird die Anzahl n der Durchführungen angezeigt. Der Anwender führt eine Strichliste über die Anzahl m der Ergebnisse, die größer als 1 sind. Der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ist ein Näherungswert für die Zahl π.



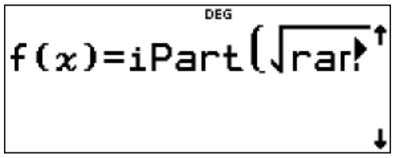


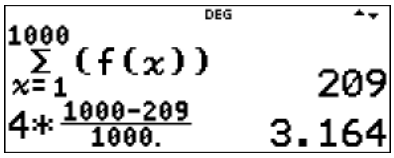
Variante 4

Die Anwendung [table], dann **1: Add/Edit Func** öffnen und als Funktionsterm für f(x) eintragen:

$\mathbf{ipart}(\sqrt{\mathbf{rand}^2 + \mathbf{rand}^2})$.

Damit lassen sich sehr viele Funktionswerte 0 bzw. 1 erzielen, die mit der Summenfunktion zur Berechnung eines Näherungswertes für π verwendet werden.



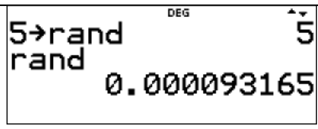
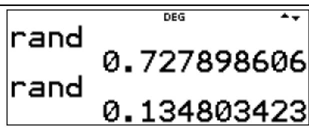


Ausführliche Erläuterungen zur Nutzung des TI-30X Plus MathPrint in diesem Zusammenhang:

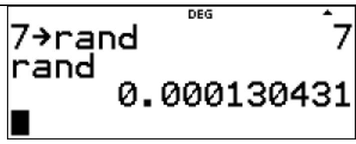
Zur Anweisung **rand** ist im Guidebook des TI-30X Plus MathPrint auf der Seite 42 folgende Anmerkung zu lesen:

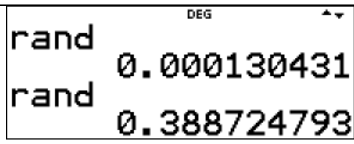
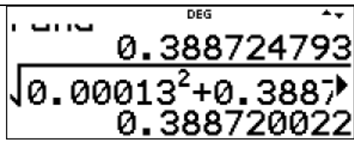
„**rand**: Erzeugt eine zufällige reelle Zahl zwischen 0 und 1. Um zu steuern, welche Folge von Zufallszahlen erzeugt wird, speichern Sie eine ganze Zahl (Startwert) ≥ 0 in **rand**. Der Startwert wird bei jeder Erzeugung einer Zufallszahl zufällig neu ausgewählt."

Auf Seite 43 ist dann noch ein Beispiel gegeben:

Wert in **rand** speichern	[5] [sto→] [2nd] [! nCr nPr] [1] [enter]	 
rand	[2nd] [! nCr nPr] [1] [enter] [enter] [enter]	 

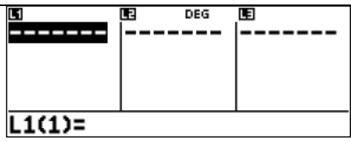
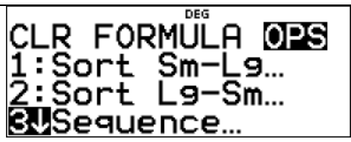
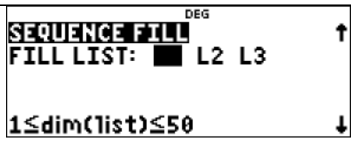
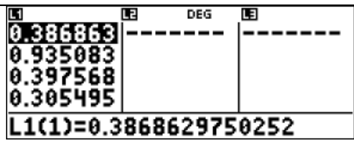
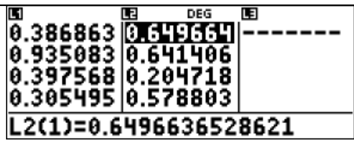
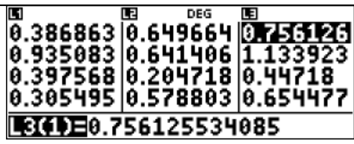
An einem Beispiel wird nun zunächst gezeigt, wie das Monte-Carlo-Verfahren mit dem TI-30X Plus MathPrint prinzipiell umgesetzt werden kann.

Zunächst wird der „Zufallsgenerator" aktiviert. Mit **rand** wird eine Zufallszahl erzeugt, die als x-Koordinate für einen Punkt P_1 verwendet wird.	

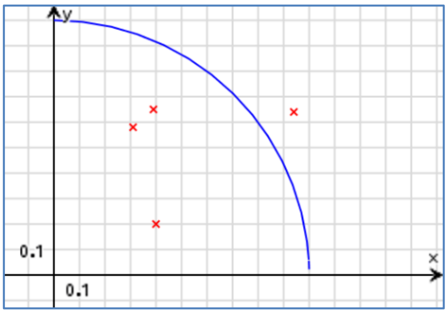
Mit **rand** wird eine zweite Zufallszahl erzeugt, die als y-Koordinate für den Punkt P_1 verwendet wird.	
Der Abstand d_1 des Punktes P_1 zum Ursprung wird ermittelt mit $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dieser Punkt P_1 würde hier wegen $d_1 < 1$ also im Inneren des Viertelkreises liegen.	

Dieses Vorgehen ist sehr umständlich, kann aber auf verschiedene Arten mit dem TI-30X Plus MathPrint effektiver und eleganter gelöst werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

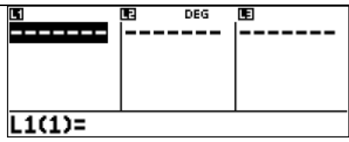
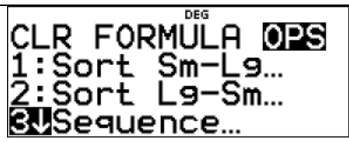
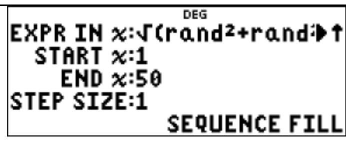
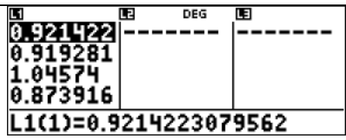
Variante 1: einfache Nutzung von [data]

Mit [data] wird die kleine „Tabellenkalkulation“ geöffnet.	
Nochmals [data] drücken und zu **OPS 3: Sequence** gehen. [data] [▶] [▶] [▼] [▼]	
Mit [enter] öffnet sich nebenstehender Bildschirm.	
Dieser Bildschirm führt nach nochmals [enter] weiter zum Bildschirm, in dem man in der Liste L1 die Daten so eingibt, dass 50 Zufallszahlen mit **rand** erzeugt werden können.	
Nach [enter] wird die Liste L1 angezeigt.	
Mit der Cursortaste geht man in die Spalte L2 und erzeugt dort auf analogem Wege eine zweite Liste mit 50 Zufallszahlen.	
Mit der Cursortaste geht man in die Spalte L3 und erzeugt dort auf analogem Wege eine dritte Liste mit den Ergebnissen von $\sqrt{(\mathbf{L1})^2 + (\mathbf{L2})^2}$. [▶] [data] [▶] [1] [2nd] [x^2] [data] [1] [x^2] [+] [data] [2] [x^2] [)] [enter]	

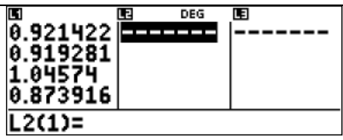
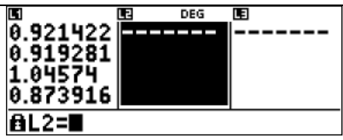
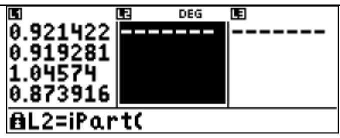
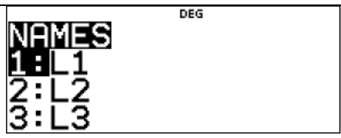
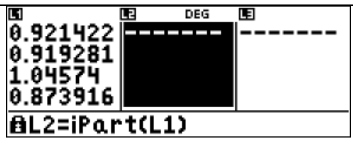
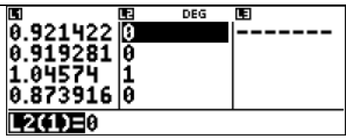
Unter den ersten vier Wertepaaren ist bei dem darüber stehenden Bildschirmabdruck genau eines zu erkennen, bei dem wegen L3(2) > 1 der zugehörige Punkt außerhalb des Vierteleinheitskreises[1] liegt. Der Sachverhalt ist nebenstehend veranschaulicht.
Man blättert L3 durch und führt eine Strichliste für die Anzahl m der Ergebnisse, die größer als 1 sind. Der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ist ein Näherungswert für die Zahl π.



Variante 2: effektivere Nutzung von [data]

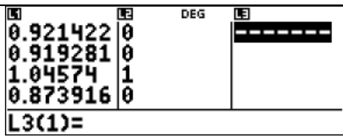
Mit [data] wird die kleine „Tabellenkalkulation" geöffnet.	
Nochmals [data] drücken und zu **OPS 3: Sequence** gehen. [data] ▶ ▶ ▼ ▼	
Mit [enter] öffnet sich nebenstehender Bildschirm.	
Nochmals [enter] führt zum Bildschirm, in dem man den Term $\sqrt{x^2+y^2}$ in der Form $\sqrt{\mathbf{rand}^2+\mathbf{rand}^2}$ sowie den Startwert x =1 und den Endwert x= 50 eingibt. Mit mehrmals [enter] wird die Eingabe abgeschlossen. [2nd] [x²] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x²] [+] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x²] [)] ▼ [1] ▼ [5] [0]	
Zu sehen ist schließlich die Liste L1 mit den nach der eingegebenen Anweisung berechneten Werten. Diese Liste kann man nun durchblättern und nach den Ergebnissen suchen, die kleiner als 1 sind, eine Strichliste dazu führen und das Ergebnis auswerten wie umseitig beschrieben.	

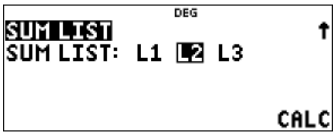
[1] Zeichnung erstellt mit einem TI-Nspire CX - CAS

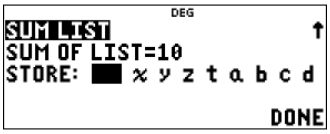
Alternativ und etwas eleganter ist folgende daran anschließende Vorgehensweise:	
Man öffnet wieder mit [data] die Tabelle und geht mit der Cursortaste auf L2. [data] [▶]	
Man drückt wieder [data] und wählt **Formula 1: Add/Edit Frmla**	
Es wird nun die Liste mit der Eingabezeile für die Liste L2 angezeigt.	
Dort wird **MATH NUM 3: iPart** gewählt. Die Auswahl wird mit [enter] abgeschlossen. [math] [▶] [▼] [▼] [enter]	
Nun steht **iPart** in der Eingabezeile.	
Als Argument muss die Liste L1 eingetragen werden. Dazu drückt man wieder [data] und wählt dort L1 mit [enter] aus.	
Die Listenbezeichnung L1 erscheint nun in der Eingabezeile für die Liste L2. Die Eingabe wird mit der schließenden Klammer und [enter] abgeschlossen. [data] [enter] [ )] [enter]	
In der Liste L2 stehen nun die ganzzahligen Anteile der Ergebnisse von L1, als eine 0, wenn die Bedingung $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ erfüllt ist oder eine 1, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.	

Bildet man [data] **OPS 4: Sum List** die Summe der Elemente der Liste L2, so wird die Anzahl m der Zahlenpaare, die die Bedingung $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ nicht erfüllen, zurückgegeben. Man erspart sich so das Auszählen per Strichliste. Mit der Zahl m und der Gesamtzahl n der Durchführungen kann der gesuchte Näherungswert bestimmt werden.

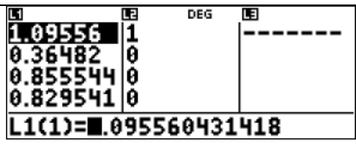
In diesem Beispiel ist m = 10 und damit wird $\pi \approx 4 \cdot \frac{50-10}{50} = 3{,}2.$





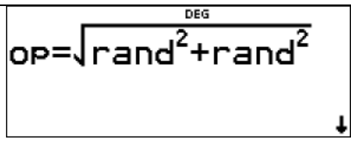


Eine Neuberechnung gelingt, wenn man mit [data] die Tabelle wieder öffnet und ohne Neueintragungen mit [enter] die bestehenden Eintragungen bestätigt.



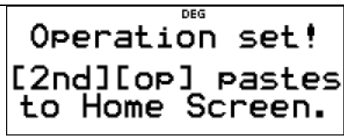
Variante 3: Realisierung mit set op und op:

Öffnen der Anwendung **set op** und Eintragen des Terms $\sqrt{x^2+y^2}$ in der Form $\sqrt{\mathbf{rand}^2+\mathbf{rand}^2}$



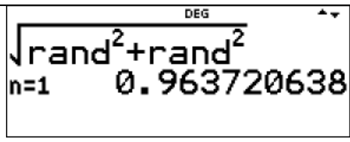
Abschließen der Eingabe mit [enter]

[2nd] [×] [2nd] [x^2] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x^2] [+] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x^2] [▶] [enter]



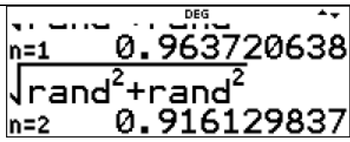
Öffnen der Anwendung **op**.

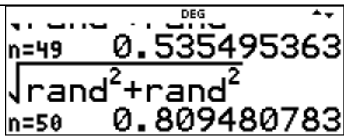
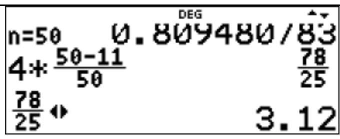
[2nd] [ )]



Der Anwender prüft, ob das Ergebnis größer als 1 ist und vermerkt dies, falls das zutrifft, in seiner Strichliste.

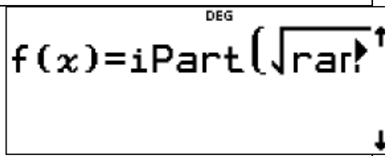
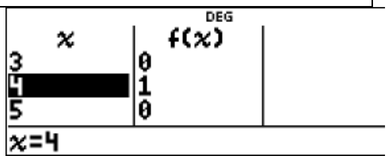
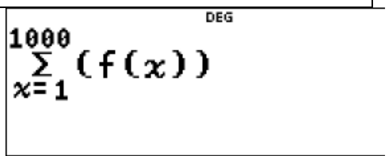
Nun wird wiederholt mit [2nd] [ )] die Anwendung **op** geöffnet. Es wird jedesmal ein neues Ergebnis angezeigt. Außerdem ist auf dem Bildschirm zu erkennen, wie oft bereits **op** angewendet wurde. (Hier ist n = 2.)

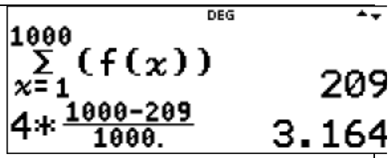
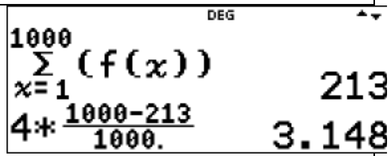


Nach einer größeren Anzahl von Simulationen (z. B. für n = 50) wird die Strichliste ausgezählt und der Term $4 \cdot \frac{n-m}{n}$ ausgewertet.	
Hier wurden bei 50 Durchführungen elf Ergebnisse erzielt, die größer als 1 waren. Damit ergibt sich bei diesem Beispiel $\pi \approx 4 \cdot \frac{50-11}{50} \approx 3{,}12$ als Näherung für die Zahl π.	

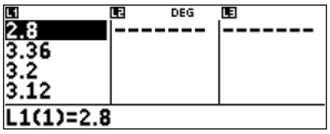
Variante 4: Realisierung mit [table]

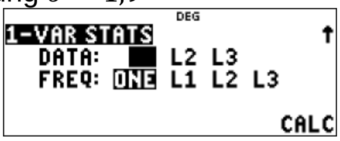
Es geht um eine Verallgemeinerung der Variante 2, die mehr als n = 50 automatische Durchläufe für Zufallszahlenpaare (x; y) gestattet.

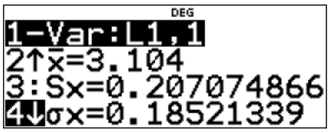
Anwendung [table] öffnen.	
Dann **1: Add/Edit Func** öffnen und als Funktionsterm für f(x) eintragen: $\mathbf{ipart}(\sqrt{\mathbf{rand^2} + \mathbf{rand^2}})$ [1] [math] [▶] [3] [2nd] [x^2] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x^2] [+] [2nd] [! nCr nPr] [1] [x^2] [▶] [)]	
Mit [enter] wird die Eintragung bestätigt, die Funktion g(x) wird übersprungen und für das **TABLE SETUP** werden der Start und die Schrittweite Step mit 1 festgelegt. [enter] [enter] [1] [enter] [enter] [enter] [enter]	
Weiter mit [enter] gelangt man in die Tabelle der Funktionswerte, die entweder den Wert 0 oder 1 haben, je nachdem, ob $\sqrt{\mathbf{rand^2} + \mathbf{rand^2}}$ höchsten 1 (Funktionswert 0) ist, oder größer als 1 (Funktionswert 1) ausfällt.	
Mit [2nd] [mode] [quit] wird [table] verlassen und mit [math] [5] die Summenfunktion aktiviert. Sie kann wie nebenstehend z. B. für 1000 Summanden, die Funktionswerte von f(x) sind, berechnen. Die Bezeichnung „f(x)" wird mit [table] [2] [x^{yzt}_{abcd}] [)] eingefügt. [2nd] [mode] [math] [5] [1] [▲] [1] [0] [0] [0] [▶] [table] [2] [x^{yzt}_{abcd}] [)] [▶]	

Mit [enter] wird die Berechnung der Summe ausgelöst. Die Rechenzeit bei 1000 Summanden beträgt etwa zwei Minuten. Hier wurden bei 1000 Durchführungen 209 Ergebnisse erzielt, die größer als 1 waren. Damit ergibt sich bei diesem Beispiel $\pi \approx 4 \cdot \frac{1000-209}{1000} \approx 3{,}164$ als Näherung für die Zahl π.	
Für eine Neuberechnung muss lediglich der Ausdruck mit dem Summenzeichen mithilfe der Cursortasten markiert, mit [enter] „nach unten“ kopiert und nochmals mit [enter] aktiviert werden.	

Abschließende Auswertung:
Bei fünf Serien von jeweils 50 Simulationen wurden von mir folgende Näherungswerte für π ermittelt: 2,8; 3,36; 3,2; 3,12; 3,04
Bei acht Serien von jeweils 1000 Simulationen wurden von mir folgende Näherungswerte für π ermittelt: 3,164; 3,072; 3,116; 3,132; 3,164; 3,18; 3,136
Mit dem WTR können (natürlich auch bei größeren Anzahlen von Serien) die Kenngrößen der Listen der Näherungswerte mit **stat-reg/distr** ermittelt werden.
Für die fünf Serien zu je 50 Durchführungen erhält man als arithmetisches Mittel für π $\bar{x} \approx 3{,}1$, als Standardabweichung $\sigma \approx 1{,}9$







[2nd] [data] [2] [enter] [enter]
Für die acht Serien zu je 1000 Durchführungen ergeben sich als arithmetisches Mittel für π hier
$\bar{x} \approx 3{,}14$, als Standardabweichung $\sigma \approx 0{,}034$.

Anmerkung
Bei der Verwendung von iPart tritt allerdings ein systematischer Fehler auf:

- Da iPart den ganzzahligen Anteil einer Zahl liefert, werden alle Ergebnisse der Berechnungen von $\sqrt{rand^2 + rand^2}$ mit $1 \leq \sqrt{rand^2 + rand^2} < 2$ der Ganzzahl 1 zugeordnet.
- Für $1 = \sqrt{rand^2 + rand^2}$ erhält man allerdings Zufallspunkte, die zur Kreisfläche gehören, aber hier zu denen gezählt werden, die außerhalb des Viertelkreises liegen. Der Näherungswert für die Zahl Pi wird dadurch etwas verfälscht. Es ist aber anzunehmen, dass es nur sehr wenige Zufallspunkte gibt, die direkt auf der Kreislinie liegen.

© T3 Deutschland 2021

Autor:
Dr. Wilfried Zappe