Der TI-Nspire™ CX II-T CAS im Mathematikunterricht der Klasse 8

Technische und didaktische Hinweise, Beispielaufgaben und Arbeitsblätter zu allen Inhaltsfeldern

Herausgeber: Dr. Hubert Langlotz, Sebastian Rauh

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Herausgeber:
Dr. Hubert Langlotz; Sebastian Rauh

Autoren:
Martin Bellstedt, Ralph Huste, Dr. Hubert Langlotz, Sebastian Rauh, Dr. Wilfried Zappe
Berater: Ines Petzschler, Frank Liebner

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: **www.t3deutschland.de** sowie unter **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

Vorwort

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

Ihnen, die vom GTR zum CAS wechseln oder aber Neueinsteiger in CAS sind, wollen wir mit diesem Material eine Möglichkeit bieten, einerseits eigene Unterrichtserfahrungen mit dem GTR weiter zu nutzen bzw. zu überdenken, und wir wollen gleichzeitig Anregungen für neue Unterrichtsansätze bieten.

Wir haben uns am Kernlehrplan des Landes NRW orientiert und einige Unterrichtseinheiten skizziert.

Dieses Heft ist nicht als Lehrbuchersatz zu verstehen. Ebenso sollen nicht alle angebotenen Aufgabenblätter abgearbeitet werden. Wählen Sie diejenigen aus, die zu Ihrem Unterricht passen und ergänzen Sie damit Ihr Aufgabenmaterial.

Wir haben in allen Themenbereichen darauf verzichtet zu beschreiben, welche Fähigkeiten ohne Hilfsmittel zu erwarten sind. Dies hätte den Umfang des Heftes gesprengt.
Geplant sind in Fortsetzung zwei weitere Hefte für die Klassen 9-10 sowie für die Oberstufe.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit dem CAS bis zum Abitur.

Die Herausgeber und die Autoren

0. Einführung

Vergleicht man den TI-Nspire ohne CAS mit demjenigen mit CAS, so fällt zunächst auf, dass vieles analog aufgebaut ist. Alle Applikationen finden sich auf beiden Geräten gleich wieder.
Hauptunterschied zwischen einem CAS-Rechner und einem GTR ist, dass der CAS zusätzlich symbolisch arbeiten kann und ein GTR nur numerisch.

$\text{solve}(x^2-3\cdot x-3=0,x)$ $x=\frac{-(\sqrt{21}-3)}{2}$ or $x=\frac{\sqrt{21}+3}{2}$	$\text{nSolve}(x^2-3\cdot x-3=0,x)$ $\quad -0.791288$ $\text{nSolve}(x^2-3\cdot x-3=0,x,0)$ $\quad 3.79129$

Links ist die symbolische Lösung einer quadratischen Gleichung mit einem CAS und rechts die numerische Lösung mittels GTR dargestellt.

Oft wird aber formuliert, dass diese „Fähigkeit des Rechners" eher kontraproduktiv sei, sprich der Schüler[1] verlernt das Umformen von Termen und beim Studium sei dies auch verboten.

Wir versuchen, mit diesem Heft auch diesen Aussagen nachzugehen bzw. dies durch die Art der gewählten Beispiele zu hinterfragen.
Sicherlich ist klar, dass man herkömmliche Aufgaben z. B. zum Lösen von Gleichungen nicht einfach durch Knopfdruck an den Rechner übergeben kann. Es geht vor allem darum, beim Einsatz eines CAS-Rechners sich immer die Frage zu stellen, welche Schülertätigkeiten sind für dieses Themengebiet wichtig und daraus ergibt sich dann, in welcher Form und in welcher Unterrichtsphase der Rechner eingesetzt werden sollte.
Zwei Beispiele seien hier angedeutet:

1.1 *Dok RAD -2^3 $\quad -8$ $(-2)^3$ $\quad -8$ -2^4 $\quad -16$ $(-2)^4$ $\quad 16$	1 *Dok RAD $\text{expand}((3\cdot x+2)\cdot(x-4))$ $\quad 3\cdot x^2-10\cdot x-8$ $\text{expand}((s+t)\cdot(s-t))$ $\quad s^2-t^2$ $\text{factor}(6\cdot a+2\cdot a^2)$ $\quad 2\cdot a\cdot(a+3)$ $\text{factor}(x^2-2\cdot x+1)$ $\quad (x-1)^2$ $\frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad x+2$
Beschreibe die Wirkungen der Klammersetzung und der Potenzen auf die Vorzeichen des Ergebnisses. Erkläre.	Der Rechner hat Termumformungen vorgenommen. Füge jeweils zwischen Ein- und Ausgabe mindestens einen Umformungsschritt ein.

[1] Die Personenbezeichnung „Schüler" gilt für m/w/d Lernende; es wird auch die Abkürzung S:S verwendet.

Frau Professor Regina Bruder hat am 13.10.2020 in ihrem Onlineseminar folgende Folie präsentiert:

***Vision* für einen rechnergestützten MU ab Kl.7**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechnernutzung als selbstverständliches und
  individuell freigestellt
  unterschiedlich eingesetztes Werkzeug
  insbesondere zur Entwicklung von Modellierungs- und Problemlösekompetenzen und mit Anlässen für mathematisches Argumentieren;
    - Rechner als Werkzeug zum besseren Mathematikverstehen
    - Rechner als Kontrollinstrument und Reflexionsanlass

Zum Potential eines computergestützten Mathematikunterrichts erwähnte Frau Bruder insbesondere die folgenden Punkte:

Reduktion schematischer Abläufe
(Befreiung von kognitiver Last, *wenn man weiß, was der Rechner wie kann…)*

Unterstützung beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge,
wenn man weiß, worum es geht (Zielklarheit)

Unterstützung **individueller** Präferenzen und Zugänge, *wenn es offene Aufgaben bzw. Wahlmöglichkeiten gibt…*

Verständnisförderung mathematischer Zusammenhänge durch
Dynamisierung und Darstellungswechsel sowie entschleunigende Beschreibungen und durch Exaktifizierung (CAS).

Wir haben im vorliegenden Heft versucht, diese vier Punkte bei der Wahl der Aufgaben im Blick zu behalten.

1. Inhaltsfeld Arithmetik/Algebra[2] (Ari)

<u>Inhaltliche Schwerpunkte:</u>

– Zahlbereichserweiterung: rationale Zahlen
– Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte, Termumformungen
– Gesetze und Regeln: Vorzeichenregeln, Rechengesetze für rationale Zahlen, binomische Formeln
– Lösungsverfahren: algebraische und grafische Lösungsverfahren (lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen, elementare Bruchgleichungen)

In diesem Kapitel soll, bezugnehmend auf den KLP NRW, die grundlegende Bedienung des TI Nspire CAS erläutert werden.
Es ist an dieser Stelle notwendig, einige Computer Algebra spezifische Ausdrücke einzuführen, die oft, aber nicht immer bedeutungsgleich mit mathematischen Ausdrücken übereinstimmen.
Der Fokus soll hier auf dem Inhaltsfeld Arithmetik/Algebra liegen, hier ist der größte Unterschied zum GTR zu finden.

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Variable sind „Platzhalter", für die man z. B. Zahlen, Größen, Vektoren, Listen oder Terme einsetzen kann. Mit ihnen lassen sich Rechenoperationen ausführen. Variable werden eingesetzt als

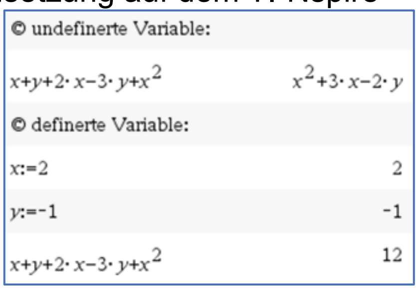
- allgemeine Zahl   2x
- Unbekannte   2x = 4
- Veränderliche   f(x) = 2x

In der Mathematik bezeichnet der Begriff **Term** einen sinnvollen Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole (für mathematische Verknüpfungen) und Klammern enthalten kann.

Hinweise
Definierte und undefinierte Variablen unterscheiden:
Eine undefinierte Variable wird wie ein algebraisches Symbol behandelt.

Bei einer definierten Variablen wird der aktuelle Wert der Variablen angezeigt.

Umsetzung auf dem TI-Nspire



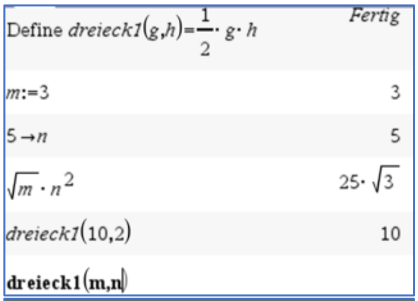
Variable definieren in ***Scratchpad*** oder ***Calculator***:

1. menu – *Aktionen – Define*.
2. „Definiert als" Operator :=, Tasten ctrl [:=].
3. Zuweisungsoperator sto→ Tasten ctrl var.

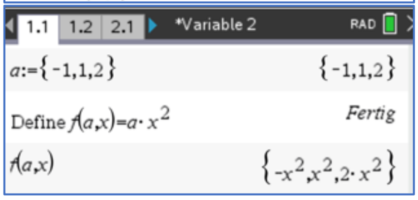
Als Variable werden Buchstaben oder Zeichenfolgen

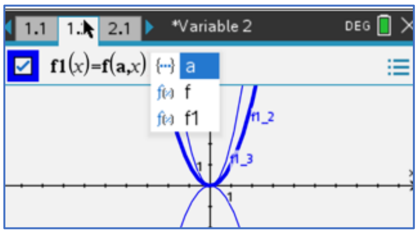
[2] Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen, 1. Auflage 2019, S. 28

aus Buchstaben und Ziffern verwendet.
Am Anfang darf keine Ziffer stehen.
Ob ein Zeichen oder eine Zeichenfolge als Variable definiert wurde, lässt sich daran erkennen, dass bei Eingabe dieser Variablen diese fettgedruckt erscheint.
Didaktischer Hinweis: Es ist sinnvoll, an dieser Stelle lediglich eine Methode zur Definition einzuführen.

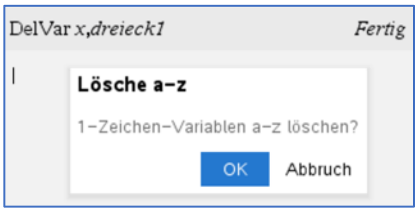


Wird eine Variable im ***Scratchpad*** oder in einem *Problem* innerhalb eines Dokuments definiert, so bleibt sie für alle Anwendungen im ***Scratchpad*** bzw. auf allen Seiten dieses *Problems* erhalten.
Öffnet man ein neues Dokument oder erzeugt man ein neues *Problem*, so stehen die vorher definierten Variablen dort nicht zur Verfügung.
Im Beispiel rechts wurde ein Dokument mit dem Namen „Variable 2“ angelegt. Es ist unterteilt in das *Problem 1* mit den Seiten 1.1 und 1.2 und ein *Problem 2* mit der Seite 2.1, erkennbar an den „Reitern“ oben links auf dem Bildschirm.
Eine Übersicht aller aktuell in einem Dokument bzw. einem *Problem* gespeicherten Variablen lässt sich mithilfe der Taste [var] anzeigen.
Didaktischer Hinweis: Die Nutzung des Scratchpads sollte vermieden werden. Der Nspire bietet ausgezeichnete Möglichkeiten, komplette Dateien zu erstellen, die den S:S erlaubt, sehr übersichtlich und strukturiert zu arbeiten.



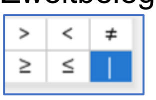


Eine definierte Variable löschen:



Die DelVar-Anweisung verwenden.
Scratchpad oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Variable löschen*
Alle Variablen mit einem einzigen Buchstaben löschen:
Scratchpad oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Lösche a - z*

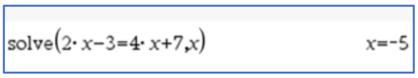
Eine Variable vorübergehend mit einem anderen Wert belegen:
Den „with“-Operator eingeben über
Zweitbelegung von [=]: [ctrl] [=]



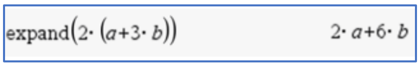
Den definierten Wert einer Variablen vorübergehend überschreiben.
Insbesondere bei der Einführung von einfachen

Methoden, die die wiederholte Eingabe von nur leicht unterschiedlichen Zahlen erfordert, kann diese Funktion sehr nützlich sein.

Gleichung/Ungleichung lösen:
Scratchpad oder ***Calculator*** – menu – *Algebra – Löse*



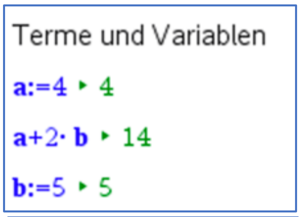
Term ausmultiplizieren:
Scratchpad oder ***Calculator*** menu *Algebra - Entwickle*

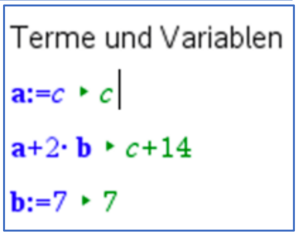


Term ausklammern:
Scratchpad oder ***Calculator***: menu *Algebra - Faktorisiere*

Notes

Diese Applikation erzeugt dynamische Arbeitsoberflächen. Dynamisch bedeutet, dass bei der Änderung einer Variablen, alle mit dieser Variablen in Verbindung stehenden Berechnungen sofort neu durchgeführt werden.
Es können außerdem Notizen (wie z. B. Aufgabenbezeichungen, oder kurze Erläuterungen eingefügt werden.
In der Applikation ***Notes*** können Variablen gespeichert werden, wenn man dazu eine „Math Box“ benutzt (ctrl M).
Der Vorteil hierbei ist, dass sämtliche Berechnungen, in denen die Variable vorkommt, aktualisiert werden, wenn man den Wert dieser Variablen ändert. Dies erfolgt im Übrigen auf der gesamten ***Notes***-Seite, also nicht nur „von oben nach unten“, wie z.B. auf einer ***Calculator*** Seite



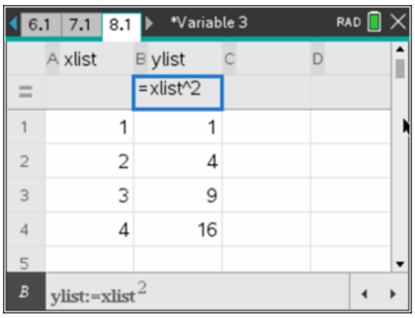


Lists&Spreadsheet

In dieser Applikation können Variablen an zwei Stellen definiert werden:

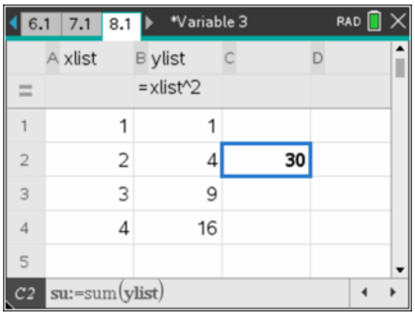
1. In der obersten Zeile kann jede Spalte als Liste mit einem Namen belegt werden. Diese Liste ist dann in allen weiteren Applikationen des gleichen Problems mit diesem Namen nutzbar.

   Hier wird z. B. eine zweite Liste **ylist** definiert, indem man die Liste **xlist** quadriert.



2. Innerhalb des ***List&Spreadsheet***-Blattes lassen sich wie in anderen Tabellenkalkulationen relative oder absolute Zellbezüge definieren.

   Hier wird z. B. die Zelle C2 mit der Variablen „**su**“ durch die Anweisung **su := sum(ylist)** belegt.
   Durch Aktvierung mit enter wird dann diese Summe berechnet.



Hinweis:
Für die Schüler sollte die Einführung in das Arbeiten mit Variablen auf dem TI-Nspire CAS nicht in dieser kompakten Form erfolgen. Vielmehr sollte deren Einführung nach und nach in Verbindung mit geeigneten Aufgaben geschehen. Im Folgenden werden einige Arbeitsblätter vorgeschlagen, die Anregungen für eine schrittweise Einführung in verschiedene mathematische Anwendungen des TI-Nspire enthalten.

Arbeitsblatt 0: Rechnen mit Zahlen

Löse die Aufgaben, ohne ein digitales Hilfsmittel zu verwenden.

1. Subtrahiere ein Drittel von einem Siebtel.
2. Bilde das Produkt aus dem Quadrat von 3 und dem Quadrat von 7.
3. Berechne das Quadrat aus der Summe von 3 und 7.
4. Berechne den Quotienten aus zwei Drittel und fünf Siebtel.
5. Berechne einen dezimalen Näherungswert für $7^2 : 3^3$.
6. Berechne $7\frac{1}{3} - \left(3\frac{1}{7} + 1{,}2\right)$.
7. Ermittle $\left(\frac{4}{5} + 0{,}2\right)^{97}$.
8. Was ergibt sich für $\left(0{,}125 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4} - 0{,}25}$?
9. Berechne die Summe aus $\sqrt{10^2 - 6^2}$ und $\left(\sqrt{15^2} - \sqrt{256}\right)$.
10. Wieviel sind 200% von $2^4 \cdot \frac{1}{4^2}$?
11. Berechne $\sqrt{8} : \sqrt[3]{8}$.

Verwende nun zur Kontrolle deiner Ergebnisse den CAS-Rechner. Beachte dazu folgende Hinweise:

- Dezimalpunkt $\boxed{.}$ statt Komma $\boxed{,}$.
- Vorzeichenminus $\boxed{(-)}$ und Rechenminus $\boxed{-}$ unterscheiden.
- Gemischte Zahlen als Summe von ganzer Zahl und echtem Bruch eingeben.
- Notwendige Klammersetzungen beachten.
- Der Rechner setzt nach dem Öffnen einer Klammer auch immer sofort die schließende Klammer.
- Mit der Cursortaste ▸ oder der Tabulatortaste $\boxed{\text{tab}}$ kann man aus der Klammer (aus dem Exponenten, aus dem Zähler oder Nenner) wieder herauskommen.
- Das Prozentsymbol findest du unter der Taste $\boxed{?!\blacktriangleright}$.
- Mit $\boxed{\text{menu}}$ ***Aktionen - Protokoll löschen*** kann der Eintrag auf einer Seite gelöscht werden, ohne die Seite selbst zu entfernen.
- Eine dezimale Näherungsangabe erhält man, wenn ein Dezimalpunkt in der Eingabe auftaucht oder nach Drücken von $\boxed{\text{ctrl}}\boxed{\text{enter}}$.

Fehler korrigieren/ Löschen von Einträgen:

Befehl rückgängig machen	esc
Zeichen löschen	Cursor hinter das Zeichen setzen und del drücken
eine ganze Zeile/ markierten Ausdruck löschen	ctrl del
Arbeitsschritt(e) rückgängig machen	ctrl esc oder ctrl Z
einen rückgängig gemachten Arbeitsschritt wieder aufrufen	ctrl Y
<u>alle</u> Einträge auf einer Seite löschen (Anwendung „**Calculator**" oder **Scratchpad**)	menu Aktionen - Protokoll löschen
in einem Dokument eine ganze Seite löschen	doc▾ Seitenlayout - Seite löschen

Eingabe korrigieren:
Solange eine Eingabe nicht durch enter abgeschlossen wurde, kann sie wie oben angegeben korrigiert werden.
Wurde eine Berechnung mit enter abgeschlossen, kann die zugehörige Eingabe nur dann korrigiert werden, wenn dieser Ausdruck mit der Pfeiltaste ▲ angesteuert, dadurch markiert und mit enter in die Eingabezeile kopiert wird. Der kopierte Ausdruck kann dann verändert werden.

Wichtige Tastenkürzel:

Ausdruck markieren	⇧shift ◀▶
Ausdruck ausschneiden	Ausdruck markieren und ctrl X
Ausdruck kopieren	Ausdruck markieren und ctrl C
Ausdruck einfügen	ctrl V

Standardeinstellungen des Rechners wiederherstellen:

⌂on ***Einstellungen – Werksstandardwerte wiederherstellen***
Der Wechsel zwischen den Applikationen erfolgt mit tab.

LB1 Lösungen zu Arbeitsblatt 0:

Lösungen mit CAS (Es wird jeweils eine von mehreren möglichen Tastenfolgen angegeben.)

Aufgabe 1:
[ctrl] [÷] [1] [tab] [7] [−] [ctrl] [÷] [1] [tab] [3] [enter]

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{3} \qquad \frac{-4}{21}$$

Aufgabe 2:
[3] [x²] [×] [7] [x²] [enter]

$$3^2 \cdot 7^2 \qquad 441$$

Aufgabe 3:
[(] [3] [+] [7] [tab] [x²] [enter]

$$(3+7)^2 \qquad 100$$

Aufgabe 4:
[ctrl] [÷] [2] [tab] [3] [tab] [ctrl] [÷] [ctrl] [÷] [5] [tab] [7] [enter]

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} \qquad \frac{14}{15}$$

Aufgabe 5:
[ctrl] [÷] [7] [x²] [tab] [3] [^] [3] [ctrl] [enter]

$$\frac{7^2}{3^3} \qquad 1.81481$$

Aufgabe 6:
[7] [+] [ctrl] [÷] [1] [tab] [3] [tab] [−] [(] [3] [+] [ctrl] [÷] [1] [tab] [7] [tab] [+] [1] [.] [2] [enter]

Da ein Dezimalbruch in der Eingabe vorkommt, wird das Ergebnis als dezimale Näherung angegeben. Will man dies vermeiden, kann man z. B. 1,2 durch $\frac{6}{5}$ ersetzen.

$$7+\frac{1}{3}-\left(3+\frac{1}{7}+1.2\right) \qquad 2.99048$$

$$7+\frac{1}{3}-\left(3+\frac{1}{7}+\frac{6}{5}\right) \qquad \frac{314}{105}$$

Aufgabe 7:
[(] [ctrl] [÷] [4] [tab] [5] [tab] [−] [0] [.] [2] [tab] [^] [9] [7] [enter]

$$\left(\frac{4}{5}+0.2\right)^{97} \qquad 1.$$

Aufgabe 8:
[(] [0] [.] [1] [2] [5] [ctrl] [÷] [1] [tab] [8] [tab] [tab] [^] [(] [ctrl] [÷] [1] [tab] [4] [tab] [−] [0] [.] [2] [5] [enter]

$$\left(0.125-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}-0.25} \qquad \text{undef}$$

Aufgabe 9:
[ctrl] [x²] [1] [0] [x²] [−] [6] [x²] [tab] [−] [(] [ctrl] [x²] [1] [5] [x²] [tab] [−] [ctrl] [x²] [2] [5] [6] [enter]

$$\sqrt{10^2-6^2}-\left(\sqrt{15^2}-\sqrt{256}\right) \qquad 9$$

Aufgabe 10:
[2] [0] [0] [?!▸] ▶▶▶▶▶ [enter] [2] [^] [4] [tab] [×] [ctrl] [÷] [1] [tab] [4] [x²] [enter]

$$200\% \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{4^2} \qquad 2$$

Aufgabe 11:
[ctrl] [÷] [ctrl] [x²] [8] [tab] [tab] [ctrl] [^] [3] [tab] [8] [enter]

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{8}} \qquad \sqrt{2}$$

Arbeitsblatt 1: Variablen und Terme mit einem CAS verwenden

$a \cdot h \cdot a$	$a^2 \cdot h$
$ah+ah$	$2 \cdot ah$
Define $aha(x)=x+\frac{1}{x}$	*Fertig*
$aha\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$
$aha(0)$	undef

Beispiel: Spiele mit „a, h, a“:

1. Die Variablen **a**, **h** und **a** werden multipliziert.
   Der CAS-Rechner gibt den Term $a^2 \cdot h$ zurück.
2. Die Variable **ah** wird mit sich selbst addiert.
   Der CAS-Rechner gibt den Term $2 \cdot ah$ zurück.
3. Die Variable **aha** wird als Funktion von x definiert.
   Ihr wird der Term $x + \frac{1}{x}$ zugeordnet.
4. $aha\left(\frac{1}{2}\right)$ berechnet den Wert des Terms $x + \frac{1}{x}$ für $x = \frac{1}{2}$
5. $aha(0)$: Der Funktionswert von aha(x) an der Stelle x = 0 ist nicht definiert.

Variablen:
- sind „Platzhalter“, für die man z. B. Zahlen, Größen, Listen oder Terme einsetzen kann
- beschreiben häufig veränderliche Größen
- dienen der Abkürzung umfangreicher Ausdrücke
- werden oft durch Buchstaben oder Kombinationen von Buchstaben und Zahlen angegeben.

Aufgaben:

1. Spiele mit n, o, t, e, n
   a) Erkläre die Rechnung in der ersten Zeile.

$no-no$	0
Define $\mathrm{not}(x)=2x$	

   b) Gib die Angaben in der 2. Zeile ein und schließe die Eingabe durch [enter] ab. Erläutere die Antwort des Rechners

   c) Untersuche folgende Rechnereingaben. Überlege zuerst, was der Rechner ausgeben wird. Gib die Terme danach ein und vergleiche.

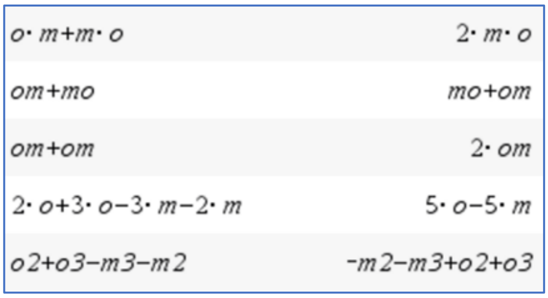
   (1) $\frac{not}{not+not}$

   (2) $\frac{ton}{ton+ton}$

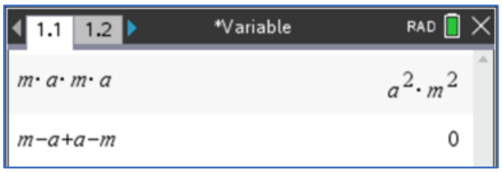
   (3) $\frac{note}{note-note}$

   (4) $e^2 + 2n - 3 \cdot e \cdot e - 5n + to - t \cdot o$

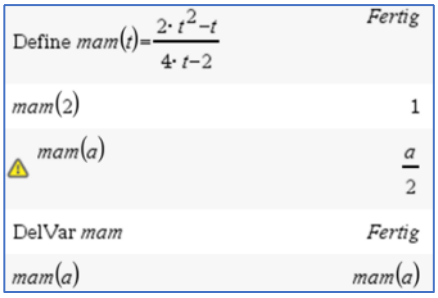
2. Erkläre anhand des Screenshots:
   a) Beschreibe welchen Einfluss es hat, wenn du beim Eingeben in den CAS-Rechner den „Malpunkt“ zwischen Buchstaben-variablen weglässt?
   b) Erläutere, wie das CAS eine Eingabe versteht, wenn zuerst eine Zahl und dann eine Buchstabenvariable eingegeben wird.
   c) Erläutere, wie das CAS eine Eingabe versteht, bei der zuerst eine Buchstaben-variable und danach ohne „Malpunkt“ eine Zahl eingegeben wird.

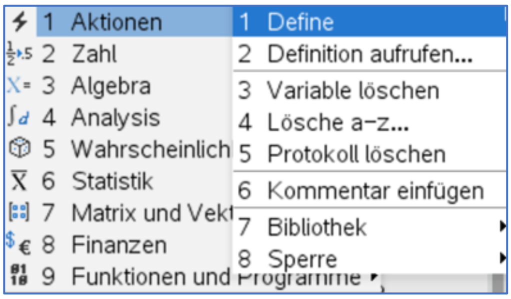


3. Ermittle einen Term, bei dem neben verschiedenen Rechenoperationen nur die vier Buchstaben a, a, m, m verwendet werden und bei dem die nachfolgenden Ergebnisse entstehen.
   a) 2a + 2m b) am² c) 2ma
   d) mama e) 2a + 1 f) 2



4. Erkläre die Rechnungen auf dem Screenshot rechts. Klicke auf den Warnhinweis und beurteile, ob er berechtigt ist.





Hinweise:

Ausgeschlossen von Variablennamen sind solche, die der Rechner als Befehl kennt, z. B. „not“.
Das erste Zeichen einer Variablen darf keine Zahl sein.
Das CAS kann Terme automatisch vereinfachen. Dabei werden die Variablen nach fallenden Potenzen und alphabetisch geordnet.
Die Zuweisung von Zahlen zu Variablen kann z. B. mit der Anweisung *Define* erfolgen.
Die Belegung einer Variablen kann mit *DelVar* gelöscht werden.
Die Anweisungen *Define* und *DelVar* findest du im ***Calculator*** unter menu *Aktionen*. Werden Buchstaben auf dem CAS-Rechner fettgedruckt angezeigt, dann sind diese Buchstaben vorher als Variable definiert worden.
Du kannst sehen, welche Variablen dein CAS-Rechner im aktuellen Problem gespeichert hat, wenn du die Taste var drückst.

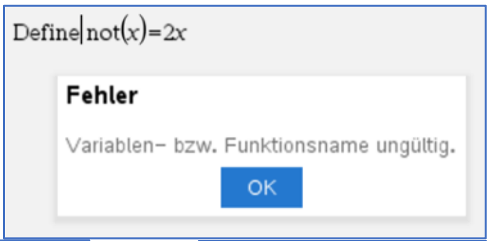
LB1 Lösungen zu Arbeitsblatt 1:

Aufgabe 1a:

„no“ wird als Variable aufgefasst und demzufolge ergibt no – no den Wert null.

Aufgabe 1b:

Der Rechner gibt eine Fehlermeldung zurück, weil „not“ nicht als Variablennamen verfügbar ist. Der Ausdruck „not“ gehört zu den vorinstallierten Befehlen des Rechners. Man findet dazu im Referenceguide den Hinweis:



not (nicht)	**Katalog >**
not *BoolescherAusdr1⇒BoolescherAusdruck*	not(2≥3) true
	not(x<2) x≥2
Gibt „wahr“ oder „falsch“ oder eine vereinfachte Form des Arguments zurück.	not not *innocent* *innocent*

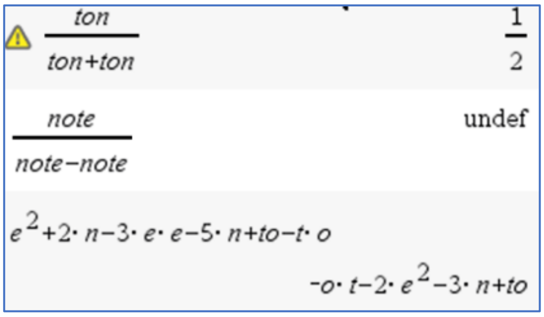
Aufgabe 1c:

(1) Fehlermeldung (s. Aufgabe 1b)

(2) $\frac{ton}{ton+ton} = \frac{1 \cdot ton}{2 \cdot ton} = \frac{1}{2}$

(3) $\frac{note}{note-note} = \frac{1 \cdot note}{0 \cdot note} = \frac{1}{0}$ → nicht definiert wegen Division durch 0.

(4) Der Rechner fasst automatisch zusammen und sortiert nach Vorzeichen, alphabetisch und nach fallenden Potenzen.



Aufgabe 2:

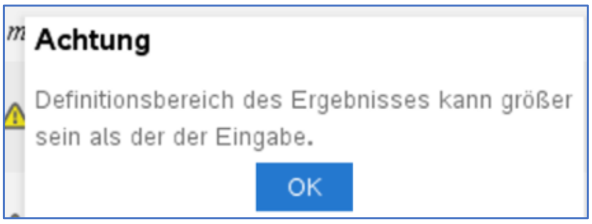
a) Steht ein „Malpunkt“ zwischen Buchstaben, so werden die davor sowie die dahinter stehenden Buchstaben als verschiedene Variablen aufgefasst und es wird ihr Produkt gebildet.
Steht kein „Malpunkt“ zwischen Buchstaben, so wird die Buchstabenfolge als eine einzige Variable aufgefasst.

b) Steht eine Zahl vor einer Variablen, so wird die Eingabe als Produkt "$Zahl$" · "$Variable$" interpretiert, auch wenn man nicht auf die „Maltaste“ drückt.

c) Steht eine Zahl nach der Variablen, so wird die Zeichenkette als eine Variable interpretiert.

Aufgabe 3:

$a+a+m+m$	$2\cdot a+2\cdot m$
$am\cdot am$	am^2
$ma+ma$	$2\cdot ma$
$mama$	$mama$
⚠ $a+a+\frac{m}{m}$	$2\cdot a+1$
⚠ $\frac{a}{a}+\frac{m}{m}$	2



Auch hier gibt es Warnhinweise, die jedes Mal berechtigt sind, denn in der Eingabe steht mindestens eine Variable im Nenner. Hier wäre der Term nicht definiert. In der Ergebnisanzeige kommt kein Bruch vor, es gibt dort also keine Einschränkung des Definitionsbereiches.

Aufgabe 4:

Define $mam(t)=\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$	*Fertig*
$mam(2)$	1
⚠ $mam(a)$	$\frac{a}{2}$
DelVar *mam*	*Fertig*
$mam(a)$	$mam(a)$

Zeile 1: Die Variable mam(t) (sprich „mam von t“) wird dem Term $\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$ zugeordnet.

Zeile 2: mam(2) ist der Wert dieses Terms für t = 2, denn

$$mam(2)=\frac{2\cdot 2^2-2}{4\cdot 2-2}=\frac{6}{6}=1$$

Zeile 3: Es ist $mam(a)=\frac{2\cdot a^2-a}{4\cdot a-2}=\frac{a\cdot(2a-1)}{2\cdot(2a-1)}=\frac{a}{2}$. Der Warnhinweis ist berechtigt (siehe Lösung zu Aufgabe 3), denn der definierte Term $\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$ ist für $t=\frac{1}{2}$ nicht definiert, während der umgeformte Term $\frac{t}{2}$ keine nicht definierten Stellen hat.

Zeile 4: Der Befehl *DelVar* mam löscht die Variable „mam“.

Zeile 5: Nachdem die Variable „mam“ gelöscht wurde, ist auch der ihr vorher zugewiesene Term nicht mehr aktiviert.

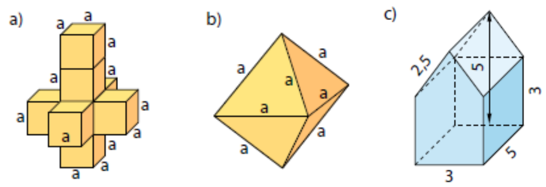
Arbeitsblatt 2: Arbeiten mit Variablen und Termen – Übungen

1. Öffne ein neues Dokument mit der Anwendung ***Calculator***. Gib die sieben Terme ein, die du auf den Screenshots am linken Rand siehst. Der CAS-Rechner formt die eingegebenen Terme um.
   Begründe diese Umformungen durch handschriftliches Nachrechnen.
   Durch Klicken auf die Warnhinweise kannst du diese lesen.
   Prüfe, ob die Warnhinweise berechtigt sind.

$\frac{3\cdot a-6\cdot b}{3}$	$a-2\cdot b$
2^{3+1}	16
3^2+1	10
$\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert$

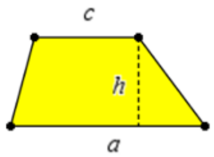
⚠	$\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)}$	$\frac{-1}{b-2}$
⚠	$\frac{a^2-a}{a-1}$	a
⚠	$\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1}$	$\frac{-1}{x+1}$

2. Ermittle für jeden der abgebildeten Körper einen Term für die Berechnung seines Volumens. Berechne für die Teilaufgaben a und b die Termwerte für a = 5 cm.
   Hinweise: Für die Höhe h einer Pyramide mit gleichlangen Seitenkanten a gilt:
   $h=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$



Bilder aus „Fundamente der Mathematik, Sachsen-Anhalt, Klasse 7"; Cornelsen 2015, S. 163, 170

3. Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt die Formel $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$.



$fl(a,c,h):=\frac{a+c}{2}\cdot h$	*Fertig*
$fl(3,2,1.5)$	3.75
$fl(10,5,x)$	$\frac{15\cdot x}{2}$
$fl(x,2\cdot x,3\cdot x)$	$\frac{9\cdot x^2}{2}$

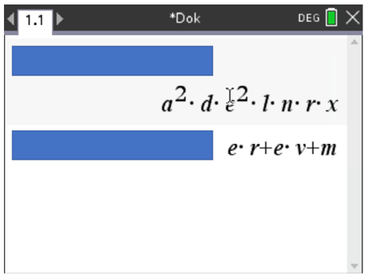
   a) Erläutere die geometrische Bedeutung der Variablen *fl, a, c* und *h* in der ersten Zeile des Screenshots.
   b) Begründe, warum man die Variable *a* nicht sowohl für eine Seite als auch für den Flächeninhalt benutzen kann.
   c) Beschreibe die Form der Trapeze, deren Flächeninhaltsberechnungen auf dem Screenshot abgebildet sind.
   d) Beurteile, ob sich mit den Tastenfolgen der Flächeninhalt eines Trapezes berechnen lässt. Korrigiere eventuelle Fehler.

$\frac{5+7}{2}\cdot 3$: $\boxed{\text{ctrl}}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{+}\boxed{7}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\text{enter}}$ $\frac{5+4}{2}\cdot 1$: $\boxed{(}\boxed{5}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{)}\boxed{\times}\boxed{0}\boxed{,}\boxed{5}\boxed{\text{enter}}$

4. Welche Namen wurden hier verwendet? Finde die erzeugenden Terme. Entwickle eigene „Rätsel“.

Name 1: Name 2:

Term 2: Term 2:

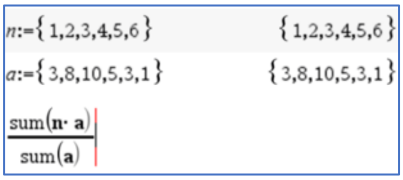


Vertiefungen:

5. Definiere den Term *z(x).* Gib eine Vermutung dafür an, wie der Term *z(z(x))* aussieht. Berechne *z(z(x))* mit dem CAS-Rechner und vergleiche das Ergebnis mit deiner Vermutung.
   a) $z(x) := x + 1$ b) $z(x) := \frac{1}{x}$ c) $z(x) := \frac{1}{x-1}$ d) $z(x) := 2$

6. Bei einer Mathe-Arbeit ergab sich folgender Notenspiegel:

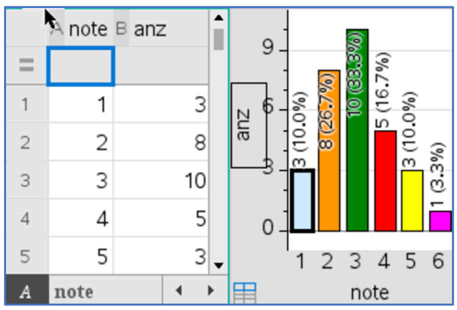
Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	8	10	5	3	1



   a) Erläutere die Bedeutung der nebenstehenden Rechnung von Phi Nung in diesem Sachzusammenhang.

   b) Francis will die Noten unter der Variablen „not“ speichern und erhält nebenstehende Fehlermeldung. Erkläre, woran das liegen könnte.

   c) Öffne in einer neuen Seite die Anwendung ***Lists&Spreadsheet***. Übertrage die Listen des Notenspiegels in die Spalten A und B, indem du in den Spaltenkopf die zugehörigen Variablen *note* bzw. *anz* einträgst und mit enter bestätigst. Über menu – *Daten – Ergebnisdiagramm* erzeugst du eine Säulendarstellung aus zusammenhängenden Säulen, ein Histogramm. Setze dann den Cursor auf die waagerechte Achse und wähle ctrl menu – *Kategorisches X erzwingen.* Du erhältst dann das Säulendiagramm mit getrennten und verschiedenfarbigen Säulen. Versuche, das Verfahren zu realisieren und beschreibe dein Vorgehen.



LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 2:

Aufgabe 1:

Zeile 1: $\frac{3a-6b}{3}=\frac{3\cdot(a-2b)}{3}=a-2b$

Zeile 2: $2^{3+1}=2^4=16$

Zeile 3: $3^2+1=9+1=10$

Zeile 4: $\sqrt{x^2}=|x|$, weil x sowohl nicht negativ als auch negativ sein kann. Dann wäre x² in jedem Fall nicht negativ und man kann die Wurzel ziehen.

$\frac{3\cdot a-6\cdot b}{3}$	$a-2\cdot b$
2^{3+1}	16
3^2+1	10
$\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert$

$\sqrt{2^2}$	2
$\sqrt{(-2)^2}$	2

Zeile 1: $\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)}=\frac{1}{2-b}=\frac{-1}{b-2}$

Zeile 2: $\frac{a^2-a}{a-1}=\frac{a\cdot(a-1)}{a-1}=a$

Zeile 3: $\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1}=\frac{\frac{1-(x+1)}{x}}{x+1}=\frac{\frac{1-x-1}{x}}{x+1}=\frac{\frac{-x}{x}}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$

⚠ $\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)}$	$\frac{-1}{b-2}$
⚠ $\frac{a^2-a}{a-1}$	a
⚠ $\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1}$	$\frac{-1}{x+1}$

Die Warnhinweise betreffen wieder die Definitionsbereiche von eingegebenem und ausgegebenem Term. Sie sind in jedem Falle berechtigt:

Zeile	**DB eingegebener Term**	**DB ausgegebener Term**
1	$b\in\mathbb{Q}, b\neq -1, b\neq 2$	$b\in\mathbb{Q}, b\neq 2$
2	$a\in\mathbb{Q}, a\neq 1$	$a\in\mathbb{Q}$
3	$x\in\mathbb{Q}, x\neq -1, x\neq 0$	$x\in\mathbb{Q}, x\neq -1$

Aufgabe 2a:

$V=8\cdot a^3=8\cdot(5\,cm)^3=8\cdot 125\,cm^3=1000\,cm^3$

Aufgabe 2b:

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot(5\,cm)^3=\frac{125}{3}\cdot\sqrt{2}\,cm^3\approx 58{,}9\,cm^3$$

Aufgabe 2c:

$$\left(\frac{3\,m\cdot 2\,m}{2}+3\,m\cdot 3\,m\right)\cdot 5\,m=60\,m^3$$

Aufgabe 3a:

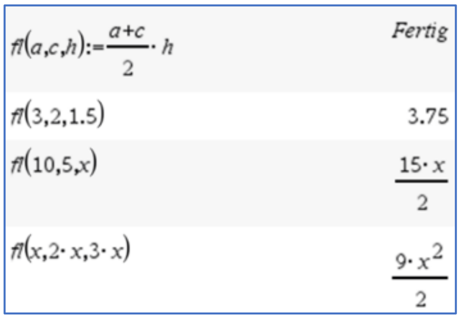
a und c sind die Längenmaße der zueinander parallelen Seiten, h ist die Maßzahl der Höhe und fl die Maßzahl des Flächeninhalts.

$fl(a,c,h):=\frac{a+c}{2}\cdot h$	*Fertig*

Aufgabe 3b:

In ein und derselben Formel kann man nicht zwei oder mehrere Größen durch die gleiche Variable beschreiben. Es kommt zu Fehlermeldungen. Die Eingabe $a(a,c,h):=\frac{a+c}{2}\cdot h$ ergibt diese Fehlermeldung:

Aufgabe 3c:



fl(3,2,1.5): Das Trapez mit den Grundseiten von 3 LE und 2 LE sowie einer Höhe von 1,5 LE hat einen Flächeninhalt von 3,75 FE. Die längere Grundseite ist um 1 LE größer als die andere und die Höhe halb so groß wie die längere Grundseite.

fl(10,5,x): Das Trapez mit den Grundseiten von 10 LE und 5 LE sowie einer Höhe von x LE hat einen Flächeninhalt von $\frac{15}{2}\cdot x$ FE. Die längere Grundseite ist doppelt so groß wie die andere und die Höhe kann beliebig gewählt werden. Es sind aber nur positive Werte für die Höhe sinnvoll.

fl(x,2x,3x): Das Trapez mit den Grundseiten von x LE und 2x LE sowie einer Höhe von 3x LE hat einen Flächeninhalt von $\frac{9}{2}\cdot x^2$ FE. Die längere Grundseite ist doppelt so groß wie die andere und die Höhe dreimal so groß wie die kürzere Grundseite.

Aufgabe 3d:

[ctrl] [÷] [5] [+] [7] [×] [3] [enter] Hier fehlt der Nenner 2.

[(] [5] [+] [4] [)] [×] [0] [.] [5] [enter] Das würde gehen, denn für $\frac{1}{2}$ kann mit 0,5 multipliziert werden, allerdings müsste das Komma durch einen Punkt ersetzt werden.

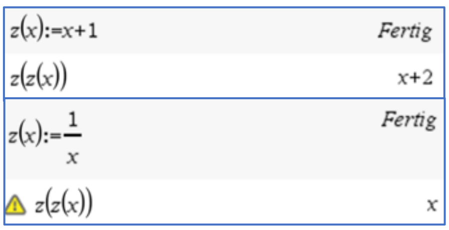
Aufgabe 4:

Erzeugender Name: „werner“;

Term 1 (Beispiel): $w\cdot e\cdot r\cdot n\cdot e\cdot r$ Term 2 (Beispiel): $w+e\cdot r+n+e\cdot r$

Aufgabe 5a:

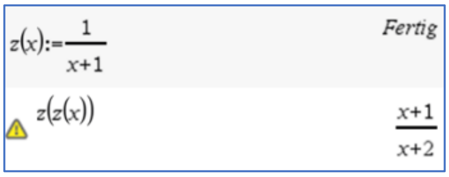
$z(x) \coloneqq x+1,\quad z(z(x)) = (x+1)+1 = x+2$



Aufgabe 5b:

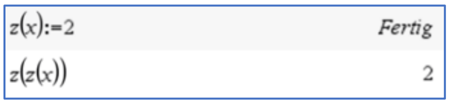
$z(x) \coloneqq \frac{1}{x};\ \ z(z(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

Aufgabe 5c:



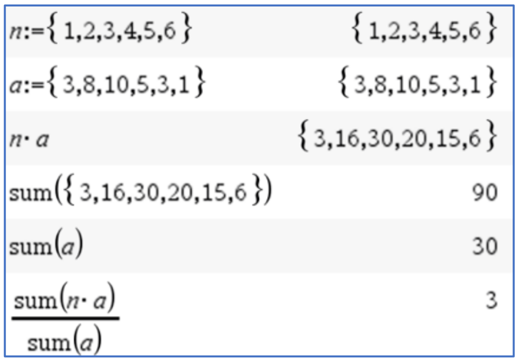
$z(x) := \frac{1}{x+1}$; $z(z(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2}$

Aufgabe 5d:



$z(x) := 2$; $z(z(x)) = 2$

Aufgabe 6a:



Die Variable *n* gibt die Liste der Noten an.
Die Liste a enthält die Anzahl der einzelnen Noten, also z. B. gibt es dreimal die Note 1 usw.
Das Produkt $n \cdot a$ gibt eine Liste zurück, deren Elemente die Produkte der Elemente gleicher Nummer beider Listen *n* und *a* sind.

$n \cdot a = \{1 \cdot 3, 2 \cdot 8, 3 \cdot 10, 4 \cdot 5, 5 \cdot 3, 6 \cdot 1\}$
$= \{3,16,30,20,15,6\}$

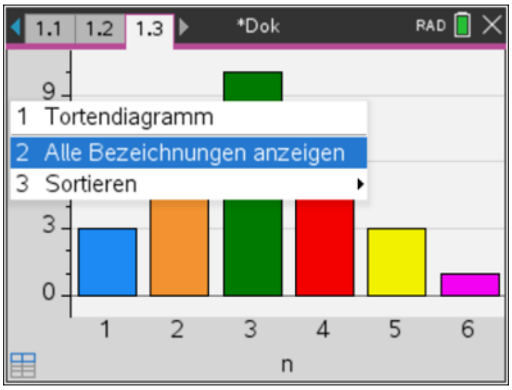
$sum(n \cdot a)$ gibt die Summe der Listenelemente zurück: $sum(n \cdot a)$=3+16+30+20+15+6=90
$sum(a)$ gibt analog die Liste der Anzahlen der erteilten Noten zurück, es wurden also 30 Arbeiten bewertet.
$\frac{sum(n \cdot a)}{sum(a)} = \frac{90}{30} = 3{,}0$ gibt den Notendurchschnitt bei der Klassenarbeit an.

Aufgabe 6b:

Der Name „not“ kann nicht als Variablenname verwendet werden, da er im TI als Befehl vorinstalliert ist.

Aufgabe 6c:

Einen großen Teil der Beschreibung des Vorgehens kann man dem Aufgabentext entnehmen. Zu ergänzen ist noch, wie man das mit dem Säulendiagramm und dem Bezeichnen hinbekommt:
Nach dem Schritt ctrl menu – *Kategorisches X erzwingen* setzt man den Cursor auf die Grafikoberfläche und wählt noch *„Alle Bezeichnungen anzeigen“.*
Beim Schritt menu – *Daten – Ergebnisdiagramm* wählt man für „x-Liste“ die Variable note und für *„Ergebnisliste“* die Variable anz aus und entscheidet sich, ob das Diagramm auf derselben Seite wie die Tabelle („*Seite teilen*“) oder auf einer neuen Seite angezeigt wird.



Arbeitsblatt 3: Arbeiten mit Variablen und Termen – Umformen von Termen mit CAS

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners. Beschreibe die Wirkung der verwendeten Befehle.

$\text{factor}(2\cdot x^2+6\cdot x)$	$2\cdot x\cdot(x+3)$
$\text{expand}(5\cdot a^2\cdot(1-a))$	$5\cdot a^2-5\cdot a^3$

menu - *Algebra – Faktorisiere*
menu - *Algebra – Entwickle*

2. Welche Zahl hat sich Daniel gedacht?
„Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie erst mit 7, das Ergebnis mit 11 und dieses wiederum mit 13. Von diesem Produkt subtrahiere ich die gedachte Zahl und dividiere das Ergebnis durch 1000."

3. Beschreibe eine Möglichkeit für eine handschriftliche Überprüfung der Anzeige des CAS-Rechners.

$\text{expand}\left(\frac{x^3-x^2}{x+1}\right)$	$\frac{-2}{x+1}+x^2-2\cdot x+2$

4. Wende den Befehl *domain(Term, Variable)* auf die folgenden Terme an, so wie in den nebenstehenden Beispielen.
a) $\sqrt{x+1}$ b) $\frac{1}{x^2-1}$ c) $\frac{1}{x^2+1}$
Beschreibe, wozu dieser Befehl verwendet wird.

$\text{domain}\left(\frac{1}{x}-1,x\right)$	$x\neq 0$
$\text{domain}\left(\frac{1}{x-1},x\right)$	$x\neq 1$

5. Beurteile, ob die Umformungen richtig sind. Benenne gegebenenfalls fehlerhafte Umformungen.

$$\frac{4}{a^2+5b^2}-\frac{10}{3a^2+5b^2}=\frac{4\cdot 3-10\cdot 1}{3a^2+5b^2}=\frac{2}{3a^2+5b^2}$$

Vertiefungen:

6. Unter menu *Algebra - Bruchwerkzeuge* gibt es verschiedene Befehle für die Arbeit mit Brüchen. Probiere diese Befehle aus und beschreibe ihre Wirkung.

7. Unter menu *Zahl* findest du weitere interessante Befehle für Zahlenterme. Untersuche die Handhabung und Wirkung der Befehle *Kleinstes gemeinsames Vielfaches* und *Größter gemeinsamer Teiler*. Bereite dazu einen kleinen Vortrag vor.

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

Aufgabe 1

expand() versucht den eingegebenen Term in eine Summe und/oder eine Differenz einfacher Ausdrücke umzuformen. Dagegen versucht *factor()* den eingegebenen Term in ein Produkt und/oder einen Quotienten einfacher Faktoren umzuformen.

Aufgabe 2:

$$\frac{x \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - x}{1000} = \frac{1001x - 1x}{1000} = \frac{1000x}{1000} = x$$

$$\frac{x \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - x}{1000} \qquad x$$

Daniel erhält als Ergebnis immer die ursprünglich gedachte Zahl.

Aufgabe 3:

Eine von mehreren möglichen Überprüfungen besteht darin, den vom CAS zurückgegebenen Term durch Bilden des Hauptnenners und Zusammenfassen wieder in die ursprünglich gegebene Form zu bringen.

$$\frac{-2}{x+1} + x^2 - 2x + 2 = \frac{-2 + x^2 \cdot (x+1) - 2x \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{-2 + x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + 2x + 2}{x+1} = \frac{x^3 - x^2}{x+1}$$

Aufgabe 4:

Der Befehl *„domain(Term, Variable)“* gibt die Werte zurück, für die der Term in Bezug auf die eingegebene Variable nicht definiert ist oder für die er definiert ist. Man kann auf den rationalen Definitionsbereich schließen.

$$\mathrm{domain}\left(\sqrt{x+1}, x\right) \qquad -1 \le x < \infty$$

$$\mathrm{domain}\left(\frac{1}{x^2-1}, x\right) \qquad x \ne -1 \text{ and } x \ne 1$$

$$\mathrm{domain}\left(\frac{1}{x^2+1}, x\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

Aufgabe 5:

$$\frac{4}{a^2 + 5b^2} - \frac{10}{3a^2 + 5b^2} = \frac{4 \cdot 3 - 10 \cdot 1}{3a^2 + 5b^2} = \frac{2}{3a^2 + 5b^2}$$

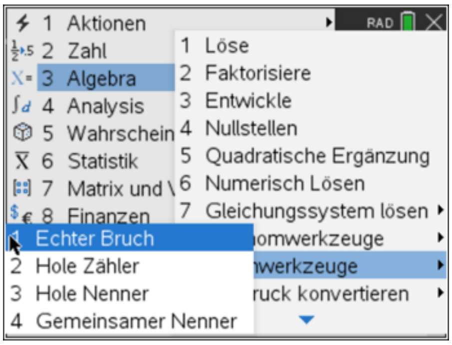
$$\mathrm{comDenom}\left(\frac{4}{a^2+5 \cdot b^2} - \frac{10}{3 \cdot a^2 + 5 \cdot b^2}\right)$$
$$\frac{2 \cdot a^2 - 30 \cdot b^2}{3 \cdot a^4 + 20 \cdot a^2 \cdot b^2 + 25 \cdot b^4}$$

Die Umformung ist fehlerhaft. Der Bildschirmabdruck zeigt eine richtige Lösung.
Der Fehler liegt in der falschen Berechnung des Hauptnenners, der hier nur aus den ersten Summanden beider Nenner gebildet wurde. Bei der Berechnung des Hauptnenners müssen die beiden einzelnen Nenner vollständig berücksichtigt werden. Zur Nutzung des CAS-Rechners vergleiche dazu Aufgabe 6.

$$\frac{4}{a^2 + 5b^2} - \frac{10}{3a^2 + 5b^2} = \frac{4 \cdot (3a^2 + 5b^2) - 10 \cdot (a^2 + 5b^2)}{(a^2 + 5b^2) \cdot (3a^2 + 5b^2)} = \frac{2a^2 - 30b^2}{3a^4 + 20a^2 \cdot b^2 + 25b^4}$$

Aufgabe 6:

Der Befehl *„Echter Bruch“* zerlegt einen unechten Bruch in eine Summe aus ganzzahligen und echt gebrochenen Anteilen.



$\text{propFrac}\left(\frac{45}{7}\right)$	$6+\frac{3}{7}$
⚠ $\text{propFrac}\left(\frac{a^2-1}{a}\right)$	$a-\frac{1}{a}$

Der Befehl *„Hole Zähler“* gibt den Zähler eines Bruches zurück. Bei kürzbaren Brüchen wie $\frac{34}{68}=\frac{1}{2}$ wird der Zähler des gekürzten Bruches zurückgegeben.

$\text{getNum}\left(\frac{34}{67}\right)$	34
$\text{getNum}\left(\frac{34}{68}\right)$	1
$\text{getNum}\left(\frac{x^3-2\cdot x}{x-1}\right)$	$x\cdot\left(x^2-2\right)$

Analoges gilt für *„Hole Nenner“*:

$\text{getDenom}\left(\frac{34}{67}\right)$	67
$\text{getDenom}\left(\frac{34}{68}\right)$	2
$\text{getDenom}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2}{x+1}\right)$	$x+1$

Die Anweisung *„Gemeinsamer Nenner“* bringt Bruchterme mit unterschiedlichen Nennern auf den gemeinsamen Hauptnenner.

$\text{comDenom}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right)$	$\frac{3-a}{3\cdot a}$
$\text{comDenom}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$	$\frac{x+y}{x\cdot y}$

Aufgabe 7:

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV):

lcm(Zahl1, Zahl2) (least common multiple)

gibt das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Argumente zurück.
Das ***lcm*** zweier Brüche ist das ***lcm*** ihrer Zähler dividiert durch den größten gemeinsamen Teiler *(**gcd**)* ihrer Nenner.
Das ***lcm*** von Dezimalbruchzahlen ist ihr Produkt.

$\operatorname{lcm}(2,3)$	6
$\operatorname{lcm}\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$	3
$\operatorname{lcm}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{2}$
$\operatorname{lcm}(1.2,0.5)$	0.6

Der größte gemeinsame Teiler (ggT):

gcd(Zahl1, Zahl2) (greatest common divisor)

gibt den größten gemeinsamen Teiler der beiden Argumente zurück.
Der ***gcd*** zweier Brüche ist der ***gcd*** ihrer Zähler dividiert durch das kleinste gemeinsame Vielfache *(**lcm**)* ihrer Nenner.

$\gcd(3,12)$	3
$\gcd(18,12)$	6
$\gcd\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{6}$
$\gcd\left(\frac{3}{4},\frac{6}{7}\right)$	$\frac{3}{28}$

Arbeitsblatt 4: Arbeiten mit Variablen und Termen – Binomische Formeln mit CAS

1. Betrachte die beiden Screenshots.
   Welche Ergebnisse wird der CAS-Rechner anzeigen, wenn man [enter] drückt? Gib erst eine Prognose mithilfe binomischer Formeln an und überprüfe dann mit dem CAS-Rechner.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$a:=5\cdot p$	$5\cdot p$
$b:=-3\cdot q$	$-3\cdot q$
$\text{expand}\left((\mathbf{a}+\mathbf{b})^2\right)$	

$a:=-1.2\cdot x$	$-1.2\cdot x$
$b:=0.5\cdot x\cdot y$	$0.5\cdot x\cdot y$
$\text{expand}\left((\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right)$	

2. Ordne den Aussagen A, B und C die passende Rechnung zu und begründe mit deren Hilfe diese Aussagen. Welche der Aussagen lässt sich noch verschärfen (erweitern)?

A: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ebenfalls eine ungerade Zahl.

B: Das Quadrat einer geraden Zahl ist ebenfalls eine gera… Zahl.

C: Vermindert man das Quadrat einer ungeraden Zahl um 1, so erhält man eine Zahl, die sowohl durch 4 als auch durch 8 teilbar ist.

	$4\cdot n^2+4\cdot n$
	$4\cdot n\cdot(n+1)$

$(2\cdot n)^2$	$4\cdot n^2$

$…((2\cdot n+1)^2)$	$4\cdot n^2+4$

3. Öffne ein ***Notes***-Arbeitsblatt. Definiere in einem Mathe-Feld ([ctrl] [M]) die Variable a := 3 und gib in einem zweiten Mathe-Feld den Term $\frac{a^2-1}{a+1}$ ein. Gib dann für a verschiedene Zahlen ein und vergleiche jede eingegebene Zahl a mit dem zugehörigen Termwert. (Bestätige alle Eingaben mit [enter].) Beschreibe deine Beobachtung und begründe den Zusammenhang mithilfe einer binomischen Formel.

$\mathbf{a}:=3 \blacktriangleright 3$

$\frac{\mathbf{a}^2-1}{\mathbf{a}+1} \blacktriangleright 2$

Vertiefung:

4. Die Entwicklung der Potenzen von a und b sowie die Werte der Koeffizienten in den Summendarstellungen von $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ usw. folgen einem bestimmten Muster. Beschreibe dieses Muster mit eigenen Worten. Nutze dazu auch das Pascalsche Dreieck.[3]

   Wie sieht die Summendarstellung von $(a+b)^6$ aus?

Das Pascalsche Dreieck:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

$\text{expand}\left((a+b)^3\right)$	$a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

[3] https://images.gutefrage.net/media/fragen-antworten/bilder/26181075/0_big.jpg?v=1308836886000

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 4:

Aufgabe 1:

$(5p-3q)^2 = 25p^2 - 30p \cdot q + 9q^2$

$(-1{,}2x - 0{,}5x \cdot y) \cdot (-1{,}2x + 0{,}5x \cdot y) = 1{,}44x^2 - 0{,}25x^2 \cdot y^2$

Aufgabe 2:

A gehört zu

$\text{expand}\left((2\cdot n+1)^2\right) \qquad 4\cdot n^2+4\cdot n+1$

Begründung: Die ersten beiden Summanden sind gerade Zahlen, deren Summe ist ebenfalls gerade und wenn man 1 dazu addiert, erhält man eine ungerade Zahl.

B gehört zu

$(2\cdot n)^2 \qquad 4\cdot n^2$

Begründung: Da das Ergebnis den Faktor 4 enthält, ist es durch 4 teilbar, also ist es auch durch 2 teilbar und deshalb eine gerade Zahl.

C gehört zu

$(2\cdot n+1)^2-1 \qquad 4\cdot n^2+4\cdot n$

$\text{factor}\left(4\cdot n^2+4\cdot n\right) \qquad 4\cdot n\cdot (n+1)$

Das Produkt enthält den Faktor 4, also ist es durch 4 teilbar. Die Zahlen n und n+1 sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen immer eine gerade ist, deshalb ist das Produkt auch durch 2 teilbar. Wenn das Produkt durch 4 und durch 2 teilbar ist, ist es auch durch 8 teilbar.
Verschärfen bzw. erweitern lässt sich Aussage B, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist nicht nur durch 2, sondern auch durch 4 teilbar.

Aufgabe 3:

Als Ergebnis wird immer (außer für a = -1) eine Zahl angezeigt, die um 1 kleiner ist als die eingegebene Zahl. Das liegt an folgender Termumformung:

$\frac{a^2-1}{a+1} = \frac{a^2-1^2}{a+1} = \frac{(a+1)\cdot(a-1)}{(a+1)} = a-1$

Aufgabe 4:

Beschreibung des Pascalschen Dreiecks: Oben steht ein Dreieck aus drei Einsen. In den folgenden Zeilen steht am Anfang und am Ende auch jeweils eine Eins. Dazwischen liegen Zahlen, die sich als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen ergeben. Die Zahlen des Pascalschen Dreiecks aus der n-ten Reihe sind die Koeffizienten in der Summenentwicklung von $(a+b)^n$. Die Exponenten der Potenzen von a und b in jedem Summanden beginnen bei a mit n und bei b mit 0. Bei a werden sie immer um 1 kleiner und bei b um 1 größer. Beide Potenzen werden miteinander und mit den Koeffizienten multipliziert. Aus diesen Produkten wird die Summe gebildet.

$$(a+b)^6 = 1a^6 \cdot b^0 + 6a^5 \cdot b^1 + 15a^4 \cdot b^2 + 20a^3 \cdot b^3 + 15a^2 \cdot b^4 + 6a^1 \cdot b^5 + 1a^0 \cdot b^6$$

Arbeitsblatt 5: Lösen von Gleichungen mit CAS

Nutzung des CAS-Rechners zur Kontrolle der Ergebnisse beim handschriftlichen Umformen von Gleichungen:

Beim Umformen von Gleichungen werden oft Fehler gemacht, da die Äquivalenzumformungen nicht richtig angewendet werden. Der TI-Nspire bietet hier die Möglichkeit, die einzelnen Schritte zu kontrollieren bzw. Fehler zu erkennen. Die umzuformende Gleichung muss in Klammern gesetzt werden und hinter die Klammer wird der Umformungsschritt angegeben. Eine Überprüfung des Ergebnisses ist für eine Belegung der Variablen x möglich.	$(3\cdot x-4=5\cdot x)+3\cdot x$ → $6\cdot x-4=8\cdot x$ $(3\cdot x-4=5\cdot x)-3\cdot x$ → $-4=2\cdot x$ $\frac{-4=2\cdot x}{2}$ → $-2=x$ $3\cdot x-4=5\cdot x \mid x=-2$ → true $3\cdot x-4=5\cdot x \mid x=3$ → false

Auch kompliziertere Gleichungen lassen sich unter Anwendung des *solve*-Befehls mit dem CAS „auf Knopfdruck" lösen. Da Leistungsüberprüfungen auch ohne Hilfsmittel stattfinden, sollte das händische Lösen von Gleichungen trotzdem geübt werden.

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners.

$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}-0.25\right)\cdot x,x\right)$	$x=0.$
$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}+0.75\right)\cdot x,x\right)$	true
$\text{solve}\left(1=\left(\sqrt{4}-2\right)\cdot x,x\right)$	false

menu – *Algebra – Löse*
solve (Gleichung, Variable)

2. Gegeben sei ein Trapez mit dem Flächeninhalt 100 cm², der Höhe 4 cm und der Länge einer der parallelen Seiten von 15 cm. Gesucht ist die Länge der anderen parallelen Seite.
   a) Begründe, dass der Lösungsansatz richtig ist. Übernimm den Ansatz auf deinen CAS-Rechner und beende die Rechnung mit enter. Formuliere einen Antwortsatz.

   $\text{solve}\left(100=\frac{x+15}{2}\cdot 4,x\right)$

   b) Löse die Gleichung $100=\frac{x+15}{2}\cdot 4$ handschriftlich ohne CAS. Überprüfe deine Umformungsschritte mit dem CAS.

3. Wer mit dem Taxi fährt, muss mit einer Grundgebühr von „g" Euro rechnen. Jeder gefahrene Kilometer kostet „x" Euro. Nach „f" km Fahrt werden die Kosten durch die „n" Fahrgäste gleichmäßig aufgeteilt.
   a) Begründe, weshalb sich dieser Sachverhalt durch den Term $\frac{f\cdot x+g}{n}$ mathematisch modellieren lässt. Welche Grundbereiche sind für die Variablen sinnvoll?
   b) Wie teuer ist ein gefahrener Kilometer bei einer Grundgebühr von 5 Euro, wenn jeder der zwei Fahrgäste für die 36 km Fahrstrecke 40,30 Euro zahlen muss?

Vertiefungen:

4. Jemand löst die Gleichung $x-(a-3x)=4\cdot(x+1)$ nach x mit dem CAS.

$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x) \quad a=-4$

   a) Was bedeutet das Ergebnis für die Lösungsmenge von x?
   b) Welche Lösungsmenge hat die Gleichung für a = 0?

5. Löse die Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ nach a sowohl mit dem CAS als auch handschriftlich.

6. Gib die nebenstehende Gleichung in den CAS-Rechner ein und ermittle das Ergebnis. Der Rechner zeigt eine Warnung an. Ist diese Warnung berechtigt?

$$\text{solve}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=n,x\right)$$

7. Interpretiere die Ergebnisanzeige des CAS-Rechners, indem du die Gleichung zunächst handschriftlich löst.

$\text{solve}\left(\frac{x}{2}-3=2\cdot x-\frac{3}{2}\cdot x-3,x\right) \quad \text{true}$

8. In dem nebenstehenden Dokument wird ein „Beweis" vorgeführt, mit dem gezeigt wird, dass angeblich 0 = 1 eine wahre Aussage ist.
   a) Vollziehe die Lösungsschritte zunächst ohne CAS-Rechner nach und suche den oder die Umformungsfehler.
   b) Nutze dann deinen CAS-Rechner für die einzelnen Umformungsschritte. Beobachte und erkläre die Ausgaben des Rechners nach jedem Schritt.

$$\begin{aligned}
& a=b \mid \cdot a\\
\Leftrightarrow\ & aa=ba\\
\Leftrightarrow\ & a^2=ab \mid +a^2\\
\Leftrightarrow\ & a^2+a^2=ab+a^2\\
\Leftrightarrow\ & 2a^2=a^2+ab \mid -2ab\\
\Leftrightarrow\ & 2a^2-2ab=a^2-ab\\
\Leftrightarrow\ & 2aa-2ab=aa-ab\\
\Leftrightarrow\ & 2a(a-b)=a(a-b) \mid :(a-b)\\
\Leftrightarrow\ & 2a=a \mid :a\\
\Leftrightarrow\ & 2=1 \mid -1\\
\Leftrightarrow\ & 1=0
\end{aligned}$$

9. Gegeben ist die Gleichung 4x = 16. Durch Multiplikation mit x erhält man daraus 4x² = 16x. Sind diese beiden Gleichungen zueinander äquivalent? Prüfe erst durch Nachdenken und „frage" dann deinen CAS-Rechner.

10. Gegeben ist die Gleichung 3x = 9. Quadriert man beide Seiten der Gleichung, so erhält man 9x² = 81. Untersuche, ob beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge besitzen. Wähle zunächst als Grundbereich die natürlichen Zahlen und dann die rationalen Zahlen. Was gibt dein CAS-Rechner zurück?

11. Ein Autofahrer hat die gefahrene Strecke (in Kilometer) und den Kraftstoffverbrauch (in Liter) notiert.
    a) Gib einen Term an, mit dem sich der Verbrauch auf 100 km berechnen lässt.
    b) Realisiere diese Berechnung in der Tabellenkalkulation.
    c) Berechne analog, wie viele Kilometer pro Liter gefahren wurden.

	A strecke	B verbrauch
=		
1	305	19
2	283	20
3	375	28
4	439	31

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 5:

Aufgabe 1:
Zeile 1 führt auf $x = 0 \cdot x$. Diese Gleichung wird nur für x = 0 zu einer wahren Aussage.
Zeile 2 führt auf $x = 1 \cdot x$. Diese Gleichung wird für alle Zahlen x zu einer wahren Aussage.
Zeile 3 führt auf $1 = 0 \cdot x$. Diese Gleichung wird für keine Zahl x zu einer wahren Aussage. Es ist immer eine falsche Aussage.

$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}-0.25\right)\cdot x,x\right)$	$x=0.$
$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}+0.75\right)\cdot x,x\right)$	true
$\text{solve}\left(1=\left(\sqrt{4}-2\right)\cdot x,x\right)$	false

Aufgabe 2a:
Der Ansatz ist richtig. Die Länge der anderen parallelen Seite beträgt 35 cm.

$\text{solve}\left(100=\frac{x+15}{2}\cdot 4,x\right)$	$x=35$

Aufgabe 2b:

$100 = \frac{x+15}{2} \cdot 4$ | : 4
$25 = \frac{x+15}{2}$ | · 2
$50 = x + 15$ |- 15
$35 = x$

$\frac{100=\frac{x+15}{2}\cdot 4}{4}$	$25=\frac{x+15}{2}$
$\left(25=\frac{x+15}{2}\right)\cdot 2$	$50=x+15$
$(50=x+15)-15$	$35=x$

Aufgabe 3a:
$\frac{f \cdot x+g}{n}$: Der Summand $f \cdot x$ gibt die Kosten an, die durch f Kilometer Fahrt bei einem Preis von x Euro pro Kilometer entstehen. Dazu wird die Grundgebühr g in Euro addiert, die auch ohne Fahrt anfällt. Der Zähler $f \cdot x + g$ ergibt die Gesamtkosten. Werden diese durch die Anzahl n der Fahrgäste geteilt, so kommt der Betrag heraus, den jeder Fahrgast zahlen muss, falls die Kosten gleichmäßig verteilt werden.
Sinnvolle Grundbereiche für f, g und x sind die positiven rationalen Zahlen und für n die natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3b:
Aus dem Ansatz $\frac{36 \cdot x+5}{2} = 40{,}30$ ergibt sich x = 2,1 Euro/km.

$\text{solve}\left(\frac{36\cdot x+5}{2}=40.3,x\right)$	$x=2.1$

Aufgabe 4a:
$x-(a-3x)=4\cdot(x+1)$ führt auf $4x-a=4x+4$.
Wenn a = - 4 ist, dann ist jede rationale Zahl eine Lösung der gegebenen Gleichung.
Für alle rationalen Zahlen $a\neq$ - 4, gibt es keine Lösung.

$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\vert a=-4$	true
$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\vert a\neq-4$	false
$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\vert a=0$	false

Aufgabe 4b:
Für a = 0 hat demzufolge die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 5:
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\quad \vert -\frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ | Hauptnenner auf der rechten Seite

$\frac{1}{a}=\frac{b}{b\cdot c}-\frac{c}{b\cdot c}$ | zusammenfassen

$\frac{1}{a}=\frac{b-c}{b\cdot c}$ | Kehrwerte auf beiden Seiten bilden

$a=\frac{b\cdot c}{b-c}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c},a\right) \qquad a=\frac{b\cdot c}{b-c}$

Aufgabe 6:

$\text{solve}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=n,x\right) \qquad x=n$

Achtung
Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe.
OK

Der Warnhinweis ist berechtigt, denn die Gleichung x = n ist für alle rationalen Zahlen definiert, während die gegebene Gleichung für x = 1 nicht definiert ist, weil dann der Nenner null ist.

Aufgabe 7:
$\frac{x}{2}-3=2x-\frac{3}{2}x-3$ | + 3
$\frac{x}{2}=2x-\frac{3}{2}x$ | zusammenfassen
$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x$ | $\cdot$ 2
$x=x$
Die Gleichung ist für alle rationalen Zahlen erfüllt.

Aufgabe 8:

In der ersten Zeile von oben wird die Multiplikation mit a angekündigt. Das macht nur Sinn, wenn a nicht null ist.
In der vierten Zeile von unten wird die Division durch a – b angekündigt. Das ist nur möglich, wenn diese Differenz nicht null ist. In der ersten Zeile steht aber a = b, also wird hier eine „verbotene“ Rechenoperation durchgeführt.
In der dritten Zeile von unten wird die Division durch a angekündigt. Das ist nur möglich, wenn diese Zahl nicht null ist.
Rechnung mit CAS-Rechner:

$$
\begin{aligned}
& a = b \mid \cdot a \\
\Leftrightarrow\ & aa = ba \\
\Leftrightarrow\ & a^2 = ab \mid + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + a^2 = ab + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = a^2 + ab \mid -2ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 - 2ab = a^2 - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2aa - 2ab = aa - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a(a-b) = a(a-b) \mid : (a-b) \\
\Leftrightarrow\ & 2a = a \mid : a \\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 \mid -1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 0
\end{aligned}
$$

$(a=b)\cdot a$	$a^2=a\cdot b$
$(a^2=a\cdot b)+a^2$	$2\cdot a^2=a^2+a\cdot b$
$(2\cdot a^2=a^2+a\cdot b)-2\cdot a\cdot b$	$2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b=a^2-a\cdot b$
$\text{factor}(2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b=a^2-a\cdot b)$	$2\cdot a\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)$
$\dfrac{2\cdot a\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)}{a-b}$	$2\cdot a=a$
$\dfrac{2\cdot a=a}{a}$	$2=1$

Aufgabe 9:

Die Gleichung 4x = 16 hat nur die Lösung x = 4.
Die Gleichung 4x² = 16x hat die Lösungen x = 4 und x = 0.
Da die Lösungsmengen verschieden voneinander sind, sind die Gleichungen nicht zueinander äquivalent.

$\text{solve}(4\cdot x=16,x)$	$x=4$
$\text{solve}(4\cdot x^2=16\cdot x,x)$	$x=0$ or $x=4$

Aufgabe 10:

Die Gleichung 3x = 9 hat nur die Lösung x = 3. Die Gleichung 9x² = 81 hat im Bereich der rationalen Zahlen die Lösungen x = – 3 und x = 3, aber im Grundbereich der natürlichen Zahlen fällt dann die Lösung x = – 3 weg.

$\text{solve}(3\cdot x=9,x)$	$x=3$
$\text{solve}((3\cdot x)^2=9^2,x)$	$x=-3$ or $x=3$

Merke: Das Quadrieren einer Gleichung ist im Allgemeinen keine äquivalente Umformung.

Aufgabe 11a:

$$\frac{verbrauch}{strecke} \cdot 100$$

Aufgabe 11b:

	A str...	B ver...	C
=			=verbrauch/strecke*100.
1	305	19	6.22951
2	283	20	7.06714
3	375	28	7.46667
4	439	31	7.0615

c $=\frac{verbrauch}{strecke} \cdot 100.$

Aufgabe 11c:

Der Quotient $\frac{strecke}{verbrauch}$ gibt an, wie viele Kilometer pro Liter gefahren wurden.

=strecke/verbrauch*1.
16.0526
14.15
13.3929
14.1613

Die Multiplikation mit der Dezimalzahl 1**.** erfolgt, damit die Ergebnisse als Dezimalzahlen angegeben werden.

Arbeitsblatt 6: Lösen von Ungleichungen mit CAS

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners.

$\text{solve}(x^2<0,x)$	false
$\text{solve}(2\cdot x\geq 1-x,x)$	$x\geq\frac{1}{3}$
$\text{solve}(\lvert x\rvert>0,x)$	$x\neq 0$
$\text{solve}(\lvert x\rvert\geq 0,x)$	true

menu - *Algebra – Löse*
solve (Gleichung, Variable)

ctrl = öffnet diese Zweitbelegung:

>	<	≠
≥	≤	|

2. Beschreibe anhand nebenstehender Rechnungen die Wirkung der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl auf das Relationszeichen.

$(x-1<2)\cdot -1$	$-(x-1)>-2$
$(a\cdot x+2\cdot x\geq b)\cdot -2$	$-2\cdot (a+2)\cdot x\leq -2\cdot b$
$(m\cdot x\leq c)\cdot c\mid c<0$	$c\cdot m\cdot x\geq c^2$ and $c<0$

3. Beurteile, für welche rationalen Zahlen die folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind. Versuche erst eine Lösung durch Nachdenken zu finden, überprüfe dann deine Lösung mithilfe des CAS-Rechners.
   a) Eine Zahl ist kleiner als ihre Hälfte.
   b) Eine Zahl ist größer als ihr Doppeltes.

4. Untersuche mithilfe eines ***Notes***-Arbeitsblattes anhand selbstgewählter Beispiele, ob man Ungleichungen auf beiden Seiten quadrieren darf, ohne dass sich ihr Wahrheitswert ändert.

$a:=1$ ▸ 1	$b:=2$ ▸ 2
$a<b$ ▸ true	$a^2<b^2$ ▸ true

Hinweis: Öffne in einem neuen Dokument die Anwendung ***Notes***. Gib mit ctrl M vier „Mathe-Felder“ zum Eingeben der Variablen und Ungleichungen ein. Probiere systematisch verschiedene Werte für a und b aus und beurteile die Ergebnisse mit Blick auf die Problemstellung. Beachte, dass bei Änderung eines Eintrages in einem Mathe-Feld diese Änderung mit enter abgeschlossen wird.

5. Denke dir vier verschiedene Ungleichungen mit der Lösungsmenge $\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{Q}; x\leq -1\}$ aus. Lasse deinen Banknachbarn mit dem CAS-Rechner überprüfen, ob du passende Ungleichungen gefunden hast.

6. Martins Eltern wollen sich zwischen zwei Stromtarifen entscheiden. Der Anbieter A verlangt eine Grundgebühr von 150 € und 29,6 Ct/kWh. Bei Anbieter B liegen die Konditionen bei 110 € Grundgebühr und 30,8 Ct/ kWh. Berechne, wie viele Kilowattstunden (kWh) höchstens verbraucht werden können, damit der Anbieter B günstiger für Martins Eltern ist.

Vertiefung:

7. Der CAS-Rechner löst die Ungleichung auf Knopfdruck. Erläutere, was bei einer handschriftlichen Lösung zu beachten ist, gehe dabei z. B. auf notwendige Fallunterscheidungen ein.

$$\text{solve}((2\cdot x+3)\cdot(6-3\cdot x)>0,x) \qquad \frac{-3}{2}<x<2$$

8. Löse die Ungleichung $\frac{x^2-2x}{x^2-4} \leq 2$ mit $x \neq \pm 2$ handschriftlich. Führe mögliche Termumformungen bzw. Fallunterscheidungen durch. Kontrolliere mit dem CAS-Rechner deine Lösung.

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1:
Interpretationen:
Zeile 1: Das Quadrat einer Zahl ist niemals negativ, deshalb erfolgt die Anzeige „*false*“.
Zeile 2: Die Ungleichung wird umgeformt wie eine Gleichung.
$2x \geq 1 - x|$ + x
$3x \geq 1$ | : 3
$x \geq \frac{1}{3}$

$\text{solve}(x^2<0,x)$	false
$\text{solve}(2\cdot x\geq 1-x,x)$	$x\geq\frac{1}{3}$
$\text{solve}(\lvert x\rvert>0,x)$	$x\neq 0$
$\text{solve}(\lvert x\rvert\geq 0,x)$	true

Zeile 3: Der Betrag einer rationalen Zahl ist immer größer als null, mit Ausnahme der Zahl Null, denn deren Betrag ist gleich null.
Zeile 4: Der Betrag einer rationalen Zahl ist immer größer oder gleich null (Begründung siehe Zeile 3).

Aufgabe 2:
Die Darstellungen machen deutlich, dass bei der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl nicht nur jede Seite mit dieser negativen Zahl multipliziert wird, sondern dass sich außerdem das Relationszeichen umkehrt.

$(x-1<2)\cdot -1$	$-(x-1)>-2$
$(a\cdot x+2\cdot x\geq b)\cdot -2$	$-2\cdot(a+2)\cdot x\leq -2\cdot b$
$(m\cdot x\leq c)\cdot c\mid c<0$	$c\cdot m\cdot x\geq c^2$ and $c<0$

Aufgabe 3a:
Eine Zahl ist kleiner als ihre Hälfte: Dies gilt für alle negativen Zahlen.
$x < \frac{x}{2}$ $|-\frac{x}{2}$
$\frac{x}{2} < 0$ | ·2
$x < 0$

$\text{solve}\left(x<\frac{x}{2},x\right)$	$x<0$

Aufgabe 3b:
Eine Zahl ist größer als ihr Doppeltes: Dies gilt ebenfalls für alle negativen Zahlen
$x > 2x$ | – 2x
$-x > 0$ | $\cdot(-1)$
$x < 0$ | Das Relationszeichen kehrt sich um!

$\text{solve}(x>2\cdot x,x)$	$x<0$

Aufgabe 4: Lösungen selbstgewählter Beispiele

$a:=-1$ ▸ -1 $a<b$ ▸ true	$b:=3$ ▸ 3 $a^2<b^2$ ▸ true	Wahrheitswert bleibt gleich.
$a:=-1$ ▸ -1 $a<b$ ▸ false	$b:=-3$ ▸ -3 $a^2<b^2$ ▸ true	Wahrheitswert ändert sich.
$a:=-3$ ▸ -3 $a<b$ ▸ true	$b:=-1$ ▸ -1 $a^2<b^2$ ▸ false	Wahrheitswert ändert sich.
$a:=\frac{1}{2}$ ▸ $\frac{1}{2}$ $a<b$ ▸ false	$b:=\frac{1}{4}$ ▸ $\frac{1}{4}$ $a^2<b^2$ ▸ false	Wahrheitswert bleibt gleich.
$a:=\frac{1}{9}$ ▸ $\frac{1}{9}$ $a<b$ ▸ true	$b:=\frac{1}{3}$ ▸ $\frac{1}{3}$ $a^2<b^2$ ▸ true	Wahrheitswert bleibt gleich.
$a:=\frac{-1}{9}$ ▸ $\frac{-1}{9}$ $a<b$ ▸ false	$b:=\frac{-1}{3}$ ▸ $\frac{-1}{3}$ $a^2<b^2$ ▸ true	Wahrheitswert ändert sich.
$a:=\frac{-1}{3}$ ▸ $\frac{-1}{3}$ $a<b$ ▸ true	$b:=\frac{1}{9}$ ▸ $\frac{1}{9}$ $a^2<b^2$ ▸ false	Wahrheitswert ändert sich.
$a:=\frac{-1}{3}$ ▸ $\frac{-1}{3}$ $a<b$ ▸ true	$b:=\frac{2}{3}$ ▸ $\frac{2}{3}$ $a^2<b^2$ ▸ true	Wahrheitswert bleibt gleich.

Vermutungen:

Wenn auf beiden Seiten einer Ungleichung negative Zahlen stehen und jede Seite quadriert wird, dann ändert sich der Wahrheitswert der Ungleichung.
Wenn auf der linken Seite der Ungleichung eine Zahl a zwischen – 1 und 0 und auf der rechten Seite eine Zahl b zwischen 0 und 1 steht und wenn gilt $|a| > |b|$, dann ändert sich nach dem Quadrieren der Wahrheitswert.
Merke: Quadrieren einer Ungleichung ist nicht immer eine äquivalente Umformung.

Aufgabe 5:
Lösungen individuell; Beispiele für Ungleichungen mit der Lösungsmenge
$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq -1\}$:

(1) $3x + 1 \leq 2x$
(2) $\frac{x}{2} + 1 \geq x + 1{,}5$
(3) $x^2 + x \geq 2x + x^2 + 1$

Aufgabe 6:
Kosten Anbieter A: $0{,}296 \cdot x + 150$
Kosten Anbieter B: $0{,}308 \cdot x + 110$
Dabei gibt x die Anzahl der verbrauchten Kilowattstunden an.
Lösung der Ungleichung:

$$\text{solve}(0.296 \cdot x + 150 > 0.308 \cdot x + 110, x)$$
$$x < 3333.33$$

Interpretation des Ergebnisses: Solange der Jahresverbrauch kleiner als 3 333,33 kWh ist, ist das Angebot von B günstiger.

Aufgabe 7:
Beim handschriftlichen Lösen der Ungleichung $(2x + 3) \cdot (6 - 3x) > 0$ lässt sich verwenden, dass auf der linken Seite der Ungleichung ein Produkt aus zwei Faktoren steht. Dieses Produkt ist größer als null, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind.

1. Fall: Beide Faktoren sind positiv.

   2x + 3 > 0 und 6 – 3x > 0
   2x > - 3 6 > 3x
   $x > -\frac{3}{2}$ x < 2
   Beide Lösungen lassen sich zusammenfassen zu $-\frac{3}{2} < x < 2$.

2. Fall: Beide Faktoren sind negativ.

   2x + 3 < 0 und 6 – 3x < 0
   2x < - 3 6 < 3x
   $x < -\frac{3}{2}$ x > 2
   Beide Lösungen sind unvereinbar, denn eine Zahl x kann nicht gleichzeitig kleiner als $-\frac{3}{2}$ und größer als 2 sein.
   Als Lösung bleibt nur $-\frac{3}{2} < x < 2$.

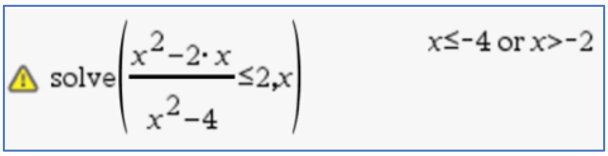
Aufgabe 8:

$\frac{x^2-2x}{x^2-4} \leq 2$

$\frac{x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} \leq 2$

$\frac{x}{(x+2)} \leq 2$

1. Fall: Falls x + 2 > 0 ist, bleibt das Relationszeichen nach dem Multiplizieren mit x + 2 erhalten. Wir setzen also $x > -2$ voraus.
   $x \leq 2 \cdot (x+2)$
   $x \leq 2x + 4$
   $-x \leq 4$
   $x \geq -4$
   Zusammen mit obiger Voraussetzung ($x > -2$) erhält man im 1. Fall die Lösungsmenge $x > -2$.
2. Fall: Falls x + 2 < 0 ist, kehrt sich das Relationszeichen nach dem Multiplizieren mit x + 2 um. Wir setzen also $x < -2$ voraus.
   $x \geq 2 \cdot (x+2)$
   $x \geq 2x + 4$
   $-x \geq 4$
   $x \leq -4$
   Zusammen mit obiger Voraussetzung ($x < -2$) erhält man im 2. Fall die Lösungsmenge $x \leq -4$.
   Die gegebene Ungleichung ist also für $x > -2$ oder $x \leq -4$ erfüllt.
   Lösung mit CAS-Rechner:



Checkliste Terme und Variablen

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
Terme ordnen und zusammenfassen.	Term eingeben und [enter] drücken $3\cdot y+7\cdot x-5-7\cdot y^2-3\cdot x+10$ $4\cdot x-7\cdot y^2+3\cdot y+5$		
Terme ausmultiplizieren.	Eingabe: [menu] *Algebra - Entwickle* $\text{expand}(2\cdot(a+3\cdot b))$ $2\cdot a+6\cdot b$		
Terme ausklammern.	Eingabe: [menu] *Algebra - Faktorisiere* $\text{factor}(4\cdot x-16\cdot x^2)$ $-4\cdot x\cdot(4\cdot x-1)$		
Terme und Variable definieren.	Eingabe von *Define* über [menu] *Aktionen – Definiere* oder := über [ctrl] oder mit sto→ über [ctrl] [var] $\text{Define } dreieck1(g,h)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ *Fertig* $m:=3$ 3 $5\rightarrow n$ 5 $\sqrt{m}\cdot n^2$ $25\cdot\sqrt{3}$ $dreieck1(10,2)$ 10 **dreieck1(m,n)**		
eine Variable mit einem Wert belegen.	„with"-Operator | eingeben: [ctrl] [=] $2\cdot(x-1)+5\vert x=4$ 11 $2\cdot(x-1)+5\vert x=\{1,2,a\}$ $\{5,7,2\cdot a+3\}$		
eine Variable löschen.	***Scratchpad*** oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Variable löschen* ***Scratchpad*** oder***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Lösche a – z* DelVar *x,dreieck1* *Fertig* **Lösche a–z** 1–Zeichen–Variablen a–z löschen? OK Abbruch		
eine Gleichung/ Ungleichung lösen.	***Scratchpad*** oder ***Calculator*** – [menu] – *Algebra – Löse* Solve(Gleichung,Lösungsvariable) $\text{solve}(2\cdot x-3=4\cdot x+7,x)$ $x=-5$		

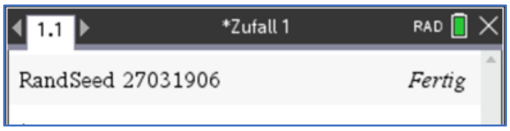
2. Inhaltsfeld Stochastik (Sto)

Inhaltliche Schwerpunkte:

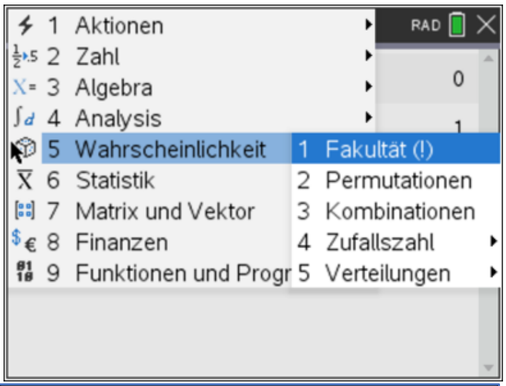
- Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: ein- und zweistufige Zufallsversuche, Baumdiagramm,
- stochastische Regeln: empirisches Gesetz der großen Zahlen, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Pfadregeln
- Begriffsbildung: Ereignis, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit

Technische Hinweise für Lehrkräfte

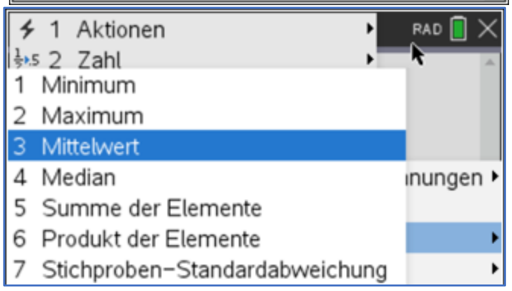
RandSeed - gefolgt von einer individuell von jedem Nutzer zu wählenden Ziffernfolge - sorgt dafür, dass jeder Teilnehmer andere Zufallszahlen auf seinem Rechner erhält. Mit **RandSeed 0** würde der Zufallsgenerator auf die Werkseinstellung zurückgesetzt und alle erhielten ein und dieselben Zufallszahlen.



Aus dem Untermenü *„Wahrscheinlichkeit“* lassen sich viele Anweisungen entnehmen, die für die Stochastik wichtig sind.



Aus dem Untermenü *„Statistik – Listen Mathematik“* lassen sich ebenfalls nützliche Anweisungen entnehmen:

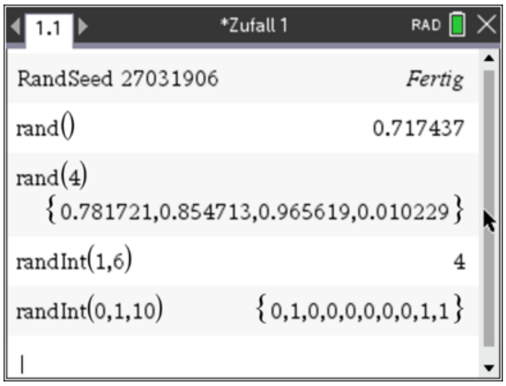


rand( ) gibt eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 zurück.

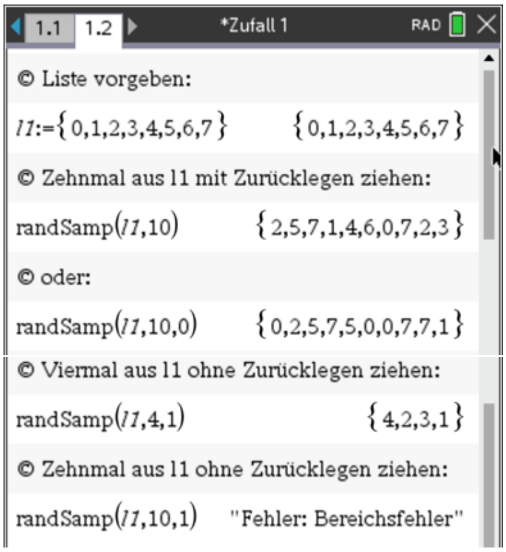
rand(n) gibt eine Liste mit n Zufallszahlen zwischen 0 und 1 zurück.

randInt(u,o) erzeugt eine ganzzahlige Zufallszahl z mit $u \leq z \leq o$.

randInt(u,o,m) erzeugt eine Liste von m ganzzahligen Zufallszahlen z mit $u \leq z \leq o$.

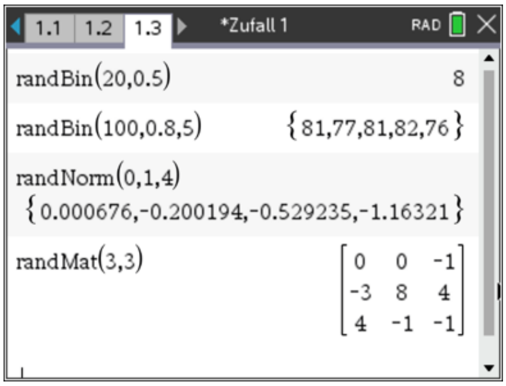


randSamp(Liste, m, 0 oder 1) erzeugt aus einer gegebenen Liste eine neue Liste mit m Elementen durch Ziehen mit Zurücklegen, wenn 0 eingegeben wurde (die 0 kann auch weggelassen werden).

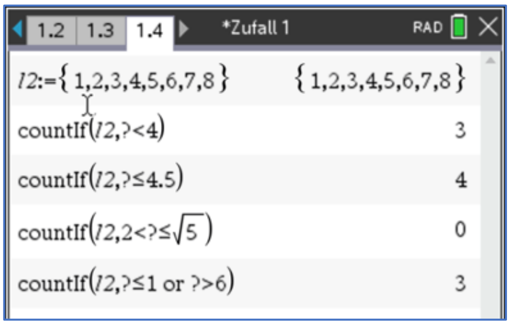


Für das Ziehen ohne Zurücklegen, muss 1 eingegeben wurde.
Die Fehlermeldung entsteht dadurch, dass man nicht mehr als achtmal aus einer Liste mit acht Elementen ohne Zurücklegen ziehen kann.

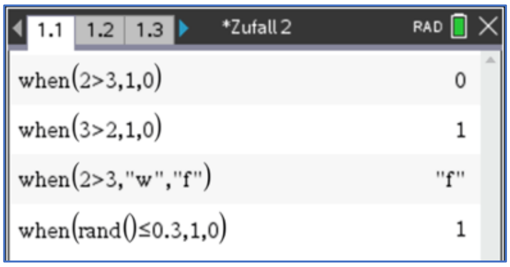
Weitere Befehle für die Erzeugung von Zufallszahlen kann man dem TI-NspireCAS_ReferenceGuide entnehmen, z. B*. randBin, randNorm, randMat.*
Sie sind für die Klassenstufe 8 aber noch nicht relevant.



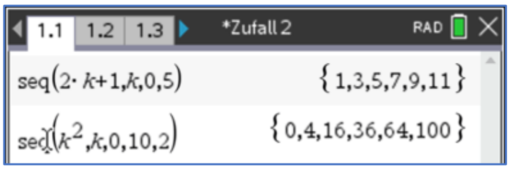
countIf(Liste, Kriterien) – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen.



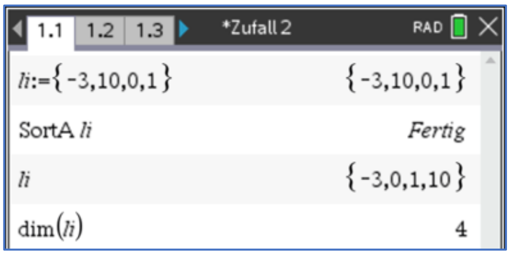
when(Bedingung, wahr, falsch)
Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***.



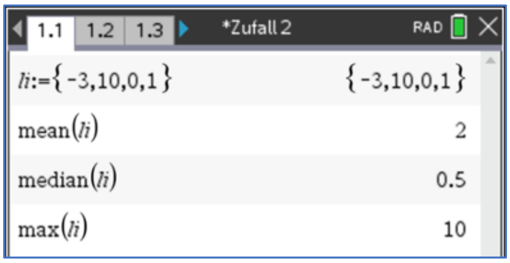
seq(Vorschrift, untere Grenze, obere Grenze)
erzeugt eine Liste (Folge) von Elementen nach einer Bildungsvorschrift.
Optional kann man noch die Schrittweite eingeben.



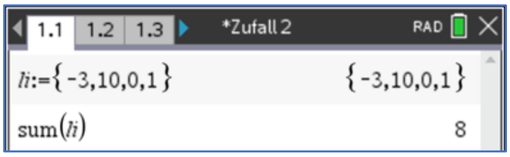
SortA liste sortiert die Liste aufwärts
SortD liste sortiert die Liste abwärts
dim(liste) ermittelt die Anzahl der Listenelemente
Die Sortierbefehle erzeugen je nach Befehl eine neue Anordnung der Listenelemente die ursprüngliche Liste ist dann nicht mehr vorhanden.



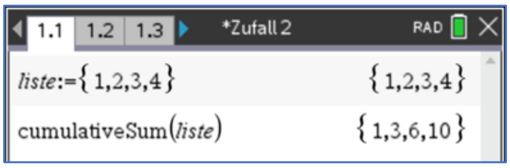
mean(liste) arithmetisches Mittel der Listenelemente
median(liste) Median der Listenelemente
max(liste)Listenelement mit dem größten Wert
min(liste) Listenelement mit dem kleinsten Wert
max(*liste*) – min(*liste*) Spannweite



sum(liste) berechnet die Summe der Listenelemente



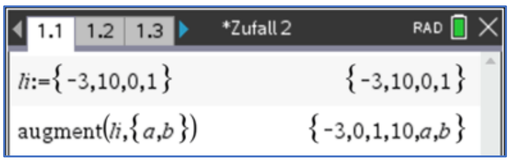
cumulativSum(liste) kurz: ***cumsum(liste)*** gibt eine Liste zurück, bei der die Elemente der ursprünglichen Liste schrittweise aufaddiert werden.



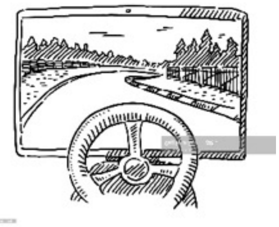
∆ ***list(liste)*** auch als ***deltalist(liste)***

gibt eine Liste mit den Differenzen der aufeinander folgenden Elemente in ***Liste*** zurück.

augment(Liste1, Liste2) gibt eine neue Liste zurück, die durch Anfügen von ***Liste 2*** an das Ende von ***Liste 1*** erzeugt wird.



Arbeitsblatt 1: Simulation von Zufallsexperimenten – eine Einführung



Simulationen sind modellhafte Nachbildungen eines realen Objektes oder Vorgangs. Sie werden z. B. genutzt, um Eigenschaften dieses Vorgangs oder Objektes unter vereinfachten Bedingungen zu untersuchen.
(Beispiel Fahrsimulator, siehe Abbildung) [4]
Beim Simulieren von Zufallsversuchen können geeignete Zufallsgeräte wie Würfel, Münzen, Glücksräder, Gefäße mit Kugeln oder Zufallszahlen verwendet werden. Auch mit einem CAS-Rechner lassen sich Zufallszahlen erzeugen und als Modell verwenden.

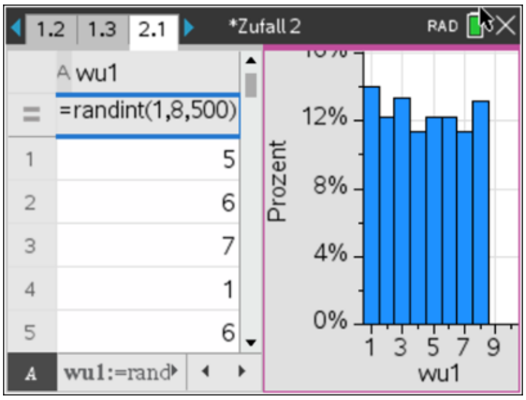
Beispiel:

Unter Brett- und Computerspielern werden häufig Spielwürfel mit verschiedenen Seitenzahlen verwendet. Dabei hat sich die Schreibweise W6 für einen sechsseitigen Würfel etabliert. Analog werden Tetraederwürfel mit W4 und Oktaederwürfel mit W8 bezeichnet.
Was ist wahrscheinlicher: Beim zweimaligen Werfen eines W4, die Summe Sechs zu erhalten oder beim Werfen eines W8 die Zahl 6 zu erhalten?
Ermitteln von Schätzwerten dieser Wahrscheinlichkeiten durch Simulationen mithilfe von Zufallszahlen:

Simulation des Werfens eines W8 und Auswertung bzgl. des Werfens einer 6

Calculator:
Wähle nach ***RandSeed*** eine Ziffernfolge, z. B. die Geburtsdaten deiner Mutter, um den Zufallsgenerator individuell zu starten.

Lists&Spreadsheet, Spalte A definieren als wu1*:*
Der Befehl ***wu1:=randInt(1,8,500)*** erzeugt eine Liste von 500 ganzzahligen Zufallszahlen z mit $1 \leq z \leq 8$.
Wähle menu *Daten – Schnellgraph*, setze den Cursor unten auf **wu1**, wähle mit ctrl menu *Histogramm* und dann mit dem Cursor auf der Zeichenfläche ctrl menu *Maßstab - Prozent* sowie *Säuleneinstellungen -gleiche Säulenbreite – Ausrichtung -0.5* wählen.
Der Schätzwert für das Ergebnis 6 liegt hier bei etwas mehr als 12%.
Geht man in der Tabelle auf ctrl R, lassen sich beliebig oft Neuberechnungen starten.



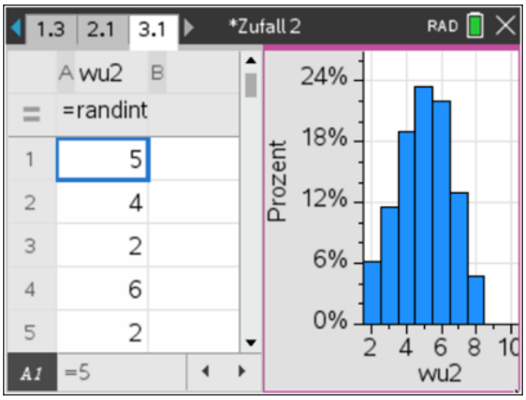
Simulation des zweimaligen Werfens eines W4 und Auswertung bzgl. des Anteils der Summen 6

[4] https://media.gettyimages.com/vectors/auto-racing-simulator-steering-wheel-drawing-vector-id1175653549?s=2048x2048

Lists&Spreadsheet**, Spalte A mit wu2 bezeichnen*. Der Befehl ***wu2:=randInt(1,4,500)+randint(1,4,500) erzeugt eine Liste von 500 Summen von je zwei W4

Grafische Darstellung und Auswertung erfolgen analog wie oben beschrieben.

Schätzwert für die Summe 6 hier ca. 22%.



Vergleicht man die ermittelten relativen Häufigkeiten, so ist hier im Beispiel 22% > 12%, also geben diese Schätzwerte einen Hinweis darauf, dass es wohl wahrscheinlicher ist, mit zwei W4 die Augensumme Sechs zu erhalten, als mit einem W8 eine 6 zu werfen.

Aufgaben:

1. Erstelle die im Beispiel erläuterten Simulationen. Erzeuge jeweils zehn Schätzwerte und bilde deren arithmetische Mittelwerte. Vergleiche deine Resultate mit den Ergebnissen deiner Mitschüler.

2. Untersuche die folgende Fragestellung durch Simulation.
   Was ist wahrscheinlicher:
   Beim Werfen zweier W4 die Summe Sieben zu erhalten oder mit einem W8 die Zahl 7 zu werfen?

3. Ermittle die im Beispiel und die in der Aufgabe 2 gesuchten Wahrscheinlichkeiten durch exakte Rechnung.

4. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau eines von zwei Kindern einer Zwei-Kind-Familie ein Mädchen ist? (Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt wird mit ½ angenommen.)
   Entscheide, ob der vorgeschlagene Zufallsversuch für eine Simulation des realen Problems geeignet ist. Falls das der Fall ist, dann beschreibe die Simulation und ihre Auswertung genauer.
   a) Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
   b) Beim Werfen **eines** Spielwürfels wird genau eine der Zahlen 1,2 oder 3 geworfen.
   c) Aus einem Gefäß mit 10 Kugeln, von denen fünf rot sind, werden zwei Kugeln gezogen.
   d) Mit dem Befehl ***randint(0,1)*** wird eine Zufallszahl erzeugt.
   e) Mit dem Befehl ***randint(0,1,2)*** wird eine Liste von Zufallszahlen erzeugt.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1 und 2 in der Datei zufall.tns

Aufgabe 3:

Die Summe Sechs beim Werfen zweier W4 ist möglich durch die Ergebnisse (1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2) und (3;3). Das sind fünf günstige bei insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit für die Summe Sechs beim zweimaligen Werfen eines W4 ist

$$p_{2W4}(X = 6) = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Für einen Oktaeder beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ziffer 6 (ein günstiges bei acht möglichen Ereignissen) $p_{1W8}(X = 6) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.
Es gilt: $p_{2W4}(X = 6) > p_{1W8}(X = 6)$.

Die Summe Sieben beim Werfen zweier W4 ist möglich durch (3;4) bzw. (4,3).
Damit berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu $p_{2W4}(X = 7) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
Für einen W8 beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ziffer 7 ebenfalls $\frac{1}{8}$.

Aufgabe 4:

a) Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
Dies ist eine mögliche Simulation, da Kopf(K) für Junge und Zahl(Z) für Mädchen stehen kann. Man wirft die Münzen z. B. 100mal und zählt, wie oft (K,Z) bzw. (Z,K) vorkommen.

b) Beim Werfen eines Spielwürfels wird genau eine der Zahlen 1,2 oder 3 geworfen.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt zwar auch 50% für das Ereignis 1,2 oder 3, aber die Simulation eignet sich nicht. Man müsste z. B. diesen Versuch zweimal nacheinander durchführen, um zwei Geburten zu simulieren.

c) Aus einem Gefäß mit 10 Kugeln, von denen fünf rot sind, werden zwei Kugeln gezogen.
Nein, da die Wahrscheinlichkeit des zweiten Versuchs vom Ersten abhängig ist.

d) Mit dem Befehl ***randint(0,1)*** wird eine Zufallszahl erzeugt.
Es wird lediglich eine Zufallszahl erzeugt, ist also in dieser Form ungeeignet.

e) Mit dem Befehl ***randint(0,1,2)*** wird eine Liste von Zufallszahlen erzeugt.
Dies ist eine mögliche Simulation, da z. B. 0 für Junge und 1 für Mädchen stehen kann und man mit einem Versuch ein Ergebnispaar z. B. (0,1) erhält.
Die Ergebnisse kann man händisch erfassen bzw. durch mehrere TI-Nspire-Befehle ermitteln (vgl. Datei Blatt 1.7).

Arbeitsblatt 2: Simulation eines Zufallsexperiments mit *randint* und *sum*
Kinder, Kinder…

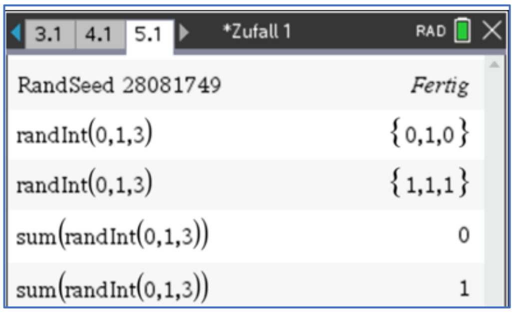

[5]

Für eine Jungengeburt wird $p = \frac{1}{2}$ vorausgesetzt.
Wir betrachten das Ereignis A: In Familien mit drei Kindern wurden genau zwei Jungen geboren.

a) Beschreibe, wie man diese Simulation mit dem mehrfachen Werfen dreier Münzen realisieren kann. Führe diese Simulation mit zwanzig Würfen von jeweils drei Münzen durch. Vergleiche dein Ergebnis mit den Resultaten deiner Mitschüler und berechne das arithmetische Mittel aller Werte.

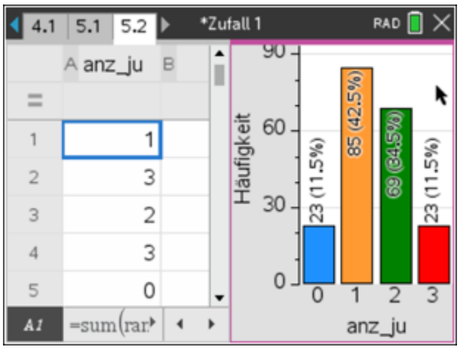
b) Das Werfen der Münzen lässt sich mit dem CAS-Rechner simulieren:

RandSeed *inividuelle Ziffernfolge* setzt den Zufallsgenerator auf individuellen Start
randInt(u,o,m) erzeugt eine Liste von m ganzzahligen Zufallszahlen z mit $u \leq z \leq o$.
sum(Liste) – gibt die Summe aller Elemente der Liste zurück.



Beschreibe, wie sich das reale Zufallsexperiment „Werfen dreier Münzen" mit Blick auf das Ereignis A mithilfe der oben erläuterten Anweisungen „randInt" und „sum" modellieren lässt.

c) Realisiere und erläutere die im Folgenden dargestellte Simulation für die Ermittlung eines Schätzwertes für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei 200 Drei-Kind-Familien.



In ***Lists&Spreadsheet*** bekommt die Zelle A1 die Anweisung ***=sum(randInt(0,1,3))*** [enter].
Der Cursor wird wieder auf A1 gesetzt und mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Füllen* aktiviert. Es erscheint ein gestrichelter Rahmen, der mit ▼ bis in die Zelle A200 gezogen wird. Dadurch wird der Befehl aus A1 in allen Zellen der Spalte bis A200 als relativer Zellbezug kopiert. Die Spalte A erhält ganz oben den Namen *anz_ju* für die Anzahl der Jungen.
Mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Schnellgraph* aktiviert. Man erhält eine grafische Darstellung der Werte der Liste „anz_ju". Setzt man den Cursor auf die Bezeichnung der waagerechten Achse, lässt sich mit [ctrl][menu] die Anweisung „Kategorisches X erzwingen" aktivieren. Damit lassen sich die Ergebnisse als Balken- oder Tortendiagramm anzeigen. Ebenfalls mit [ctrl][menu] lassen sich alle Bezeichnungen einblenden. Im dargestellten Beispiel ist der Schätzwert für P(A) = 0,345. Geht man zurück in die Tabelle, kann man die Simulation beliebig oft wiederholen, wenn man [ctrl][R] drückt. Vergleiche die Ergebnisse dieser Simulationen mit den vorher ermittelten Schätzwerten.

---

[5] Foto: https://media.gettyimages.com/photos/brothers-and-sister-posing-together-in-the-garden-picture-id1173348433?s=2048x2048

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 2

Aufgabe a)
Man nimmt z. B. für Jungen Kopf und für Mädchen Zahl, wirft diese Münze dreimal, notiert die Ergebnisse und wiederholt dies zwanzigmal.

Aufgabe b)
Man codiert Jungen z. B. mit dem Wert 1 und Mädchen mit dem Wert 0, dann ergibt der Befehl randint(0,1,3) z. B. {0,1,1}, d. h. das zweite und das dritte Kind sind ein Junge. Nutzt man nun den sum()-Befehl, kann man diejenigen Fälle (Summe ist gleich 2) zählen, bei denen es zwei Jungen gibt (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 2.1).

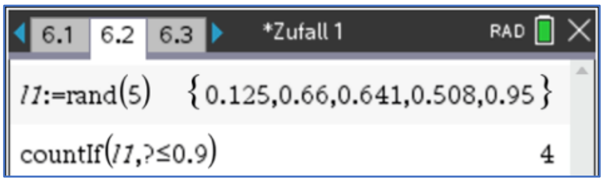
Aufgabe c)
Vergleiche Datei zufall.tns, Blatt 2.2.

Arbeitsblatt 3: Simulation eines Zufallsexperiments mit rand() und countif() Biathlon


[6]

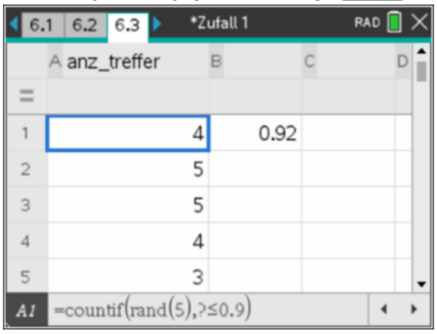
Vereinfachend wird angenommen, dass ein Biathlet bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. trifft. Ermittle durch Simulation einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einer Serie von fünf Schüssen mehr als drei Treffer erzielt.

rand(m) erzeugt eine Liste von m Zufallszahlen zwischen 0 und 1.
countIf(Liste, Kriterien) – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen.



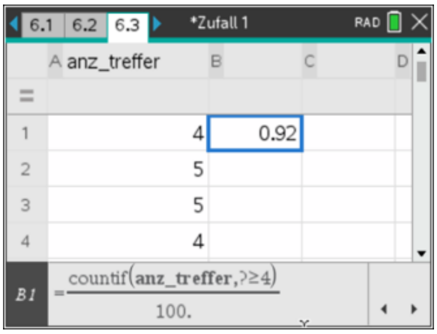
Die Abgabe eines Schusses wird durch den Befehl ***rand()***, eine Serie von fünf Schüssen durch ***rand(5)*** simuliert. Bei der Simulation zählt ein Schuss als Treffer, wenn die jeweilige Zufallszahl kleiner oder gleich 0,9 ist. Da die Zufallszahlen zwischen 0 und 1 annähernd gleich verteilt sind, trifft dies auf ca. 90% der erzeugten Zufallszahlen zu. Das entspricht der angenommenen Trefferwahrscheinlichkeit.
Um den gesuchten Schätzwert zu erhalten, wird eine große Anzahl von Serien zu je fünf Schüssen simuliert. Hier werden 100 Fünferserien erzeugt.

In ***Lists&Spreadsheet*** bekommt die Zelle A1 den Befehl ***=countif(rand(5),?<=0.9)*** [enter].
Der Cursor wird wieder auf A1 gesetzt und mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Füllen* aktiviert. Es erscheint ein gestrichelter Rahmen, der mit ▼ bis in die Zelle A100 gezogen wird. Dadurch wird der Befehl aus A1 in allen Zellen der Spalte bis A100 als relativer Zellbezug kopiert.
Die Spalte A erhält ganz oben den Namen „*anz_treffer*" für die Anzahl der Treffer bei einer Fünferserie.
In der Zelle B1 wird die relative Häufigkeit der Serien mit mehr als drei Treffern berechnet mit
=countif(anz_treffer,?>=4)/100.



Aufgaben:

a) Berechne mit [ctrl] [R] zehn solcher Schätzwerte und bilde den Mittelwert.
b) Erzeuge den Schnellgraph zur Liste „*anz_treffer*" und interpretiere die Anzeige im Zusammenhang mit dem gegebenen Sachverhalt. (siehe Arbeitsblatt 1)

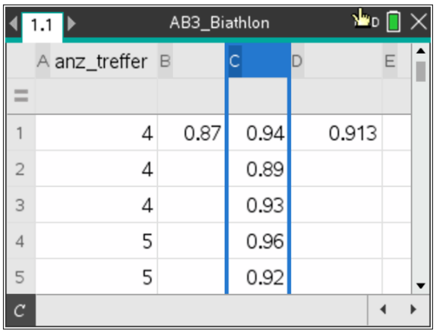


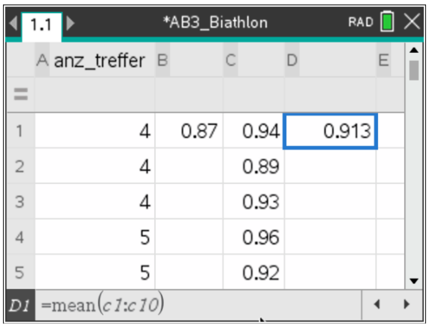
[6] https://media.gettyimages.com/illustrations/man-on-skis-aiming-rifle-illustration-id88797114?s=2048x2048

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 3

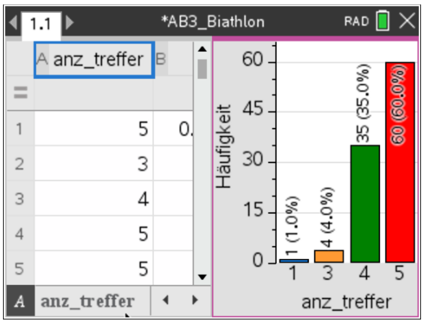
Aufgabe a) und b) in der Datei zufall.tns, Blatt 2.3

Aufgabe a:
In der Spalte C wurden die Ergebnisse von zehn Realisierungen für die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer“ eingetragen, die mit ctrl R erzeugt wurden.
In der Zelle D1 wurde der Mittelwert dieser zehn Ergebnisse mit dem Befehl
= mean(c1:c10) berechnet. Der Mittelwert betrug hier 0,931.
Der Biathlet erzielt mehr als drei Treffer bei fünf Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 91,3%.





Aufgabe b:



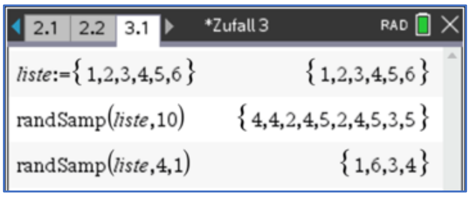
Der Schnellgraph für die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer“ wird folgendermaßen erzeugt:

- Setze den Cursor auf die Spalte A.
- Wähle menu *Daten – Schnellgraph*.
- Setze den Cursor auf die waagerechte Achse des Punktdiagramms.
- Wählen ctrl menu *Kategorisches X erzwingen*.
- Setze den Cursor auf die Zeichenfläche.
- Wähle ctrl menu *Balkendiagramm.*
- Wähle ctrl menu *Alle Bezeichnungen anzeigen*.

Interpretation: Das Simulationsergebnis zeigt, dass der Schütze bei 100 Schüssen einmal 1 Treffer, viermal 3 Treffer, 35mal 4 Treffer, 60mal 5 Treffer erzielt hätte.

Arbeitsblatt 4: Simulation eines Zufallsexperiments mit randsamp

randSamp(Liste, m, 0 oder 1) erzeugt aus einer gegebenen Liste eine neue Liste mit m Elementen
- durch Ziehen mit Zurücklegen, wenn 0 eingegeben wurde (die 0 kann auch weggelassen werden), bzw.
- durch Ziehen ohne Zurücklegen, wenn 1 eingegeben wurde.

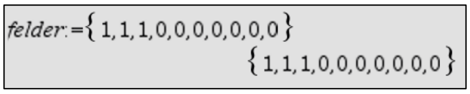


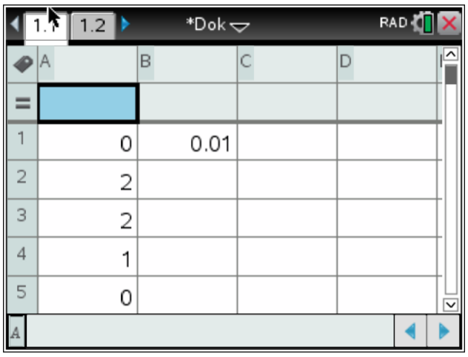
Beispiel: Eine große Handelskette startete anlässlich einer Fußballeuropameisterschaft ein Gewinnspiel. [7]

Und so hatte es funktioniert:
Ab einem Einkaufswert von 20 € erhielt man ein Rubbellos in allen teilnehmenden Filialen. Das Los enthielt zehn Rubbelfelder. Hinter drei Rubbelfeldern verbarg sich ein „TOR“ und hinter sieben ein „AUS“. Man durfte genau drei Felder freirubbeln und gewann einen Preis, wenn dreimal ein „TOR“ freigerubbelt wurde.

Ermittle einen Näherungswert für die Gewinnwahrscheinlichkeit durch Simulation.

In der Anwendung ***Calculator*** wird die Liste ***felder*** definiert. Sie besteht aus drei Einsen (für „Tor“) und sieben Nullen (für „Aus“).
Zelle A1: ***=countif(randsamp(felder,3,1),1)***
Der Liste ***felder*** werden ohne Zurücklegen drei Elemente entnommen und es wird gezählt, wie oft darunter eine „1“ ist.
Diese Anweisung wird über ***Menü – Daten – Füllen*** bis in die Zeile 500 kopiert.
Zelle B1: ***= countif(a1: a500,3)/500.***
Es wird gezählt, wie oft im Bereich A1 bis A500 eine „3“ vorkommt, und die relative Häufigkeit dieses Ereignisses wird bestimmt.
Durch ctrl R in Spalte A können beliebig viele Wiederholungen durchgeführt werden.





Ergebnis: $r_h = 0{,}01$

Aufgabe:
a) Realisiere diese Simulation insgesamt zehnmal. Bestimme den Mittelwert aller dabei ermittelten relativen Häufigkeiten als einen Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
b) Beschreibe, wie man die Simulation mit drei roten und sieben schwarzen Skatkarten durchführen könnte.

[7] Quelle: http://www.lidl.de/de/Torjaeger-gesucht vom 12. Juni 2012

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 4

Aufgabe

a) in der Datei zufall.tns, Blatt 2.4

b) Die 10 Karten werden gut gemischt und man zieht aus den 10 Karten drei, ohne diese zurückzulegen. Hat man unter den drei gezogenen Karten nur rote, dann hat man gewonnen.

Anmerkung: Als Wahrscheinlichkeit ergibt sich: P(G) = $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.

Arbeitsblatt 5: Übungen zu Simulationen

1. Eine Familie hat zwei Kinder. Es ist bekannt, dass eines der Kinder ein Mädchen ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das andere Kind ein Junge ist.

   Begründe, dass die folgende Simulation einen Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit liefert. Ermittle zehn solcher Schätzwerte und bilde ihr arithmetisches Mittel.

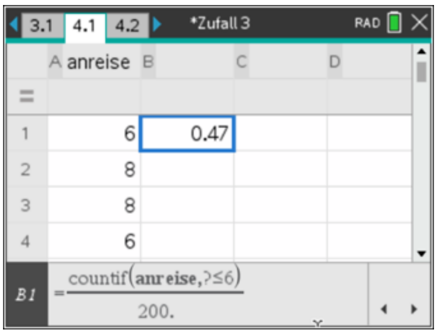
	A ki1	B ki2	C su	D	E
=	=randint(0,1,200)	=randint(0,1,200)	=ki1+ki2		
1	1	1	2	91	
2	0	1	1	51	
3	0	0	0	0.640845	
4	1	0	1		

   Zelle D1: =*countIf(su,1)* Zelle D2: =*countIf(su,2)* **Zelle D3: =**$\frac{\boldsymbol{D1\cdot 1.}}{\boldsymbol{D1+D2}}$

2. Beim Würfeln mit zwei W4 kann man die Augensumme 4 durch das Werfen von einer „1“ und einer „3“ oder von zweimal „2“ erreichen. Die Augensumme 5 ergibt sich durch das Werfen einer „2“ und einer „3“ oder einer „1“ und einer „4“. Jonas vermutet deshalb, dass die Wahrscheinlichkeiten für beide Augensumme gleich sind, weil er für jede Augensumme zwei Möglichkeiten sieht.
   Prüfe diese Vermutung durch eine geeignete Simulation mit Zufallszahlen.
   Erläutere deine Simulation.
   Warum hat Jonas nicht recht?

3. Ist es wahrscheinlicher, bei drei Würfen mit einer Münze zweimal „Wappen“ oder bei vier Würfen dreimal „Wappen“ zu werfen? Formuliere zunächst eine Vermutung. Entwirf zu diesem Problem eine Simulation. Vergleiche deine Vermutung mit deinen Simulationsergebnissen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten rechnerisch.

4. Ein Hotel hat für sechs verfügbare Zimmer acht Buchungen angenommen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast tatsächlich anreist, nur 80% beträgt. Begründe, dass durch folgende Simulation ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden kann, dass alle ankommenden Gäste untergebracht werden können, wenn man davon ausgeht, dass die acht Buchungen unabhängig voneinander erfolgen.
   In Zelle A1 kommt die Anweisung
   $= \boldsymbol{countif(rand(8), ? \leq 0.8)}$
   Diese Anweisung wird mit menu *Daten – Füllen* bis in die Zelle A200 kopiert.
   Die Spalte A erhält den Variablennamen ***anreise***.
   Der Eintrag in die Zelle B1 ist auf dem Screenshot erkennbar.



	A anreise	B	C	D
=				
1	6	0.47		
2	8			
3	8			
4	6			

B1 = $\frac{\text{countif(anreise,?≤6)}}{200.}$

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1

Mädchen werden mit dem Wert 1 codiert, damit zählt der Befehl D1: =***countIf(su,1)*** die Anzahl der Fälle, wo genau ein Mädchen auftritt, der Befehl D2: =***countIf(su,2)*** die Fälle mit zwei Mädchen.
Der Quotient D3: =$\frac{\boldsymbol{D1\cdot 1.}}{\boldsymbol{D1+D2}}$ liefert dann den Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Hinweis: Es handelt sich um eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit:
Es gilt $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ und in diesem Fall stellt A das Ereignis dar, dass (mindestens) eines der Kinder ein Mädchen ist und B das Ereignis, dass genau ein Junge vorkommt.
Damit gilt: $P_A(B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$. (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 3.1)

Aufgabe 2

Die Simulation findet man in der Datei zufall.tns, Blatt 3.2. Mit dem Befehl ***countif()*** wird einmal die Anzahl der Summe 4 und einmal die Anzahl der Summe 5 bei 500 Versuchen gezählt.
Es ergibt sich i.d.R., dass Summe 4 um 100 schwankt und Summe 5 um 125.
Jonas hat nicht recht, da es von den 16 möglichen Ergebnissen der Ergebnismenge nur drei günstige für Summe 4 ((1,3); (3,1) ;(2;2)) aber vier günstige für Summe 5 ((1,4); (4,1); (2,3); (3,2)) gibt.

Aufgabe 3

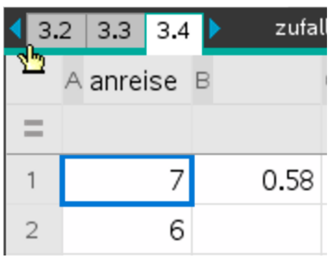
Man vermutet, dass es wahrscheinlicher ist, bei 3 Würfen genau zweimal Wappen zu bekommen. Die Simulation (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 3.3) bestätigt dies.
Theoretische Begründung:

P(WWZ)=$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}375$

P(WWWZ)= $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}25$

Aufgabe 4

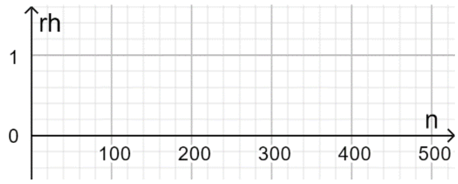
Die Lösung zur Aufgabe ist in der Datei zufall.tns, Blatt 3.4 zu finden. Der Befehl ***rand(8)*** liefert acht Zufallszahlen im Intervall [0; 1]. Mit dem Befehl ***countif(rand(8),?*** $\leq \mathbf{0,8}$***)*** zählt man, wie viele der acht Zufallszahlen kleiner oder gleich 0,8 sind. Dies entspricht der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit von 80% für eine Anreise. In der Zelle B1 ermittelt man dann die relative Häufigkeit bei 200 Versuchen.



Arbeitsblatt 6: Stabilisierung relativer Häufigkeiten

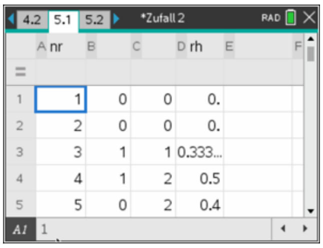
Eine ideale Münze wurde n-mal geworfen. Dabei erzielte man folgende Ergebnisse für die Anzahl „Wappen“:

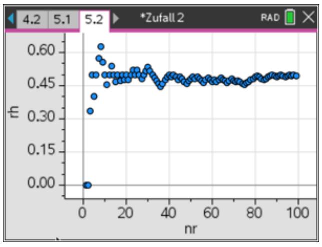
n	10	25	50	100	200	400
Anzahl Wappen	1	8	27	42	94	205
Rel. Häufigkeit						



a) Berechne die relativen Häufigkeiten rh (als Dezimalzahl) und zeichne ein Diagramm.
b) Erkläre, woran es liegt, dass die relative Häufigkeit für die Anzahl „Wappen“ nicht jedesmal 0,5 beträgt, obwohl es sich um eine ideale Münze handelt.
c) Ergänze den Lückentext:
„Mit ______________________________ Versuchsanzahl scheint sich die relative Häufigkeit rh um eine feste Zahl zu stabilisieren.“

Simulation der Stabilisierung relativer Häufigkeiten





***when**(Bedingung,wahr, falsch)*
Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***.

Öffne die Anwendung ***Lists&Spreadsheet*** und fülle die angegebenen Zellen so aus, wie im Folgenden beschrieben.
Zelle A1: ***1*** Zelle A2: ***= A1 + 1***Zelle B1 und B2: = ***when(rand()<0.5,1,0)***
Zelle C1: ***= B1*** Zelle C2: ***= C1 + B2*** Zelle D1: ***= C1/(A1·1.)*** *Zelle D2:* ***= C2/(A2·1.)***
Benenne die Spalte A mit ***nr*** und die Spalte D mit ***rh*** als Variablennamen.
Markiere die Zellen A2, B2, C2 und D2 mit ▸ shift.
Kopiere mit menu - *Daten - Füllen* die Anweisungen aus diesen Zellen als relative Zellbezüge in weitere Zellen nach unten bis in die Zeile 100.
Öffne die Anwendung ***Data&Statistics*** und weise der waagerechten Achse den Namen ***nr*** und der senkrechten Achse den Namen ***rh*** zu. Drücke dazu tab und wähle aus der Anzeige die entsprechende Variable aus.
Durch ctrl R in ***Lists&Spreadsheet*** können beliebig viele Wiederholungen durchgeführt werden.

Relativer Zellbezug: Beim Kopieren oder Autoausfüllen der Zellen verändert sich der Zellbezug in Beziehung zur Ergebniszelle. Die Spalten und Zeilen werden im Bezug automatisch geändert.

Aufgaben:
1. Realisiere diese Simulation und erläutere, warum sie die Stabilisierung relativer Häufigkeiten für das Werfen einer Münze veranschaulicht.
2. Erkläre, was an der oben beschriebenen Simulation verändert werden könnte, damit die Stabilisierung der relativen Häufigkeit für das Werfen einer Sechs mit einem Spielwürfel simuliert wird.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1

Vergleiche Blatt 4.1 und 4.2 in der Datei zufall.tns.
Mit Hilfe der Simulation wird jeweils für die aktuelle Nummer (nr) die aktuelle relative Häufigkeit für Treffer berechnet und im Diagramm dargestellt.

Aufgabe 2

Um das Werfen einer Sechs mit einem Spielwürfel zu simulieren, muss im Befehl B2: =***when(rand()<0.5,1,0)*** die Wahrscheinlichkeit 0,5 auf die Wahrscheinlichkeit für 6 geändert werden, also auf $\frac{1}{6}$.

Arbeitsblatt 7: Simulation zu den logischen Operatoren „and“, „or“ und „not“

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen zweier Würfel mindestens eine 1 zu haben?

Nihad sagt, dass es die Fälle (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) und (1,6) gibt, also 6 von 36 Fällen, demzufolge sei die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(A) = $\frac{6}{36}$ = $\frac{1}{6}$.

Maria meint, jeder von diesen Fällen kommt zweimal vor, also verdoppelt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Paul hat eine Simulation begonnen.

1. Versuche, diese Simulation ebenfalls umzusetzen, nutze in Spalte c den Operator „***or***“. Vergleiche das Ergebnis der Simulation mit den oben vorgeschlagenen Werten. Beschreibe die Wirkungsweise des Operators „***or***“ mit eigenen Worten.

   Hinweis: Die Anzahl der „Treffer“ - wenn in der Spalte C „*true*“ ausgegeben wird - kann mit dem ***countif()***-Befehl ermittelt werden. Führe die Simulation mit mindestens 300 Versuchen durch (*randint(1,6,300)*).

	A ww1	B ww2	C wf	D
=	=randint(1	=randint(1		
1	2	5	false	0.303333
2	1	4	true	
3	1	4	true	
4	1	5	true	
5	4	4	false	

2. Im Screenshot siehst du ein Ergebnis einer solchen Simulation, diese relative Häufigkeit liegt sehr nah an der gesuchten Wahrscheinlichkeit von $\frac{11}{36}$.
   Begründe diesen Wert mit einer Rechnung.

3. Einfacher lässt sich das Ergebnis auch mit Hilfe der Betrachtung der Gegenwahrscheinlichkeit finden, gib hierzu eine Lösung an.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 7

Aufgabe 1

Vergleiche Blatt 5.1 in der Datei zufall.tns.

Der Operator „***or***“ gibt “wahr” zurück, wenn ein Ausdruck oder beide Ausdrücke zu ”wahr” ausgewertet werden. Der Operator gibt nur dann “falsch” zurück, wenn beide Ausdrücke “falsch” ergeben.

Aufgabe 2

Um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine 1 bei zwei Würfen“ zu berechnen, kann man auch die Gegenwahrscheinlichkeit „Keine 1 bei zwei Würfen“ nutzen, es ergibt sich:

Aufgabe 3

P(E) = 1-$P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} \approx 0{,}306.$

Checkliste Zufallsversuche

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
den Zufallsgenerator des CAS-rechners starten	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl* *Ausgangsbasis* `RandSeed 201052`		
eine oder mehrere ganzzahlige Zufallszahl(en) erzeugen	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl* *Ganzzahl* `randInt(1,6)` → 2 `randInt(1,12,5)` → {9,5,3,8,9}		
eine oder mehrere Zufallszahl(en) zwischen 0 und 1 erzeugen	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl* *Zahl* `rand()` → 0.144026 `rand(3)` → {0.581664,0.295915,0.530404}		
eine Bedingung realisieren	**when*(Bedingung, wahr, falsch)*** Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***. `when(2<5,1,0)` → 1 $\text{when}\left(\frac{1}{3}>\frac{1}{2},1,0\right)$ → 0		
alle Elemente einer Liste zählen, die vorgegebene Bedingungen erfüllen	**countIf(Liste, Kriterien)** – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen. `countIf({1,2,4,1,3,2},1)` → 2 `countIf({1,2,4,1,3,2},?≤2)` → 4 `countIf({1,2,4,1,3,2},1<?≤3)` → 3		
die Summe der Elemente einer Liste ermitteln	menu Statistik – *Listen Mathematik* *Summe der Elemente* `sum({1,2,3,4,5})` → 15		
eine Stichprobe durch Ziehen mit und ohne Zurücklegen aus einer Liste ermitteln	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl* *Stichprobe* `randSamp({0,0,1,1,1,1,3,4},4)` → {1,4,1,4} `randSamp({0,0,1,1,1,1,3,4},4,1)` → {3,1,0,4}		

3. Inhaltsfeld Funktionen (Fkt)

Inhaltliche Schwerpunkte:

– proportionale und antiproportionale Zuordnung: Zuordnungsvorschrift, Graph, Tabelle, Wortform, Quotientengleichheit, Proportionalitätsfaktor, Produktgleichheit, Dreisatz
– lineare Funktionen: Funktionsterm, Graph, Tabelle, Wortform, Achsenabschnitte, Steigung, Steigungsdreieck
– Prozent- und Zinsrechnung: Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz, prozentuale Veränderung, Wachstumsfaktor

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Die Eingabe von Funktionsgleichungen kann im TI-Nspire auf verschiedenen Wegen in verschiedenen Applikationen je nach Erfordernis (z. B. stetige oder diskrete Funktion) erfolgen. Die Funktionsgleichungen werden jeweils als Variable abgespeichert. Somit ist ein Zugriff auf die Gleichung über die entsprechende Variable möglich.
Standardmäßig wird in der Applikation **Graphs** kein Gitter erzeugt. Man kann aber in der Applikation ***Graphs*** über Menü – *Einstellungen* die Art des Gitters für das aktuelle Dokument festlegen.

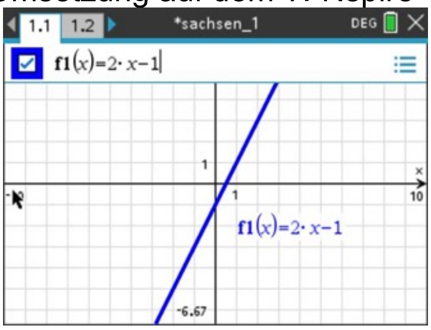
Hinweise
Eine Funktionsdefinition ist in der Applikation ***Graphs*** in der Eingabezeile möglich.
Da in vielen Fällen aber mit der Funktionsgleichung weitergearbeitet werden soll, ist es sinnvoll die Gleichung in einer der Applikationen ***Calculator*** bzw. ***Notes*** zu definieren.
In der Applikation ***Graphs*** wird der schon vorhandenen Funktionsvariablen dann die selbst definierte Variable übergeben.
Um eine Funktion zu definieren, stehen im TI-Nspire mehrere Möglichkeiten zur Verfügung:

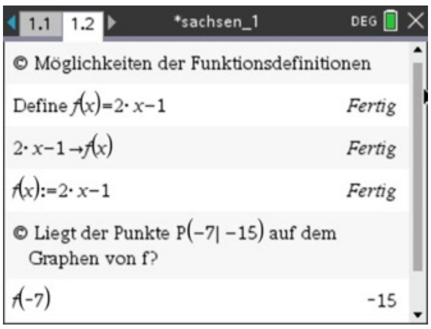
- Befehl Define: menu – 1 *Aktionen* – 1 *Define*.
- Zuweisungsoperator: sto→ Tasten ctrl var.
- Ergibtanweisung: := , Tasten ctrl [=].

(Im Screenshot wird mit der Anweisung f(-7) überprüft, ob der Punkt (-7| 15) auf dem Graphen von f liegt) (siehe Lernbereich 1, Seite 6)

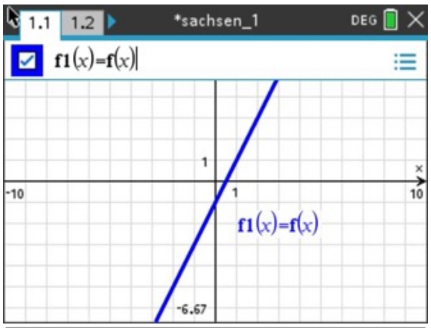
Man sollte sich im Unterricht auf eine Möglichkeit beschränken, günstig ist die dritte Möglichkeit, da diese den S:S ggf. schon aus dem Informatikunterricht bekannt ist.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

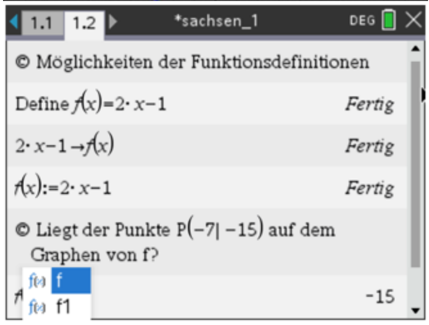




Anschließend wird der vom TI-Nspire vorgegebenen Funktionsvariablen (hier ***f1(x)***) die selbst definierte Funktionsvariable (hier ***f(x)***) zugewiesen.
(Achtung: Hier nur mit Gleichheitszeichen!)
Durch Setzen oder Nichtsetzen des Hakens kann der Graph ein- bzw. ausgeblendet werden.



Nach Betätigen der Taste var werden die belegten zwei Variablen ***f*** und ***f1*** angezeigt.



In der Applikation ***Graphs*** kann man über menu -***Fenster/Zoom*** eine Reihe von Fenstereinstellungen vornehmen.

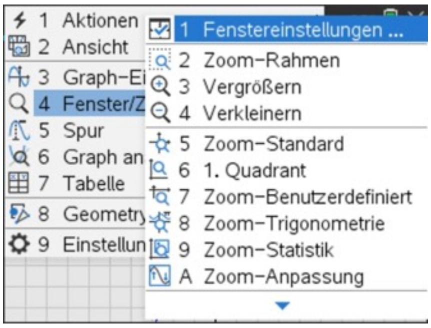
Hinweise

Umsetzung auf dem TI-Nspire

Um den Ausschnitt des Koordinatensystems in der Applikation ***Graphs*** anzupassen, nutzt man

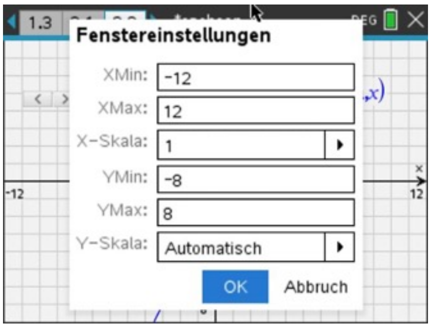
menu – *Fenster/Zoom*

und wählt den entsprechenden Menüeintrag.



In den *Fenstereinstellungen* verändert man den Ausschnitt der Koordinatenachsen und ihre Skalierung.

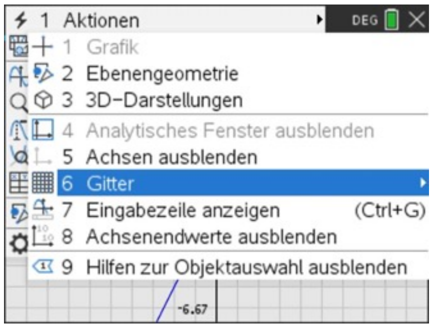
Da das Display des TI-Nspire 480 x 320 Pixel anzeigt, beträgt das Verhältnis von x-Achse zu y-Achse 3 zu 2. Will man ein quadratisches Gitter im Display anzeigen, muss das Seitenverhältnis (xMax – Xmin) zu (yMax – yMin) ebenfalls 3 zu 2 betragen.



Weitere Einstellungen sind unter

menu – *1 Ansicht*

möglich.



Bemerkungen:
Bei der Verwendung vom Menüpunkt *Fenstereinstellungen* soll der Schüler angeregt werden, über Definitionsbereich und Wertebereich nachzudenken (ähnlich bei graphischer Darstellung auf Papier). Für schnelles Arbeiten sind die Menüpunkte *Zoom-Rahmen* bzw. *Vergrößern* hilfreich.
Der Menüpunkt *Zoom-Anpassung* skaliert die y-Achse so, dass der Graph über dem Intervall der x-Achse gut sichtbar ist.

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Hinweise zur Arbeit in der Applikation ***Graphs*** gegeben.

Hinweise zur Arbeit mit Wertetabellen
Eine Wertetabelle lässt sich schnell mittels

menu – *Tabelle – Tabelle mit geteiltem Bildschirm*
(ctrl T)

anzeigen. Dabei wird ein zweiter Bildschirm angezeigt. Dieser kann mit *Tabelle entfernen* wieder geschlossen werden.

Alternativ kann auch die Applikation ***Lists&Spreadsheet*** genutzt werden:
Die Spalte **A** erhält den Namen ***xx***, die Spalte **B** den Namen ***yy***. Auf die so deklarierten Listen kann im ***Calculator*** zugegriffen werden.

Für die gewünschten Argumente kann der Befehl

seq(i,i,-5,5,0.5) … für Sequenz (Folge)

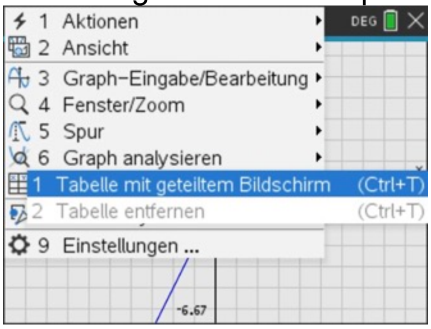
verwendet werden.
Dabei geben die Parameter in Reihenfolge die Bildungsvorschrift, den Namen der Laufvariablen, die untere Grenze, die obere Grenze und optional die Schrittweite an.

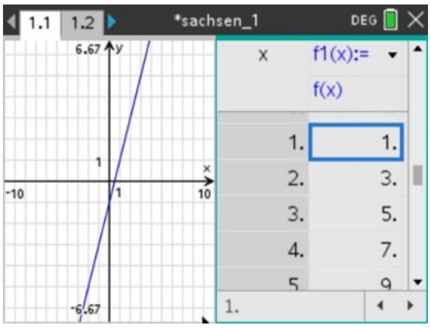
Der Liste ***yy*** (Spalte ***yy***) werden hier die Funktionswerte ***f(xx)*** zugewiesen.

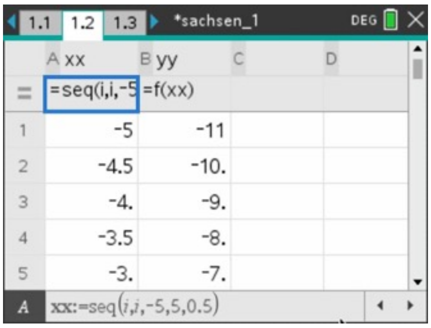
yy:=f(xx)

Durch eine Änderung in der Spalte ***xx*** werden die Funktionswerte in Spalte **yy** sofort neu berechnet.

Umsetzung auf dem TI-Nspire



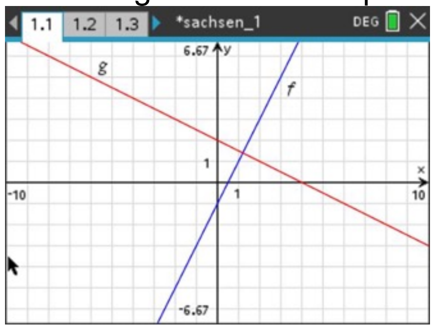




Bemerkungen:
In der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** werden die einzelnen Spalten als Listen betrachtet. Diese sollten einen eigenen Namen (Bezeichnung) erhalten.
Um Probleme zu vermeiden, sind keine Befehlsnamen oder werkseitig vorgegebene Variablennamen zu benutzen.
Nicht geeignet sind z. B. ***x*** oder ***count*** oder ***euler.***

Hinweise zum Umgang mit Graphen
In vielen Fällen ist es sinnvoll, die Graphen zu bezeichnen.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

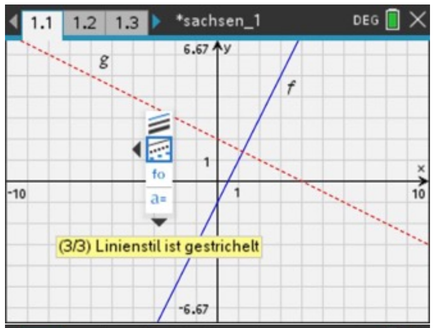


menu – *Aktionen – Text*

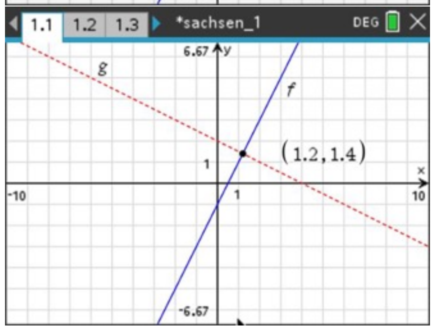
Sollen weitere Eigenschaften (Attribute) der Graphen angepasst werden, wählt man das zu verändernde Objekt aus:

Mauszeiger auf das Objekt, ctrl menu – *Attribute* (am PC rechte Maustaste)

Attribute mit Richtungstasten auswählen und mit enter bestätigen.



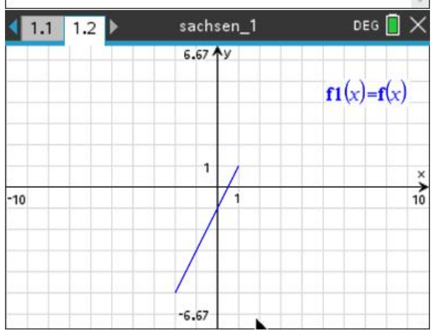
menu – *Graph analysieren*



erlaubt eine Reihe von Untersuchungen, die z. B. zur Kontrolle von Ergebnissen eingesetzt werden können. Die Ergebnisse werden i. A. nur als Näherung angegeben; hier Schnittpunkt der Graphen.

Graph analysieren ist auch erreichbar über:
Mauszeiger auf Objekt, ctrl menu–*Graph analysieren*

Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich oder abschnittsweise definierte Graphen von Funktionen lassen sich bereits im ***Calculator*** definieren.



Möglich ist aber auch in der Applikation ***Graphs*** die Eingabe mit Bedingungsstrich (with - Operator):
$f(x) \mid -2 \leq x \leq 1$.

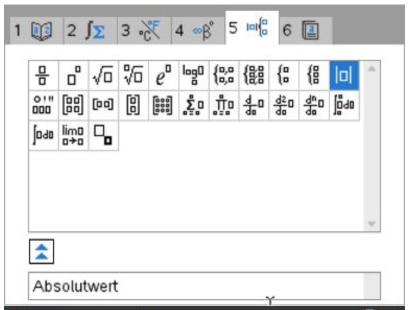
Bei einer erneuten Anzeige der Eingabezeile verändert der TI-Nspire die Anzeige in: $\{f(x), -2 \leq x \leq 1.$

Ebenfalls möglich ist diese Definition über die Taste ⊞ oder die Verwendung des Menüpunktes 5 ⊞ aus dem Katalog.

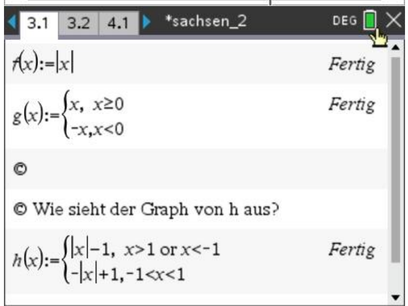
Der Betrag einer reellen Zahl und die Betragsfunktion sind im Analysisunterricht von wesentlicher Bedeutung. Sie kann mittels Katalog bzw. mittels der Funktion ***abs()*** definiert werden.
Schüler benutzen manchmal den Bedingungsstrich, um den Betrag einer Zahl zu erzeugen. Das zieht aber einen Syntaxfehler nach sich.

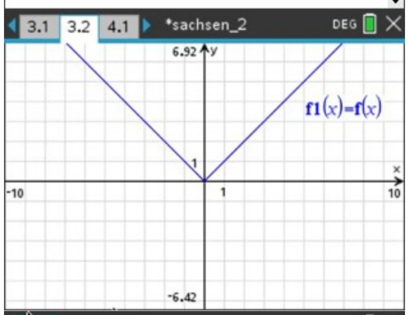
Umsetzung auf dem TI-Nspire

Die Betragsfunktion wird über das Symbol aus dem Katalog oder über $f(x) := abs(x)$ definiert.
In der Ausgabe erscheint dann $f(x) := |x|$.



Sie lässt sich auch abschnittsweise mit linearen Funktionen definieren.
Im ***Katalog*** wählt man das entsprechende Symbol ***stückweise Funktion*** aus.

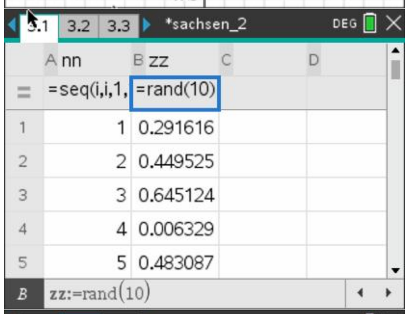




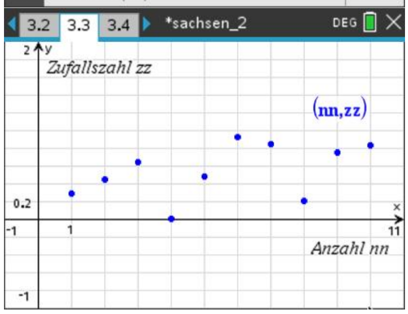
Eine diskrete Funktion weist den natürlichen Zahlen → Zufallszahlen zu.
Die Funktion wird im Koordinatensystem dargestellt.

Der Befehl ***rand()*** erzeugt Zufallszahlen zwischen 0 und 1.

Die Folge ***nn*** lässt sich händisch aber auch als Sequenz ***seq(i,i,1,10)*** darstellen. Siehe auch LB2 Seite 42.



Die Funktion kann dann als Streudiagramm im Koordinatensystem dargestellt werden.



menu – ***Graphs****-Eingabe/Bearbeitung - Streudiagramm*

Der Einsatz von Schiebereglern eignet sich besonders zur Visualisierung des Einflusses von Parametern auf einen Graphen. Schüler können dadurch die Einflüsse der Parameter selbstständig entdecken.

Hinweise

Bei der Definition der Funktion sollte der Parameter zusätzlich zur Veränderlichen ***x*** mit übergeben werden.

Bemerkung:
Sind zu viele Parameter vorhanden, z. B. bei Rekonstruktionen von Gleichungen höheren Grades, können die Parameter in den Klammern auch weggelassen werden, also die Funktion nur als f(x) definiert werden.

Bei der Eingabe einer Funktion mit einem Parameter in der Applikation ***Graphs***, schlägt der TI-Nspire die Einführung eines Schiebereglers automatisch vor.

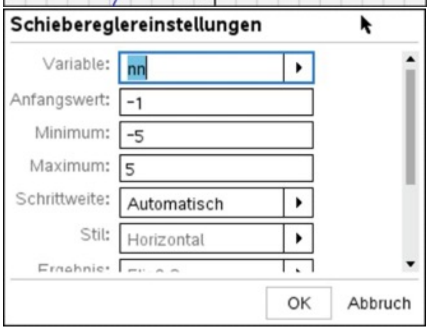
Es ist günstig, bei der Übergabe der Funktion zur Darstellung mit einem Schieberegler einen neuen Parameter (z. B. statt ***n*** hier ***nn***) zu verwenden.
Da durch den Schieberegler die Variable mit einer Zahl belegt wird, setzt der TI-Nspire auch bei erneutem Aufruf der Funktion den Zahlenwert des Schiebereglers ein. Der Parameter ist dann durch den Zahlenwert überschrieben.

Einstellungen des Schiebereglers:
Steht der Mauszeiger über dem Schieberegler, erreicht man durch Betätigen der Tasten [ctrl] [menu] die Einstellungen.

Hier lassen sich nun diverse Einstellungen vornehmen.

(Schieberegler verschieben, minimieren (Pfeil-Darstellung), animieren bzw. löschen)

Umsetzung auf dem TI-Nspire



In vielen Problemstellungen werden Messwerte aufgenommen bzw. sind Wertetabellen gegeben. Für die Auswertung solcher Tabellen sind z. B. die Applikationen ***Lists&Spreadsheet, Graphs*** und ***Calculator*** gut einsetzbar.
Ein mögliches Vorgehen wird hier an einem konkreten Beispiel beschrieben.

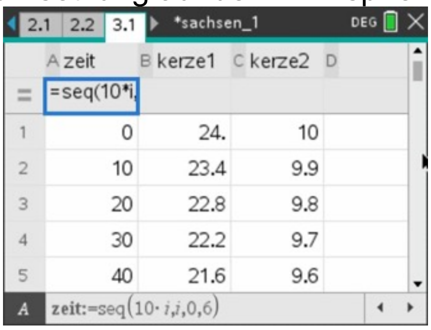
Hinführendes Beispiel:
Zwei Kerzen unterscheiden sich in Höhe und Durchmesser voneinander. Beide werden gleichzeitig angezündet. Während des Abbrennvorgangs wurden mehrere Messungen der Höhe durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Messungen wurden tabellarisch aufgelistet.

Zeit (min)	0	10	20	30	40	50	60
Höhe Kerze 1 (cm)	24,0	23,4	22,8	22,2	21,6	21,0	20,4
Höhe Kerze 2 (cm)	10,0	9,9	9,8	9,7	9,6	9,5	9,4

Stelle die Werte in einem geeigneten Diagramm dar und bestimme für jede Kerze eine Funktionsgleichung, die den Sachverhalt beschreibt.

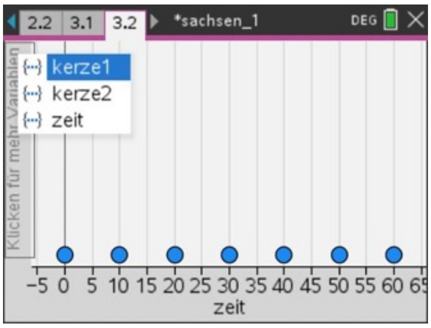
Hinweise
Zuerst werden die Daten in die Applikation ***Lists&Spreadsheet*** übernommen.
Da hier bei der Zeitmessung konstante Abstände zwischen zwei Messwerten vorliegen, wurde mittels Befehl ***seq()*** eine Folge automatisch erzeugt.
Diese Werte können natürlich auch einzeln eingetragen werden.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

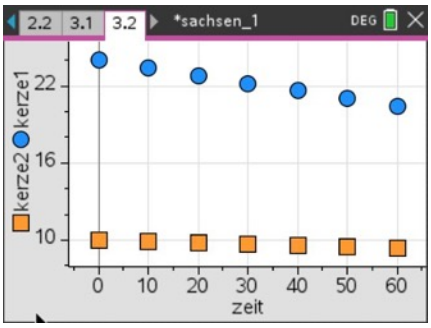


Variante 1

In der Applikation ***Data&Statistics*** werden auf der x-Achse die Zeit und auf der y-Achse die Höhen angezeigt.
Dazu bewegt man den Cursor auf die entsprechenden Felder unterhalb der x-Achse und rechts neben der y-Achse und wählt jeweils die Größe aus, bzw. man nutzt die Tabulator-Taste tab.



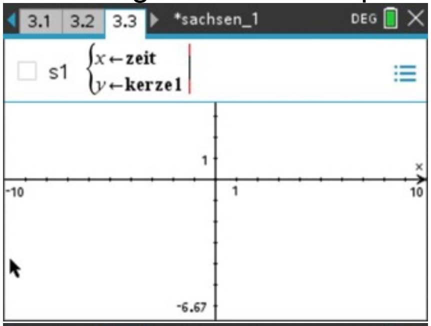
Der Nachteil ist eine "verzerrte" Darstellung, da die y-Achse nicht im Ursprung beginnt, dies lässt sich aber nachträglich durch Änderung der Fenstereinstellung korrigieren.
(Anmerkung: Um mehrere Datensätze darzustellen, muss man nochmals auf den 1. Wert auf der y-Achse klicken und einen weiteren Datensatz wählen.)



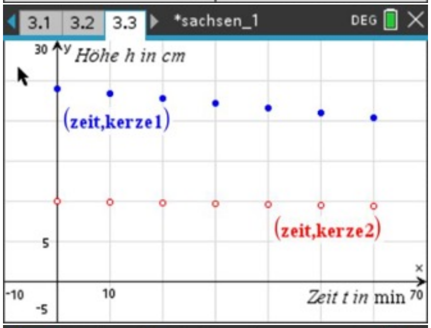
Variante 2

Umsetzung auf dem TI-Nspire

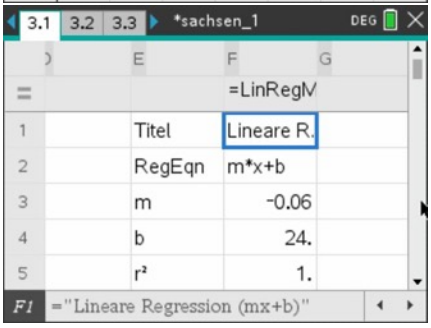
In der Applikation ***Graphs*** wählt man unter
menu – ***Graphs***-*Eingabe/Bearbeitung*
das Streudiagramm aus.



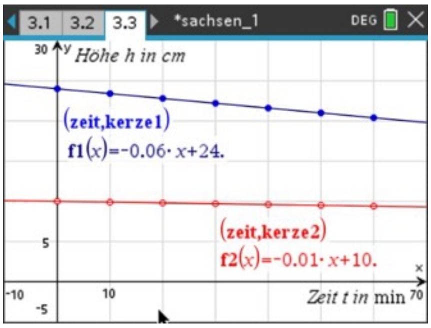
Im Streudiagramm werden den Variablen x und y die entsprechenden Größen zugewiesen.
Anschließend sind noch die Achsen anzupassen und eventuell eigene Achsenbezeichnungen einzufügen.



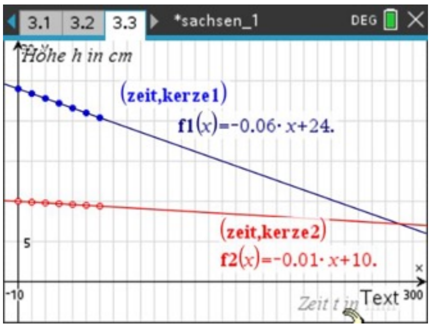
Eine Möglichkeit, eine zugehörige Funktionsgleichung zu finden, ist den TI-Nspire eine Regression durchführen zu lassen.



In diesem Fall wählt man in der Applikation
Lists&Spreadsheet
menu – *Statistik – Statistische Berechnungen*
die entsprechende Regression aus.
Dabei sind in diesem Beispiel die Bezeichner für die x-Liste (zeit) und für die y-Liste (kerze1) einzutragen. Nun kann man noch die Variable festlegen, unter der die Funktionsgleichung gespeichert werden soll.
Da nach dem Wechsel in die Applikation ***Graphs*** der Graph nicht automatisch angezeigt wird, muss die Eingabezeile geöffnet und mit der Taste enter betätigt werden.



Nun könnten weitere Untersuchungen erfolgen.

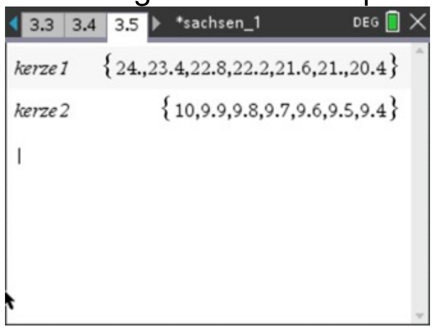


Die in der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** genutzten Spaltenbezeichner sind gleichzeitig die Bezeichner für die in den Spalten abgelegten Listen.
Das ermöglicht die Verwendung dieser Listen z. B. in der Applikation ***Calculator***.
So lassen sich z. B. die vom TI-Nspire definierten Listenoperationen anwenden.

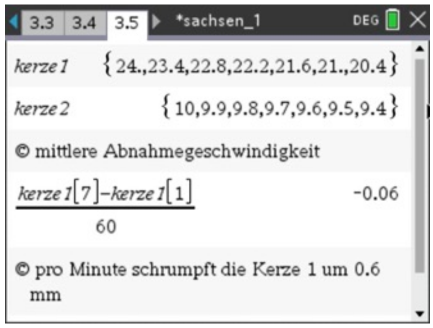
Hinweise

Umsetzung auf dem TI-Nspire

Hier werden die Listen für die Höhen der Kerzen ausgegeben.



Auf die einzelnen Elemente kann man durch Angabe des Index zugreifen. Dabei ist der erste Indexwert 1, z. B. liefert ***kerze1[7]*** das siebte Element aus der Liste kerze1.



Der Lehrplan fordert Kompetenzen im Umgang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen, sowie in linearen und quadratischen Funktionen. An formalen Beispielen und am Beispiel einer Anwendungsaufgabe sollen Eigenschaften einer Funktion bzw. ihres Graphen untersucht werden:

Hinweise

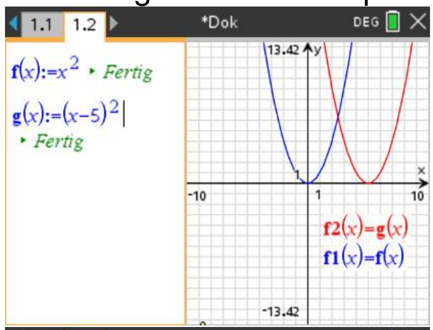
Durch Visualisierung von Funktionsgraphen lassen sich bestimmte Eigenschaften zum Verlauf, zum Definitionsbereich und Wertebereich erkennen.

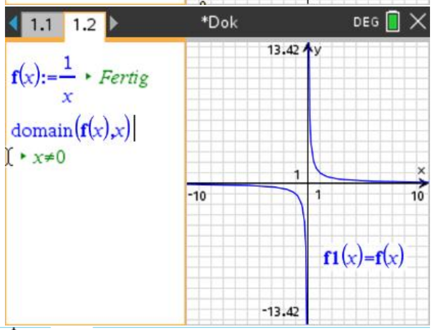
Geeignet ist hierbei die Eingabe des Funktionsterms in der Applikation ***Notes*** und die Zweiteilung des Bildschirms.

doc▾ – *Seitenlayout – Layout auswählen*

Der Befehl ***domain(Funktion, Variable)*** gibt den Definitionsbereich der Funktion aus.

Umsetzung auf dem TI-Nspire





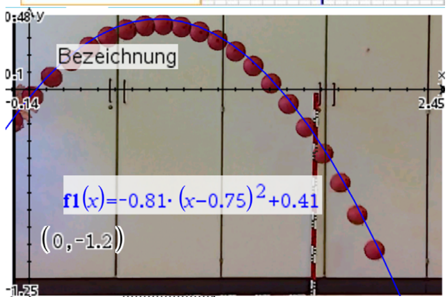
Eigenschaften von Funktionen an einer Anwendung: Der Wurf eines Balles wird analysiert.

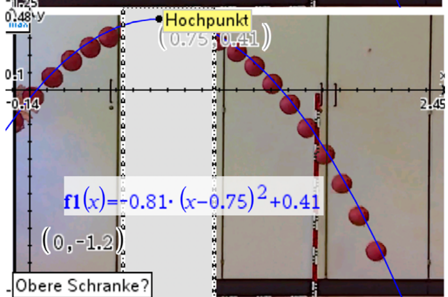
Zunächst wird der Maßstab eingestellt, dann kann eine Parabel durch die Bilder des Balles gelegt werden. Man einfachsten ist es, eine Normalparabel anzeigen zu lassen und dann mit Hilfe der Maus den Scheitelpunkt zu verschieben und den Öffungsfaktor an die Wurfparabel anzupassen.

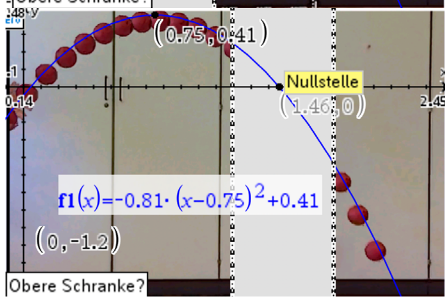
Mittels Tool *Graph analysieren* lassen sich einzelne Eigenschaften anzeigen:

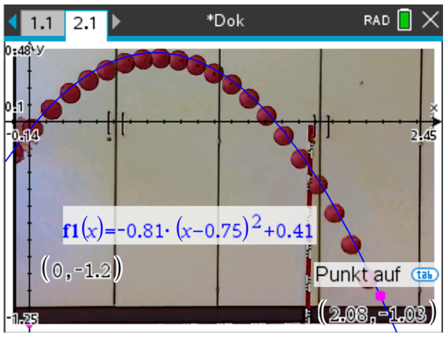
menu – *Graph analysieren*
und dort dann die gewünschte Eigenschaft auswählen.

Für das Maximum wählt man eine Stelle links neben dem Maximum, markiert einen Bereich in der Umgebung vom Hochpunkt und drückt enter.
Analog können die Nullstellen bestimmt werden.









Die Funktionswerte der Randpunkte können im z.B. ***Calculator*** ausgeben werden, oder ein Punkt wird auf den Graphen gelegt und auf die Ränder bewegt.

Der Lehrplan fordert das Erstellen eines Algorithmus, der aus den Koordinaten von zwei Punkten die Gleichung des zugehörigen Funktionsgraphen ermittelt.
Hierzu eignet sich hervorragend die Applikation ***Notes***, da die hier in Mathe-Feldern eingegebenen Werte sofort die weiterführenden Berechnungen beeinflussen.

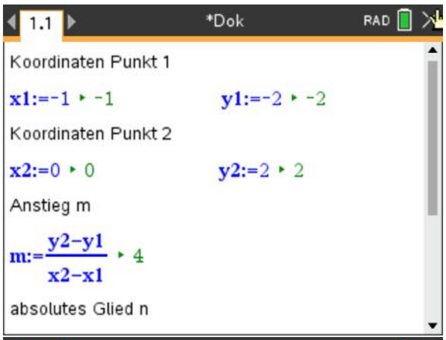
Hinweise
Die Gleichung einer linearen Funktion soll aus den Koordinaten zweier gegebener Punkte ermittelt werden:

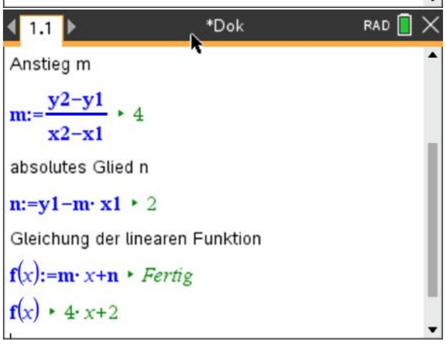
Man verwendet die Applikation ***Notes*** und definiert in Mathe-Feldern (ctrl M) die Koordinaten eines Punktes 1 und eines Punktes 2.

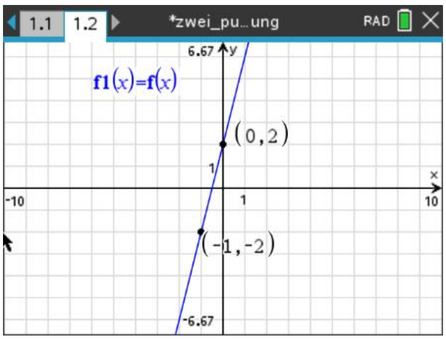
Der Anstieg m ergibt sich aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Einsetzen liefert dann für n : $n = y_1 - m \cdot x_1$

Umsetzung auf dem TI-Nspire







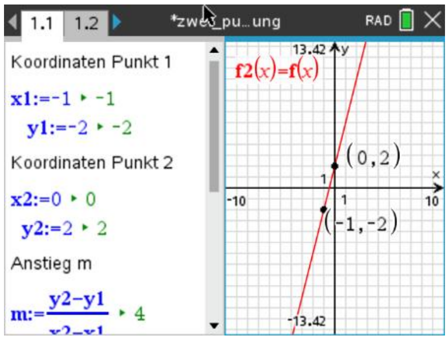
Der zugehörige Graph und die gegebenen Punkte können dann in der Applikation ***Graphs*** visualisiert werden.

Für die Anzeige der Punkte wählt man im Geometriemenü

menu–*Geometry – Punkte und Geraden – Punkte nach Koordinaten*

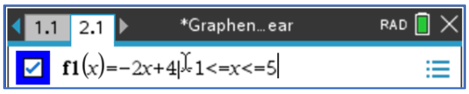
und ersetzt die vorgegebenen Werte durch x1 und y1 bzw. x2 und y2.

Alternativ kann für die Darstellung auch der Bildschirm geteilt werden.

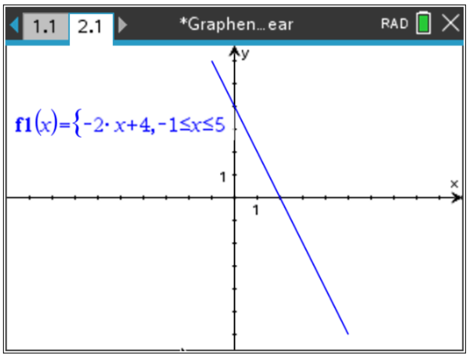


Arbeitsblatt1: Graphen linearer Funktionen darstellen.

Beispiel:
Zeichne den Graphen der linearen Funktion f mit y = f(x) = - 2x + 4 mit $-1 \leq x \leq 5$.
Lösung:
Öffne die Anwendung *Graphs*. Gib in die sich automatisch öffnende Eingabezeile hinter f1(x)= den Funktionsterm -2x + 4 ein.



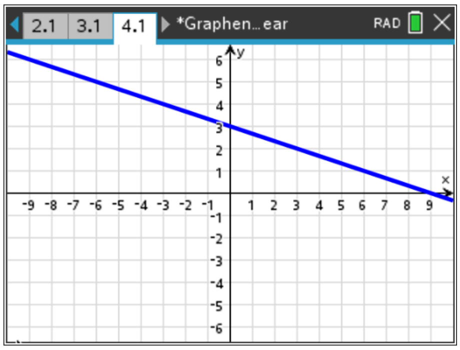
Füge den Bedingungsstrich (*with*-Operator |) ein und danach die einschränkenden Bedingungen -1 ≤ x ≤ 5. Drücke enter und der Graph wird automatisch eingezeichnet. Auch seine Funktionsgleichung wird angezeigt.
(Beachte, dass die Funktionsgleichung in etwas anderer Form angegeben wird.)



Aufgaben:

1. Zeichne mit dem CAS-Rechner die Graphen der angegebenen Funktionen in ein und denselben Bildschirm.

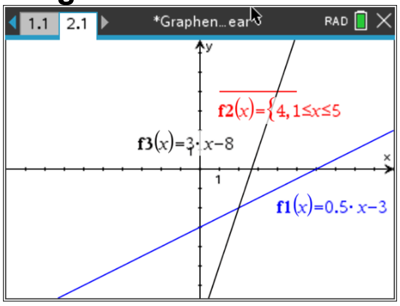
   y = f(x) = 0,5x – 3 y = g(x) = 4 mit $1 \leq x \leq 5$ y = h(x) = 3x – 8
   Hinweis: Drücke tab, um in die Eingabezeile zu kommen.
2. Zeichne den Graphen der Funktion y = f(x) = 0,2x – 20. Mache den Graphen auf dem Bildschirm sichtbar, indem du unter menu *Fenster* geeignete Einstellungen wählst. Erläutere dein Vorgehen.



3. Auf dem Screenshot ist der Graph einer linearen Funktion eingezeichnet. Allerdings wurden die Funktionsgleichung ausgeblendet, ein Gitter angezeigt, die Beschriftungen auf den Achsen vervollständigt und der Graph in anderer Strichstärke gezeichnet. Finde heraus, wie du diese Darstellung auch hinbekommst und bereite dazu einen kleinen Vortrag vor.
4. Erläutere die Zweipunkteform $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ der Geradengleichung. Erzeuge mit dieser Zweipunktegleichung eine Gleichung der Form y = f(x) = mx + n der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A(-2; 3) und B(4; -2) verläuft.
   Trage die Punkte A und B auf dem Bildschirm ein, lege eine Gerade durch diese Punkte und lasse dir deren Gleichung mit ctrl menu *Koordinaten/Gleichung* anzeigen. Vergleiche diese Gleichung mir der, die du über die Zweipunkteform gefunden hast.

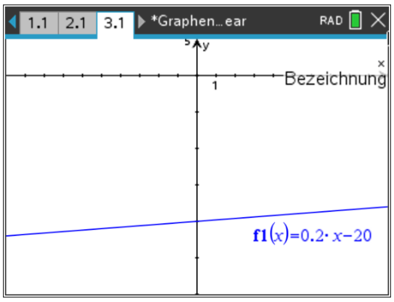
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 1

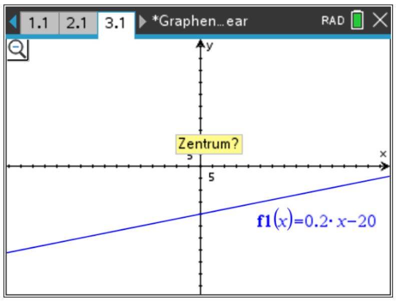
Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

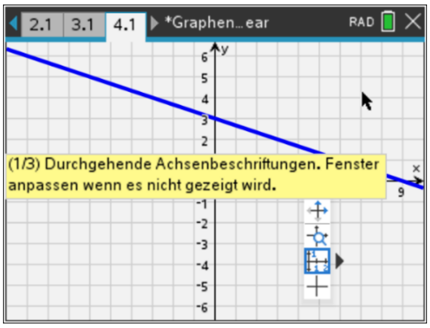
Weil der y-Achsendurchgang bei – 20 liegt und der Anstieg m = 0,2 sehr klein ist, wird der Graph im Standardfenster nicht zu sehen sein. Man kann z. B. unter $\boxed{\text{menu}}$ *Fenster/Zoom - Fenstereinstellungen* wählen und die Einstellungen so verändern, dass der Graph auf dem Bildschirm sichtbar wird. Auch die Verwendung der Anweisung *Verkleinern* ist denkbar.





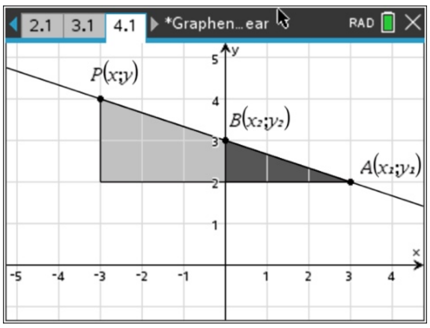
Aufgabe 3:

Die Gleichung des Graphen kann man ablesen: $y = -\frac{1}{3}x + 3$.



Die Achsenbeschriftungen lassen sich verändern, indem man den Cursor auf eine Achse setzt, mit $\boxed{\text{ctrl}}$ $\boxed{\text{menu}}$ *Attribute* wählt und dort diese Eigenschaft ändert. Achtung: Das funktioniert nur, wenn der Koordinatenursprung ziemlich mittig liegt.
Um die Funktionsgleichung auszublenden, setzt man den Cursor auf die Gleichung und wählt $\boxed{\text{ctrl}}$ $\boxed{\text{menu}}$ *Auswahl*.
Um die Strichstärke des Graphen zu ändern, setzt man den Cursor auf den Graphen und wählt $\boxed{\text{ctrl}}$ $\boxed{\text{menu}}$ *Attribute*.
Um ein Gitter einzufügen, wird $\boxed{\text{menu}}$ *Ansicht-Gitter-liniertes Gitter* gewählt.

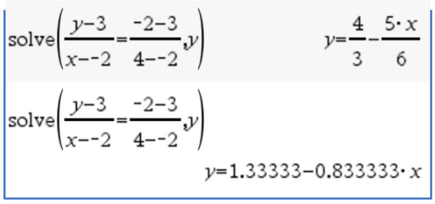
Aufgabe 4:



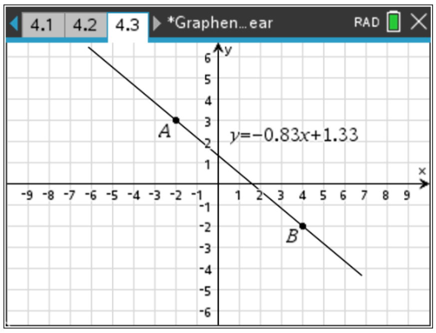
Der Anstieg der Geraden ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Zwischen den beiden voneinander verschiedenen Punkten $A(x_1;\ y_1)$ und $B(x_2;\ y_2)$ kann man den Anstieg angeben durch $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Der Anstieg zwischen einem beliebigen Punkt P(x; y) und dem Punkt A ist $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ $(P \neq A)$.

Da eine Gerade überall ein und denselben Anstieg hat, kann man beide Formeln gleichsetzen und erhält damit die Zweipunkteform $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
Für die Punkte A und B erhält man die Gleichung
$y = f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3} \approx -0{,}83x + 1{,}33$.



Man zeichnet ein Koordinatensystem mit liniertem Gitter, um die Punkte besser platzieren zu können. Mit menu *Geometry-Punkte&Geraden-Punkt auf*
werden die Punkte gesetzt und mit
menu *Geometry-Punkte&Geraden-Gerade* wird die Gerade gezeichnet. Mit ctrl menu *Koordinaten/Gleichungen* wird die Geradengleichung angezeigt, wenn man den Cursor vorher auf die Gerade setzt.



Arbeitsblatt 2: Funktionsgraphen darstellen

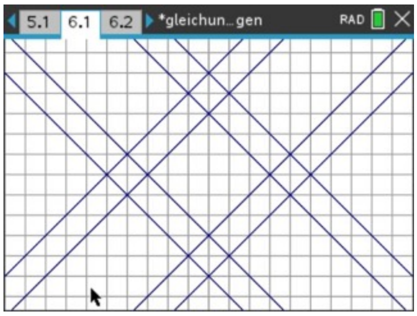
Erzeuge mit deinem TI-Nspire folgende Bilder.
Notiere mögliche Funktionsgleichungen und kennzeichne die zugehörigen Graphen.

$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

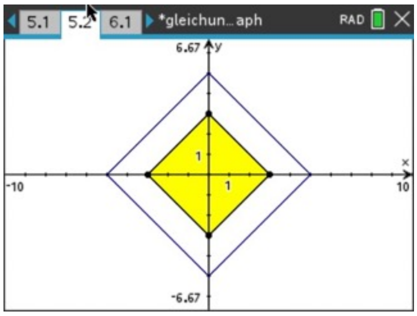
$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $f_6(x) =$

$f_7(x) =$ $f_8(x) =$



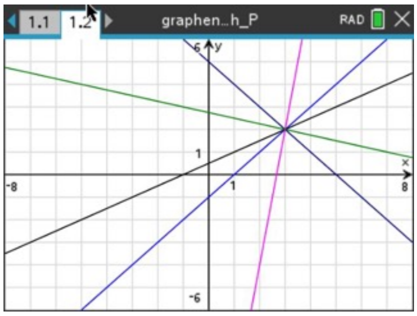
Tipp:
Das gelbe Quadrat erhält man, indem man aus dem Geometriemenü eine passende Form auswählt und diese über ihre Eigenschaften färbt.



$g_1(x) =$ $g_2(x) =$

$g_3(x) =$ $g_4(x) =$

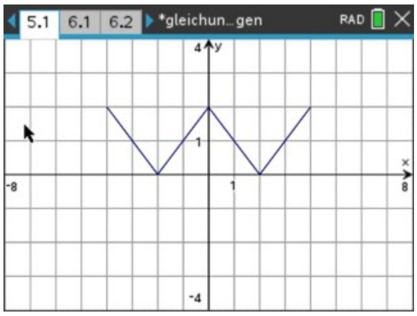
$g_5(x) =$



$w_1(x) =$ $w_2(x) =$

$w_3(x) =$ $w_4(x) =$

Kann man dieses Bild durch weniger als vier Gleichungen beschreiben?
(Menüpunkt 5 aus dem Katalog nutzen.)



$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

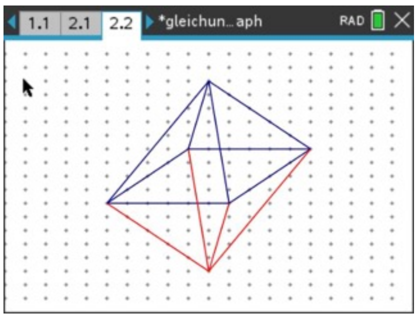
$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $f_6(x) =$

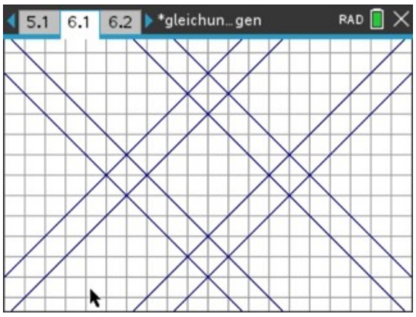
$f_7(x) =$ $f_8(x) =$

$f_9(x) =$ $f_{10}(x) =$

$f_{11}(x) =$ $f_{12}(x) =$



LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 2

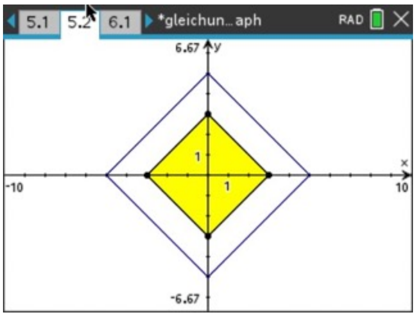


$f_1(x) = x + 3$ $\quad$ $f_2(x) = x + 5$

$f_3(x) = x - 3$ $\quad$ $f_4(x) = x - 5$

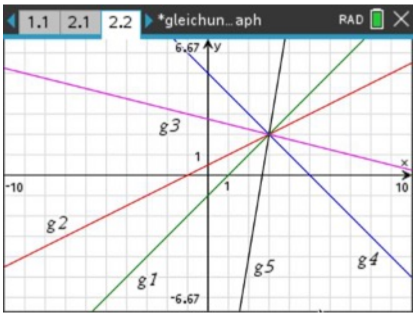
$f_5(x) = -x + 3$ $\quad$ $f_6(x) = -x + 5$

$f_7(x) = -x - 3$ $\quad$ $f_8(x) = -x - 5$



siehe f_1 bis f_8 , abschnittsweise definiert
$f_1(x) = x + 3 | -3 \le x \le 0, \ldots, f_4(x) = x - 5 | 0 \le x \le 5$
$f_5(x) = -x + 3 | 0 \le x \le 3, \ldots, f_8(x) = -x - 5 | -5 \le x \le 0$

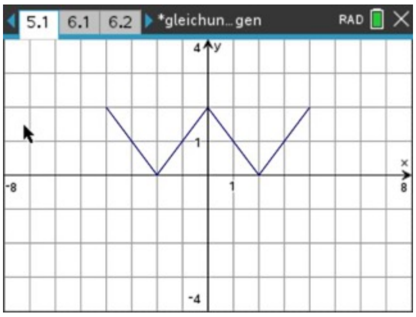
menu - *Geometry – Formen*
Form auswählen und über Menüpunkte Farbe färben



$g_1(x) = x - 1$ $\quad$ $g_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$g_3(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ $\quad$ $g_4(x) = -x + 5$

$g_5(x) = 6x - 16$

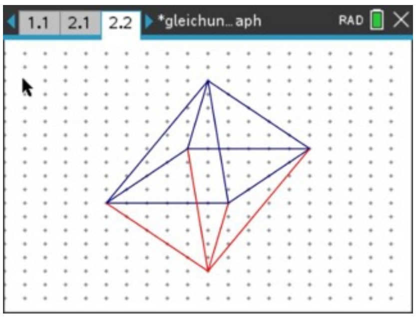


$w_1(x) = -x - 2 | -4 \le x \le -2$ $\quad$ $w_2(x) = x + 2 | -2 \le x \le 0$

$w_3(x) = -x + 2 | 0 \le x \le 2$ $\quad$ $w_4(x) = x - 2 | 2 \le x \le 4$

Kann man dieses Bild durch weniger als vier Gleichungen beschreiben?

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 2 & -2 \le x \le 2 \\ |x| - 2 & -2 < x < -1 \lor 1 < x < 2 \end{cases}$$



$f_1(x) = 2 | -1 \le x \le 5$ $\quad$ $f_2(x) = -2 | -5 \le x \le 1$

$f_3(x) = x + 3 | -5 \le x \le -1$ $\quad$ $f_4(x) = x - 3 | 1 \le x \le 5$

$f_5(x) = 5x + 7 | -1 \le x \le 0$ $\quad$ $f_6(x) = \frac{9}{5}x + 7 | -5 \le x \le 0$

$f_7(x) = -9x + 7 | 0 \le x \le 1$ $\quad$ $f_8(x) = -x + 7 | 0 \le x \le 5$

$f_9(x) = -9x - 7 | -1 \le x \le 0$ $\quad$ $f_{10}(x) = -x - 7 | -5 \le x \le 0$

$f_{11}(x) = 5x - 7 | 0 \le x \le 1$ $\quad$ $f_{12}(x) = \frac{9}{5}x - 7 | 0 \le x \le 5$

(andere Lösungen sind möglich)

Arbeitsblatt 3: Bilder aus Funktionsgraphen

Aufgabe 1:
Schüler wollen für ihre Firma ein Logo entwerfen. Paul macht den abgebildeten Vorschlag. Erzeuge diese Abbildung. Die Strecke vom tiefsten Punkt bis zum Koordinatenursprung auf der y-Achse wird durch die eine waagerechten Strecke halbiert und durch die zweite Strecke im Verhältnis 4 : 1 geteilt.

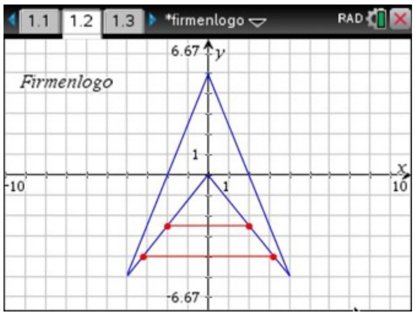
konkaves Viereck:

$f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $\qquad$ $f_4(x) =$

waagerechte Strecken:

$k_1(x) =$ $\qquad$ $k_2(x) =$



Aufgabe 2:
Erzeuge die abgebildete Pyramide (verschiedene Lösungen sind möglich).

Grundfläche:

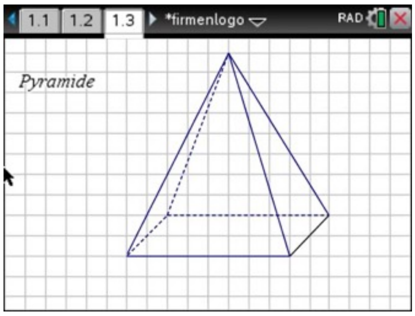
$g_1(x) =$ $\qquad$ $g_2(x) =$

$g_3(x) =$ $\qquad$ $g_4(x) =$

Seitenkanten:

$f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $\qquad$ $f_4(x) =$



Aufgabe 3:
Erzeuge nebenstehenden Weihnachtsstern (verschiedene Lösungen sind möglich).

vierzackiger Stern:

$f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $\qquad$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $\qquad$ $f_6(x) =$

$f_7(x) =$ $\qquad$ $f_8(x) =$

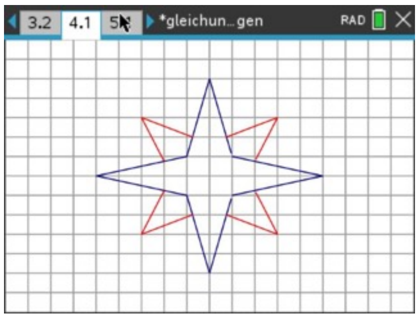
die kleinen Zacken:

$k_1(x) =$ $\qquad$ $k_2(x) =$

$k_3(x) =$ $\qquad$ $k_4(x) =$

$k_5(x) =$ $\qquad$ $k_6(x) =$

$k_7(x) =$ $\qquad$ $k_8(x) =$



LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1:

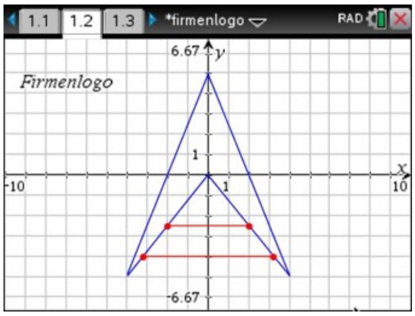
konkaves Viereck:

$f_1(x) = \frac{5}{2}x + 5 | -4 \leq x \leq 0$ $\quad f_2(x) = -\frac{5}{2}x + 5 | 0 \leq x \leq 4$

$f_3(x) = \frac{5}{4}x | -4 \leq x \leq 0$ $\quad f_4(x) = -\frac{5}{4}x | 0 \leq x \leq 4$

waagerechte Strecken:

$k_1(x) = -\frac{5}{2} | -2 \leq x \leq 2$ $\quad k_2(x) = -4 | -\frac{16}{5} \leq x \leq \frac{16}{5}$



Aufgabe 2:
Erzeuge die abgebildete Pyramide.

Grundfläche:

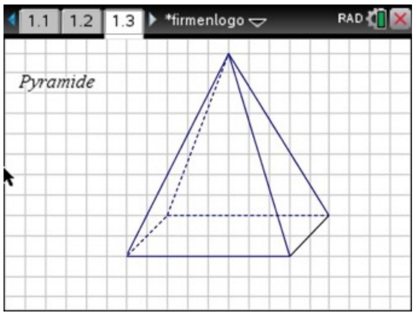
$g_1(x) = -2 | -2 \leq x \leq 6$ $\quad g_2(x) = -4 | -4 \leq x \leq 4$

$g_3(x) = x | -4 \leq x \leq -2$ $\quad g_4(x) = x - 8 | 4 \leq x \leq 6$

Seitenkanten:

$f_1(x) = 2x + 4 | -4 \leq x \leq 1$ $\quad f_2(x) = \frac{8}{3}x + \frac{10}{3} | -2 \leq x \leq 1$

$f_3(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{38}{5} | 1 \leq x \leq 6$ $\quad f_4(x) = -\frac{10}{3}x + \frac{28}{3} | 1 \leq x \leq 4$



Aufgabe 3:
Erzeuge nebenstehenden Weihnachtsstern.

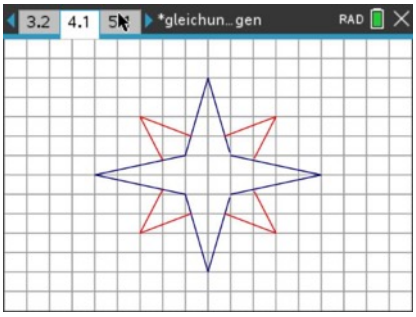
vierzackiger Stern:

$f_1(x) = 4x + 5 | -1 \leq x \leq 0$ $\quad f_2(x) = -4x + 5 | 0 \leq x \leq 1$

$f_3(x) = -4x - 5 | -1 \leq x \leq 0$ $\quad f_4(x) = 4x - 5 | 0 \leq x \leq 1$

$f_5(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} | -5 \leq x \leq -1$ $\quad f_6(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} | -5 \leq x \leq -1$

$f_7(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} | 1 \leq x \leq 5$ $\quad f_8(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} | 1 \leq x \leq 5$



die kleinen Zacken:

$k_1(x) = -\frac{9}{4}x - \frac{15}{4} | -3 \leq x \leq -2$ $\quad k_2(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{15}{9} | -3 \leq x \leq -\frac{3}{4}$

$k_3(x) = \frac{4}{9}x + \frac{15}{9} | \frac{3}{4} \leq x \leq 3$ $\quad k_4(x) = \frac{9}{4}x - \frac{15}{4} | 2 \leq x \leq 3$

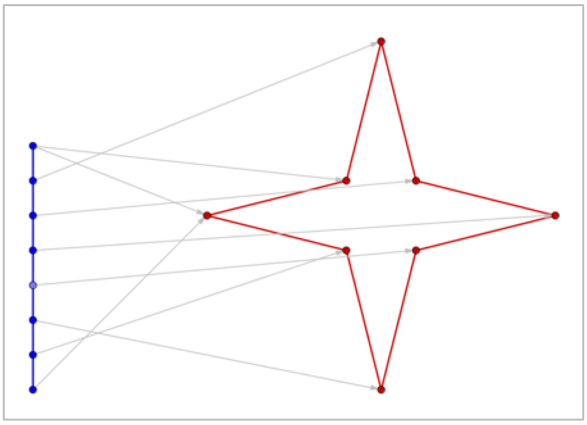
$k_5(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{15}{4} | 2 \leq x \leq 3$ $\quad k_6(x) = -\frac{4}{9}x - \frac{15}{9} | \frac{3}{4} \leq x \leq 3$

$k_7(x) = \frac{4}{9}x - \frac{15}{9} | -3 \leq x \leq -\frac{3}{4}$ $\quad k_8(x) = \frac{9}{4}x + \frac{15}{4} | -3 \leq x \leq -2$

Arbeitsblatt 4: Eine Strecke wird zum Weihnachtsstern (Vertiefung)[8]

Auf einer Strecke sind 8 Punkte festgelegt. Diese Punkte werden in die Eckpunkte eines vierzackigen Sterns "überführt".
Erzeuge anhand der Hinweise und Abbildungen eine Datei, die dieses realisiert.

Hinweise:



Die Punkte, die auf der Strecke festgelegt sind, sollen auf Geraden in die Eckpunkte des Sterns "wandern".

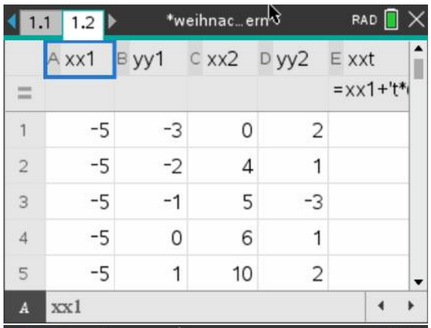
Dazu werden für die Punkte auf der Strecke und die Eckpunkte des Sterns Koordinaten festgelegt und diese in der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** in jeweils zwei Listen übertragen: z.B.: $(xx1|\,yy1)$ für die Strecke und $(xx2|\,yy2)$ für den Stern.
Diese Punkte werden als Streudiagramme angezeigt.
Ein Schieberegler mit der Variablen t, einem Definitionsbereich $0 \leq t \leq 1$ und einer Schrittweite von 0.01 ermöglicht nun das "Wandern" der Punkte.

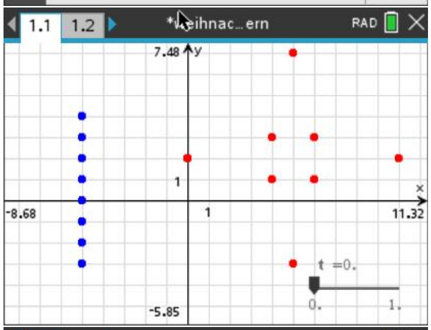
Über die Attribute der Streuplots können die Punkte verbunden und später minimiert werden.

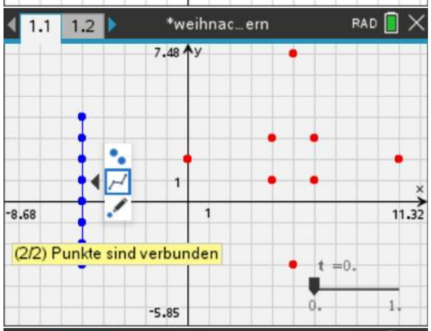
Für die "wandernden" Punkte werden zwei weitere Listen xxt und yyt erzeugt.
Für diese Punkte gelten dann folgende Zusammenhänge:

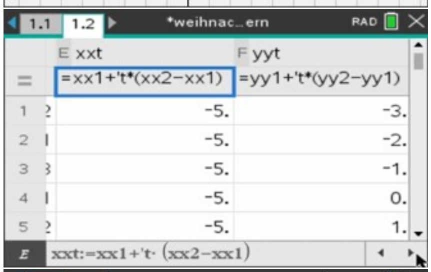
$$xxt = xx1 + t \cdot (xx2 - xx1)$$
bzw. $$yyt = yy1 + t \cdot (yy2 - yy1)$$

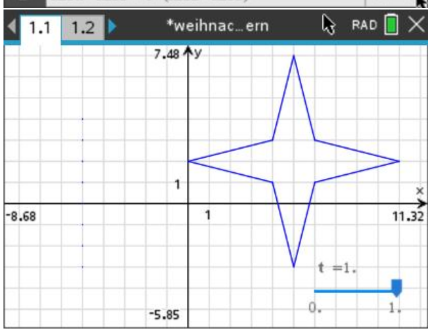
Abschließend wird für diese Zuordnung einen weiteres Streudiagramm erstellt. Das Streudiagramm für den Stern wird deaktiviert.











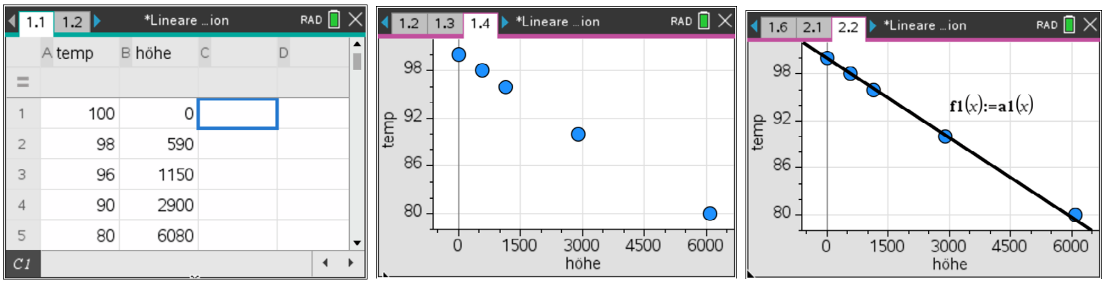
[8] Lösungen in Datei: streckezustern.tns

Arbeitsblatt 5: Lineare Regression

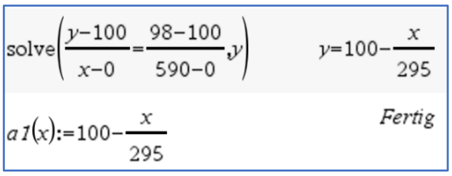
Beispiel:
Die Tabelle zeigt den Zusammenhang der Siedetemperatur des Wassers[9] mit der Meereshöhe.

Siedetemperatur in °C	100	98	96	90	80
Höhe über dem Meer in m	0	590	1150	2900	6080

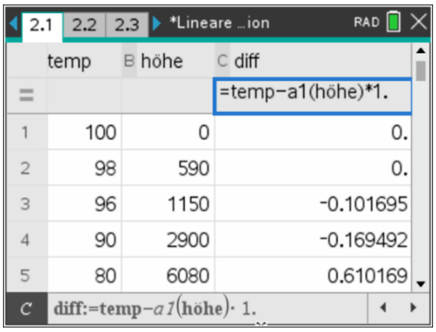
Wir übertragen die Tabelle in die Anwendung *Lists&Spreadsheet* und zeichnen das zugehörige Diagramm in der Anwendung *Data&Statistics*.



Die graphische Darstellung legt einen linearen Zusammenhang nahe.



Wir verwenden zunächst die **ersten beiden Messwertpaare**, um die Gleichung einer passenden Geraden zu finden. Wir erhalten als mathematisches Modell $a1(x) = -\frac{1}{295}x + 100$. Diese Gerade wird noch in das Diagramm eingetragen.
(menu *Analysieren-Funktion zeichnen*)

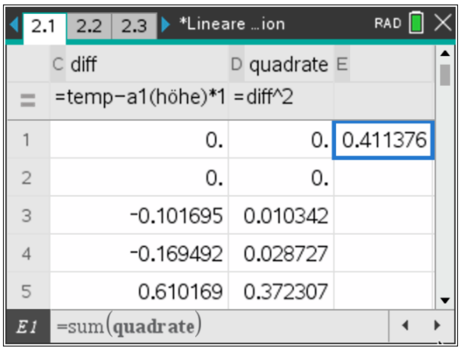


Wir berechnen, welche Abweichungen zwischen den Funktionswerten von a1 und den Messwerten der Siedetemperatur vorliegen. Dazu wird die Differenz der Funktionswerte von a1(x) und der zugehörigen Siedetemperatur gebildet. Für die ersten beiden Werte ist die Differenz null, weil aus diesen Werten die Gleichung für a1 gebildet wurde. Bei den anderen Werten gibt es geringfügige Abweichungen nach oben oder unten. Dies ist auch in der Abbildung oben rechts zu erkennen.

Um ein Maß für die Güte der Annäherung zu erhalten, wird Folgendes vereinbart:
Die Differenzen werden quadriert und die Ergebnisse werden summiert. Je kleiner diese Summe ist, desto bessere Qualität wird der Näherung zugeschrieben.

[9] https://media.gettyimages.com/photos/hot-water-tesbag-picture-id632002879?s=2048x2048

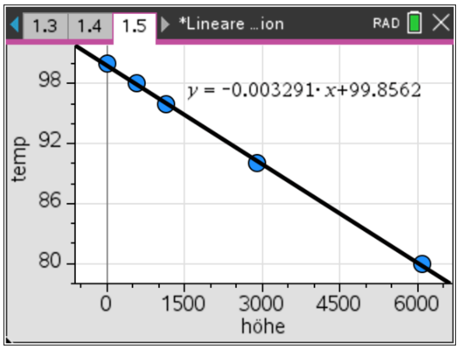
Diese **Methode der kleinsten Quadrate** geht auf Carl-Friedrich Gauß zurück.
Durch das Quadrieren der Differenzen wird das Vorzeichen der Differenz vernachlässigbar. Größere Abweichungen werden durch das Quadrieren stärker gewichtet. Je kleiner die Summe der Quadrate ist, desto weniger fallen die Abweichungen ins Gewicht.



Aufgabe 1:

Bestimmt Gleichungen von Ausgleichsgeraden z. B. mithilfe zweier anderer Messwertpaare und bestimmt jedesmal die Summe der kleinsten Quadrate. Geht arbeitsteilig vor. Man kann aus den fünf Messwertpaaren insgesamt zehnmal zwei auswählen und so zehn verschiedene Geradengleichungen ermitteln oder eine Ausgleichsgerade „nach Augenmaß“ einfügen, die keinen oder nur einen der Punkte enthält. Bei welcher Ausgleichsgeraden ist die Summe der kleinsten Quadrate am kleinsten?

Lineare Regression:



Für den CAS-Rechner ist ein Verfahren implementiert, mit dem diejenige optimale Ausgleichsgerade ermittelt wird, für die die Summe der kleinsten Quadrate ein Minimum ist. Wähle unter menu *Analysieren-Regression-Lineare Regression (y = mx + b) anzeigen*. Das Verfahren der „Lineare Regression“ beruht auf der Methode der kleinsten Quadrate. Eine ausführliche Herleitung ist an dieser Stelle nicht möglich.
Gleichung der Regressionsgeraden: y = -0,003291x + 99,8562.

Aufgabe 2:

Bestimme mit der Gleichung der Regressionsgeraden die Summe der kleinsten Quadrate. Vergleiche das Ergebnis mit den Resultaten der Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Ermittle mithilfe der Gleichung der Regressionsgeraden die Siedetemperatur in 4000 m Höhe über dem Meeresspiegel.
In welcher Höhe über NN könnte sich eine Expedition befinden, wenn sie eine Siedetemperatur von 85°C feststellt?

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1:

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{96-100}{1150-0},y\right) \quad y=100-\frac{2\cdot x}{575}$$
$$f2(x):=100-\frac{2\cdot x}{575} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f2(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 1.32779$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{90-100}{2900-0},y\right) \quad y=100-\frac{x}{290}$$
$$f3(x):=100-\frac{x}{290} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f3(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 0.934602$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{80-100}{6080-0},y\right) \quad y=100-\frac{x}{304}$$
$$f4(x):=100-\frac{x}{304} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f4(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 0.262725$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{96-98}{1150-590},y\right) \quad y=\frac{2803}{28}-\frac{x}{280}$$
$$f5(x):=\frac{2803}{28}-\frac{x}{280} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f5(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 2.65689$$

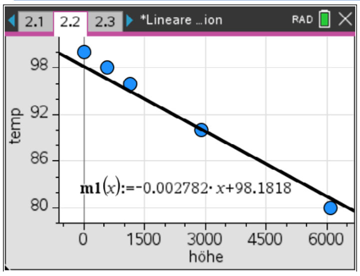
$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{90-98}{2900-590},y\right) \quad y=\frac{23110}{231}-\frac{4\cdot x}{1155}$$
$$f6(x):=\frac{23110}{231}-\frac{4\cdot x}{1155} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f6(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 1.03169$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{80-98}{6080-590},y\right) \quad y=\frac{6096}{61}-\frac{x}{305}$$
$$f7(x):=\frac{6096}{61}-\frac{x}{305} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f7(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 0.212846$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-96}{x-1150}=\frac{90-96}{2900-1150},y\right) \quad y=\frac{3498}{35}-\frac{3\cdot x}{875}$$
$$f8(x):=\frac{3498}{35}-\frac{3\cdot x}{875} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f8(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 0.824816$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-96}{x-1150}=\frac{80-96}{6080-1150},y\right) \quad y=\frac{49168}{493}-\frac{8\cdot x}{2465}$$
$$f9(x):=\frac{49168}{493}-\frac{8\cdot x}{2465} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f9(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 0.207728$$

$$\operatorname{solve}\left(\frac{y-90}{x-2900}=\frac{80-90}{6080-2900},y\right) \quad y=\frac{15760}{159}-\frac{x}{318}$$
$$f10(x):=\frac{15760}{159}-\frac{x}{318} \quad \textit{Fertig}$$
$$\operatorname{sum}\left(\left(f10(höhe)-temp\right)^2\right) \quad 1.56362$$



Bei den Ausgleichsgeraden durch zwei Messwertpaare ergibt sich die kleinste Summe für (6080 m; 80 °C) und (1150 m; 96 °C).
Mit menu *Analysieren-Verschiebbare Gerade hinzufügen* lassen sich Ausgleichsgeraden nach Augenmaß in die Punktemenge legen und auf analogem Wege die Summen der quadratischen Abweichungen berechnen.

Aufgabe 2:

$fr(x):=-0.003291\cdot x+99.8562$	*Fertig*
$\mathrm{sum}\left(\left(fr(h\ddot{o}he)-temp\right)^2\right)$	0.154071

Diese Summe ist noch kleiner als die kleinste Summe bei Aufgabe 1.

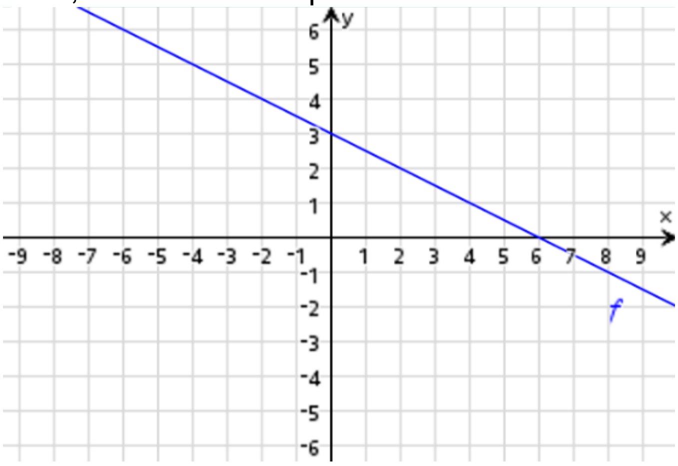
Aufgabe 3:

$fr(x):=-0.003291\cdot x+99.8562$	*Fertig*
$fr(4000)$	86.6922
$\mathrm{solve}(fr(x)=85,x)$	$x=4514.19$

In 4000 m Höhe über NN beträgt die Siedetemperatur etwa 86,7° C.
Für eine Siedetemperatur von 85°C kommt eine Höhe über NN von etwa 4514 m in Frage.

Arbeitsblatt 6: Anwendungen zu linearen Funktionen

1. In der Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion f abgebildet.
Löse die Teilaufgaben a, b und c zunächst, ohne den TI-Nspire zu verwenden.



a) Beurteile, ob die Punkte A(1,5; 2,2) und B(-12; 9) auf dem Graphen von f liegen.
b) Der Graph einer linearen Funktion g verläuft senkrecht zum Graphen von f und hat die Nullstelle $x_0 = -0{,}5$. Zeichne den Graphen von g ein, und gib eine Gleichung für g an.
c) Die Geraden f und g schließen mit der y-Achse eine Fläche ein. Ermittle deren Flächeninhalt.
d) Beschreibe und realisiere nun, wie du die Lösungen der Teilaufgaben 1a, 1b und 1c mit dem TI – Nspire ermitteln kannst.

2. Dichte einer Flüssigkeit ermitteln[10]
In einem Schülerexperiment soll die Dichte einer unbekannten Flüssigkeit bestimmt werden. Dazu werden verschiedene Volumina der Flüssigkeit in dieses Glas gefüllt und die zugehörigen Massen des gefüllten Glases bestimmt.

Die Tabelle zeigt die Messergebnisse:

V in ml	20	40	60	80	100
m in g	44	60	77	92	109

Bearbeite nachfolgende Aufgaben mit deinem TI-Nspire. Dokumentiere den jeweiligen Lösungsweg.
a) Stelle die Messwerte in einem Diagramm dar. Ordne die Volumina der waagerechten Achse und die Massen der senkrechten Achse zu.
b) Zeige, dass alle aufgenommenen Messwerte näherungsweise auf ein und derselben Geraden liegen. Ermittle durch lineare Regression eine Funktionsgleichung m(V), die den Zusammenhang von Masse m und Volumen V näherungsweise beschreibt.
c) Erläutere die Bedeutung des Anstieges und des Schnittpunkts des Graphen von m(V) mit der senkrechten Achse.
d) Beurteile, ob 2,3 kg der Flüssigkeit in einen Drei-Liter-Kanister passen.

[10] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR9FyPK3JAthhDUx3AGAwPKYVOBe1TNPjX0YA&usqp=CAU

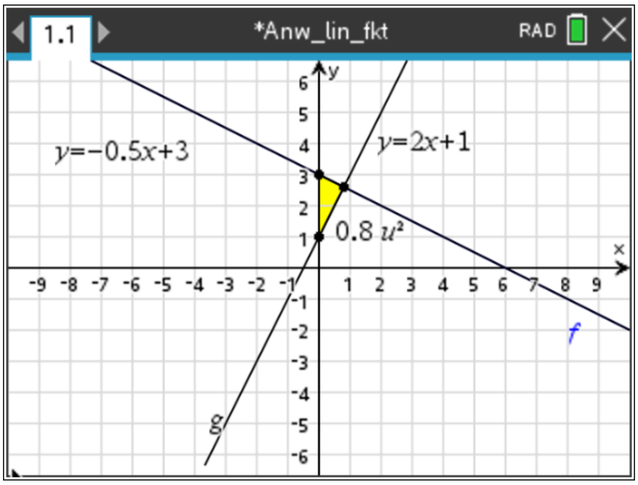
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1

a) Gleichung von f: $y = f(x) =-\frac{1}{2}x + 3$
$f(1{,}5) =-0{,}75 + 3 = 2{,}25 \neq 2{,}2$,
A liegt nicht auf f
$f(-12) = 6 + 3 = 9$, B liegt auf f

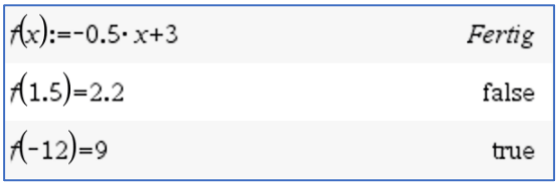
b) Anstieg von g: m = 2;
Einsetzen von m = 2 und
x = 0,5 sowie y = 0 in y = mx +n
ergibt $0 = 2 \cdot 0{,}5 + n$, also n = 1.
g: y = 2x + 1

c) Schnittstelle von f und g durch
Gleichsetzen 0,5x + 3 = 2x + 1 ergibt
x = 0,8.
Flächeninhalt:
A = $\frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot 0{,}8$ = 0,8 FE



Mit dem TI-Nspire kann man z. B. so vorgehen:

a) Man liest in der gegebenen Zeichnung die Koordinaten zweier Punkte des Graphen von f ab, z. B. P(0; 3) und Q(6; 0), trägt diese Punkte in *Graphs* ein und legt mit *Geometry-Punkte&Geraden* eine Gerade hindurch. Die Gleichung der Geraden kann man mit ctrl menu ablesen zu y=-0,5x + 3.
Die Gleichung wird als Funktion f(x) im *Calculator* gespeichert und dann überprüft man, ob die Koordinaten von A und B diese Gleichung erfüllen.



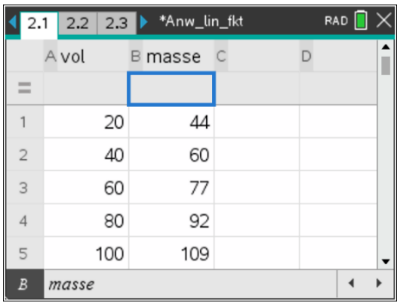
f(x):=−0.5·x+3	Fertig
f(1.5)=2.2	false
f(−12)=9	true

b) Mit dem Werkzeug *Geometry-Konstruktion-Senkrechte* wird die Senkrechte g zur Geraden f vom Punkt (-0,5; 0) aus eingezeichnet. Mit ctrl menu lässt man sich die Gleichung von g anzeigen.

c) Mit dem Werkzeug *Geometry-Formen-Dreieck* wird das zu messende Dreieck gezeichnet. Mit dem Werkzeug *Geometry-Messung-Fläche* wird der Flächeninhalt ermittelt.

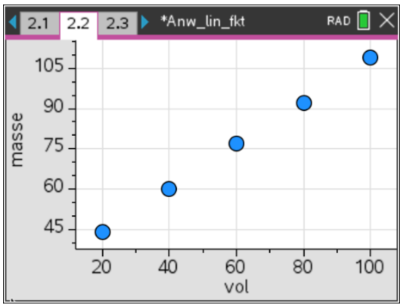
Aufgabe 2

a) Die Messwerte werden in die Tabellenkalkulation *Lists&Spreadsheet* des TI – Nspire übertragen. Die Volumina werden der Variablen **vol** und die Massen der Variablen **masse** zugeordnet.

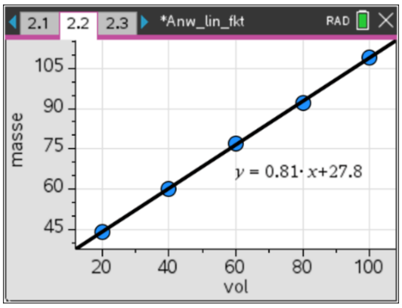


	A vol	B masse	C	D
=				
1	20	44		
2	40	60		
3	60	77		
4	80	92		
5	100	109		

b) Die Anwendung *Data&Statistics* wird geöffnet. Der waagerechten Achse wird die Variable **vol** und der senkrechten Achse die Variable **masse** zugeordnet. Die zu den Messwerten gehörenden Punkte liegen augenscheinlich auf einer Geraden.



Mit [menu] *Analysieren-Regression-lineare Regression* lässt sich eine Gerade mit der Gleichung y = 0,81x + 27,8 durch die Punkte legen. Im Sachzusammenhang bedeutet das $m(V) = 0{,}81 \cdot V + 27{,}8$.



Zum Vergleich werden in der Tabellenkalkulation die zum gegebenen Volumen gehörenden Massen mit dieser Gleichung ermittelt. Es ist zu erkennen, dass sich die Messwerte von denen des mathematischen Modells (also den Funktionswerten der Gleichung m(V)) nur wenig unterscheiden.

	A vol	B masse	C
=			=0.81*vol+
1	20	44	44.
2	40	60	60.2
3	60	77	76.4
4	80	92	92.6
5	100	109	108.8
C	=0.81· **vol**+27.8		

c) Der Anstieg der Geraden gibt die Dichte $\rho = 0{,}81\ \frac{g}{ml} = 0{,}81\ \frac{g}{cm^3}$ der unbekannten Flüssigkeit an. Der Durchgang durch die senkrechte Achse muss die Eigenmasse des Glases sein, denn das eingefüllte Volumen hat dort den Wert V = 0 ml.
Das Glas hat demzufolge eine Eigenmasse von 27,8 g.

d) 2,3 kg der Flüssigkeit haben ein Volumen V von $V = \frac{m}{\rho} = \frac{2300\ g}{0{,}81\ \frac{g}{ml}} \approx 2840\ ml.$
Das sind weniger als drei Liter, der Kanister kann verwendet werden.

Technische Hinweise für Lehrkräfte (Lineare Gleichungssysteme)

Für Problemstellungen, die auf das Lösen von Gleichungssystemen führen, lassen sich die im Katalog vordefinierten Symbole verwenden.

Hinweise
Man nutzt den solve-Befehl und das entsprechende Symbol aus dem Katalog.

Gegeben sind Gleichungssysteme, die genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzen.
Die Menge der gesuchten Variablen wird in geschweiften Klammern eingegeben.
(Es funktioniert aber auch ohne geschweifte Klammern.)

Wird keine Lösung gefunden, gibt der TI-Nspire "false" aus.
Die Wahrheitswerte für Aussagen sind "true" bzw. "false".

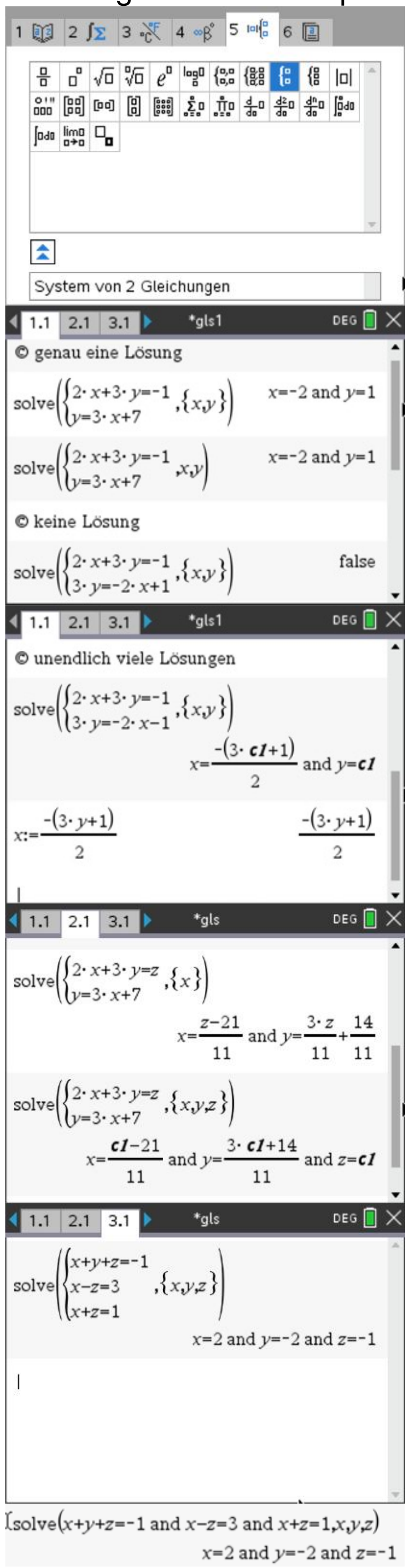
Hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, wird eine Lösung durch einen Parameter, hier ***c1***, beschrieben. Dabei gilt $c1 \in \mathbb{Q}$.
Nach dem Einsetzen erhält man die Lösung für x in Abhängigkeit von y.

Bemerkung:
Der TI-Nspire nummeriert den Parameter beginnend bei ***c1*** fortlaufend bis ***c99.***

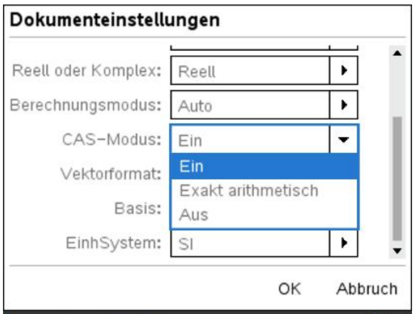
Bemerkung:
Die Ausgabe entsprechender Lösungen ist auch von der Eingabe der zu bestimmenden Variablen abhängig (siehe nebenstehende Ausgabe).

Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen lassen sich über das entsprechende Symbol aus dem Katalog ebenfalls bearbeiten.
Hinweis: Man kann ein Gleichungssystem auch lösen, indem man die Gleichungen durch den logischen Operator „and“ voneinander trennt und die Lösungsvariablen, durch ein Komma getrennt, anfügt.

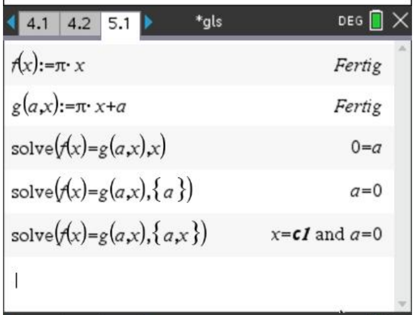
Umsetzung auf dem TI-Nspire



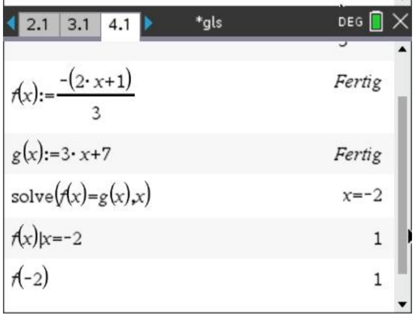
Der Vorteil gegenüber einem GTR ist, dass CAS symbolisch rechnen.
Deshalb sollte in den Systemeinstellungen auch der CAS-Modus "Ein" ausgewählt werden.



Bemerkung:
Zu beachten ist, dass je nach Angabe der ausgewählten Lösungsvariablen unterschiedliche Ergebnisse angezeigt werden.

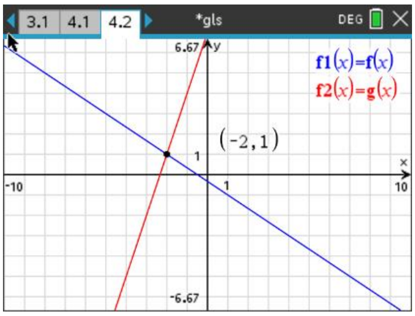


Eine größere Rolle im Unterricht spielt das Visualisieren der Lösungen von Systemen linearer Gleichungen.



Im Beispiel ist das System zweier Gleichungen
I $2 \cdot x + 3 \cdot y = -1$
II $y = 3 \cdot x + 7$
gegeben.

Formal wird die Gleichung I nach y aufgelöst und als Funktion f gespeichert.
Die Gleichung II wird als Funktion g gespeichert.
Ein Gleichsetzen von f und g liefert die Schnittstelle x.
Das Einsetzen (hier sind zwei Möglichkeiten angegeben) liefert den zugehörigen Funktionswert.



In der Applikation ***Graphs*** ist eine Visualisierung und über
menu – *Graph analysieren – Schnittpunkt*
die Angabe der Koordinaten des Schnittpunktes möglich.

Bemerkungen:
Das vorgestellte Beispiel dient nur dem exemplarischen Beschreiben eines möglichen Vorgehens. Im Unterricht wird man solche Gleichungen händisch umformen lassen. Das Gleichungssystem gehört zu denen, die auch ohne Hilfsmittel gelöst werden sollten.

Arbeitsblatt 8: Lineare Gleichungssysteme mit CAS lösen

Beispiel:

In einer Gaststätte gibt es Vierer- und Zweiertische. Eine Reisegruppe von 42 Personen nimmt an insgesamt 12 Tischen Platz. Ermittle, wie viele Vierer- und Zweiertische darunter sind.

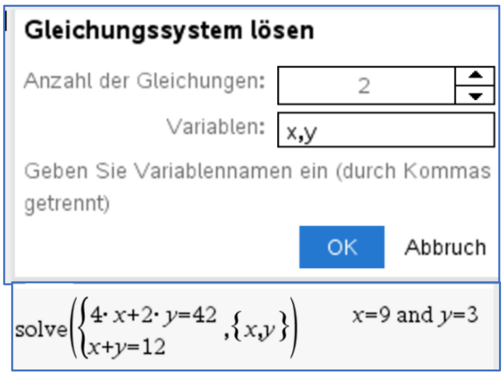
[11]

Lösung:

Es sei x die Anzahl der Vierertische und y die Anzahl der Zweiertische. Dem Aufgabentext kann man folgende Bedingungen entnehmen:

(1) x + y = 12 (Anzahl der Tische) (2) 4x + 2y = 42 (Anzahl der Personen)

Für die Lösung des Gleichungssystems wird der CAS-Rechner genutzt.



1. Schritt: menu *Algebra Gleichungssystem lösen – Gleichungssystem lösen* wählen.

   Anzahl der Gleichungen und Variablen angeben. OK drücken.
2. Schritt: In die Vorlage die Gleichungen eingeben. enter drücken.
3. Schritt: Lösungen ablesen und interpretieren.

   $\mathcal{L} \approx \{(9;3)\}$

   Die 42 Personen belegen neun Vierer- und drei Zweiertische.

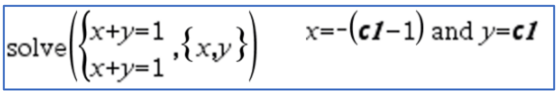
Aufgaben:

1. Löse die Gleichungssysteme mit deinem CAS-Rechner. Runde die Ergebnisse bei Bedarf auf zwei Nachkommastellen.

   a) $\begin{aligned} 2{,}1x + 3{,}2y &= 6{,}7 \\ x - 1{,}7y &= -1{,}3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2 \cdot (x-7) &= -3y \\ \tfrac{4}{5} \cdot (y+3x) &= \tfrac{5}{8} \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3 \cdot (2r+5s) &= 6 \cdot (s-2r) + 3 \\ -5 \cdot (s-7r) &= 11 \cdot (r+s-2) \end{aligned}$

2. Begründe, zunächst ohne den CAS-Rechner zu verwenden, weshalb das Gleichungssystem $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ keine Lösung besitzt. Ermittle dann die Lösungsmenge mit deinem CAS-Rechner. Beschreibe, woran du an der Rechneranzeige erkennen kannst, dass es sich um ein nicht lösbares System handelt.

Bekanntlich besitzt das Gleichungssystem $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$ unendlich viele Lösungen. Ermittelt man die Lösungsmenge mit dem CAS-Rechner, so erhält man die nebenstehende Anzeige.



[11] https://media.gettyimages.com/photos/greek-tavern-in-greek-islandgreece-picture-id1187291494?k=6&m=1187291494&s=612x612&w=0&h=I9PwsM__TD-7O_e_T0tLHXUbO34fwraeetfOr3Ohm8I=

Interpretation: „Für y kann man eine beliebige rationale Zahl einsetzen. Die zu diesem y-Wert zugehörige Zahl x ergibt sich aus dem für x angegebenen Term durch Einsetzen des y-Wertes.“ Man nennt ***c1*** eine „Zählvariable“.

3. Verwende die obige Rechneranzeige, um fünf Zahlenpaare (x; y) anzugeben, die das obige Gleichungssytem erfüllen.

4. Ermittle die Lösungsmengen der Gleichungssysteme.

   a) $\begin{matrix} 2y - 40 = x \\ -6y + 120 = -3x \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 2u = t - 2 \\ -14u + 7t - 28 = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} z - x + 2y = 4 \\ 3y + 2z - 7 = 4x \\ 4y + 3z - 7x = 10 \end{matrix}$

5. Begründe: Die Suche nach der Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{matrix} x + y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{matrix}$ lässt sich auch interpretieren als die Suche nach dem Schnittpunkt der Graphen der linearen Funktionen $f(x) = -x + 3$ und $g(x) = 2x + 5$.
   Ermittle auf beiden Wegen das Zahlenpaar, das als Lösung des Gleichungssystems bzw. als Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von f und g in Frage kommt.

6. Gegeben ist die Gleichung 2x – y = 1. Gib eine zweite Gleichung an, sodass das System aus beiden Gleichungen
   a) keine Lösung hat,
   b) unendlich viele Lösungen besitzt.

   Erläutere, was dies für die gegenseitige Lage der linearen Funktionen f und g bedeutet, deren Gleichungen man aus den Gleichungen des Systems gewinnen kann.

7. Ermittle die Lösungsmengen der Gleichungssysteme
   $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - 0{,}999y = 1 \end{matrix}$.
   Erkläre, woran es liegt, dass die beiden Gleichungssysteme, die sich nur um ein Tausendstel in einem Koeffizienten unterscheiden, derart unterschiedliche Lösungsmengen besitzen.

8. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\begin{matrix} x + 2ay = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{matrix}$ mit dem Parameter a, der für eine beliebige rationale Zahl $(a \neq 0)$ steht.
   a) Untersuche, welchen Einfluss der Parameter a auf die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat.
   b) Interpretiere das Ergebnis grafisch.

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 8:

Aufgabe 1:

a)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2.1\cdot x+3.2\cdot y=6.7\\ x-1.7\cdot y=-1.3\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=1.06795 \text{ and } y=1.39291$$

$$\mathbb{L} \approx \{(1{,}07;\, 1{,}39)\}$$

b)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot (x-7)=-3\cdot y\\ \frac{4}{5}\cdot (y+3\cdot x)=\frac{5}{8}\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=\frac{-373}{224} \text{ and } y=\frac{647}{112}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot (x-7)=-3\cdot y\\ \frac{4}{5}\cdot (y+3\cdot x)=\frac{5}{8}\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=-1.66518 \text{ and } y=5.77679$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{373}{224};\frac{647}{112}\right)\right\} \approx \{(-1{,}67;\, 5{,}78)\}$$

c)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot (2\cdot r+5\cdot s)=6\cdot (s-2\cdot r)+3\\ -5\cdot (s-7\cdot r)=11\cdot (r+s-2)\end{cases},\{r,s\}\right)$$

$$r=\frac{-25}{84} \text{ and } s=\frac{13}{14}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot (2\cdot r+5\cdot s)=6\cdot (s-2\cdot r)+3\\ -5\cdot (s-7\cdot r)=11\cdot (r+s-2)\end{cases},\{r,s\}\right)$$

$$r=-0.297619 \text{ and } s=0.928571$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{25}{84};\frac{13}{14}\right)\right\} \approx \{(-0{,}30;\, 0{,}93)\}$$

Aufgabe 2:

Das Gleichungssystem $\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=2 \end{matrix}$ ist nicht lösbar, weil die Summe ein und derselben zwei Zahlen nicht gleichzeitig 1 und 2 sein kann.

CAS-Anzeige:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad \text{false}$$

Wenn der CAS-Rechner nach dem Lösen eines Gleichungssystems die Anzeige „false“ („falsch“) zurückgibt, dann ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
(Die Lösungsmenge ist die leere Menge.)

Aufgabe 3:

Fünf Lösungspaare zu $\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad x=-(\boldsymbol{c1}-1) \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$

x	1	0	-1	2	-99
y	0	1	2	-1	100

Aufgabe 4:

a) $\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot y-40=x \\ -6\cdot y+120=-3\cdot x \end{cases},\{x,y\}\right)$

$$x=2\cdot(\boldsymbol{c1}-20) \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$$

b) $\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot u=t-2 \\ -14\cdot u+7\cdot t-28=0 \end{cases},\{t,u\}\right) \qquad \text{false}$

c) $\text{solve}\left(\begin{cases} z-x+2\cdot y=4 \\ 3\cdot y+2\cdot z-7=4\cdot x \\ 4\cdot y+3\cdot z-7\cdot x=10 \end{cases},\{x,y,z\}\right)$

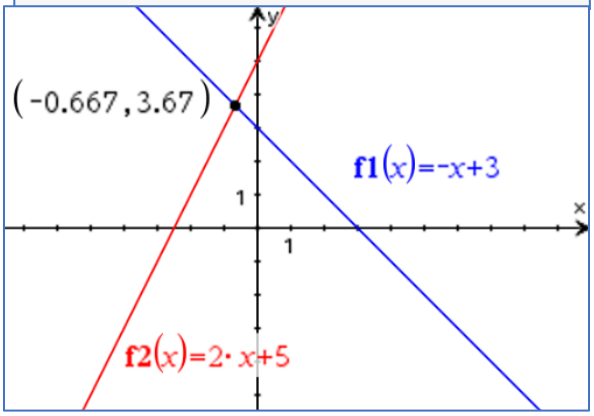
$$x=\frac{\boldsymbol{c2}-2}{5} \text{ and } y=\frac{-(2\cdot \boldsymbol{c2}-9)}{5} \text{ and } z=\boldsymbol{c2}$$

Aufgabe 5:

Rechnerische Lösung:

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=3 \\ -2\cdot x+y=5 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad x=\frac{-2}{3} \text{ and } y=\frac{11}{3}$

Grafische Lösung:

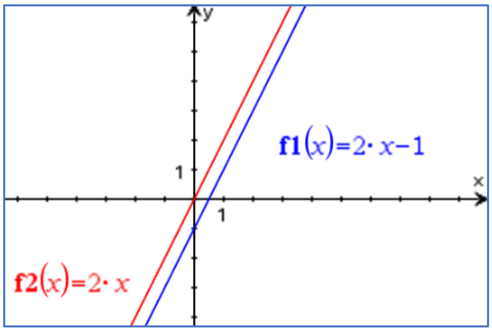


Aufgabe 6:

a) Keine Lösung hat z. B. das Gleichungssystem $\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{matrix}$.

$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x-y=1 \\ 2\cdot x-y=0 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad \text{false}$

Die zugehörigen Geraden sind parallel zueinander.

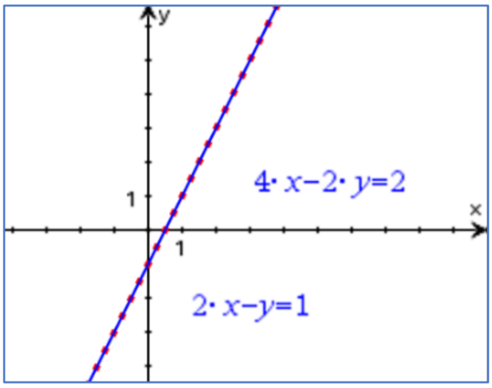


b) Unendliche viele Lösungen hat z. B. das Gleichungssystem $\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{matrix}$.

$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x-y=1 \\ 4\cdot x-2\cdot y=2 \end{cases},\{x,y\}\right)$

$x=\frac{\mathbf{c3}+1}{2} \text{ and } y=\mathbf{c3}$

Die zugehörigen Geraden sind identisch.



Aufgabe 7:

$\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - 0{,}999y = 1 \end{matrix}$.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x - y = 3 \\ 2\cdot x - y = 1 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad \text{false}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x - y = 3 \\ 2\cdot x - 0.999\cdot y = 1 \end{cases}, \{x,y\}\right)$$

$$x=-998.5 \text{ and } y=-2000.$$

Das erste Gleichungssystem repräsentiert zwei lineare Funktionen, deren Graphen zueinander parallel sind und demzufolge keinen Schnittpunkt haben.

Das zweite Gleichungssystem repräsentiert zwei lineare Funktionen, deren Graphen nicht parallel zueinander sind. Die lineare Funktion y = 2x – 3 hat den Anstieg m = 2. Die zweite Gleichung ergibt, nach y umgestellt, die lineare Funktion $y = \frac{2000}{999}x - \frac{1000}{999} \approx 2{,}002x - 1{,}001$. Der Anstieg dieser Funktion unterscheidet sich also minimal von dem der ersten Funktion. Deshalb sind die zugehörigen Geraden nicht parallel zueinander. Weil aber der Anstieg nur wenig differiert, schneiden sich die Geraden „weit draußen“ im Punkt S(-998,5; -2000).

Aufgabe 8:

a) Einfluss des Parameters a auf die Lösungsmenge von $\begin{matrix} x + 2ay = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{matrix}$:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+2\cdot a\cdot y=3 \\ 3\cdot x+6\cdot y=9 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad x=3 \text{ and } y=0$$

Der Parameter a beeinflusst die Lösungsmenge nicht.

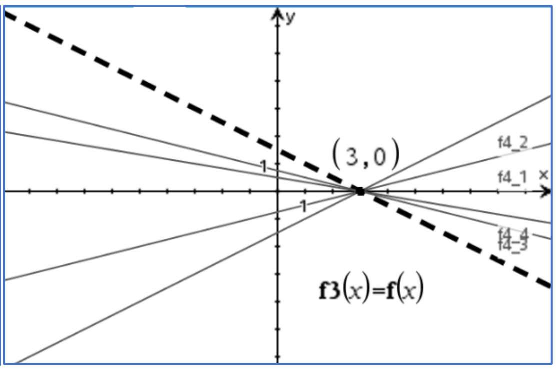
b) Grafische Interpretation: Beide Gleichungen werden nach y umgestellt, um die Graphen von zugehörigen linearen Funktionen darzustellen.

$$\text{solve}(3\cdot x+6\cdot y=9,y) \qquad y=\frac{-(x-3)}{2}$$

$$f(x):=\frac{-(x-3)}{2} \qquad \textit{Fertig}$$

$$\text{solve}(x+2\cdot a\cdot y=3,y) \qquad y=\frac{-(x-3)}{2\cdot a}$$

$$g(a,x):=\frac{-(x-3)}{2\cdot a} \qquad \textit{Fertig}$$

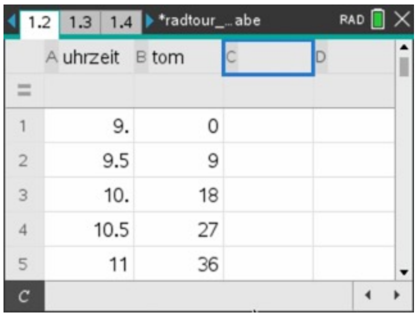


Die Graphen der vom Parameter a abhängigen Funktionen bilden ein Geradenbüschel mit dem gemeinsamen Punkt P(3; 0). Wenn x = 3 ist, dann wird der zugehörige Funktionsterm $\frac{3-x}{2a}$ für alle Werte von a (außer von a = 0) den Wert null annehmen, und zwar unabhängig von a.
Durch den Punkt P verläuft auch die zur ersten Gleichung gehörende Gerade.

Arbeitsblatt 9: Lineare Gleichungssysteme (Radtour)

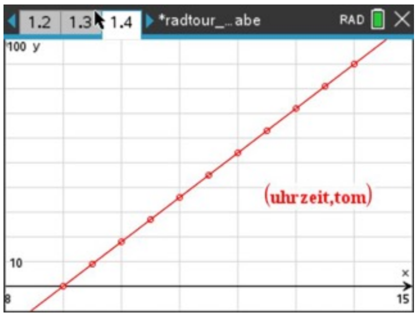
Tom startet um 9.00 Uhr zu einer Radtour von ADorf ins entfernte BDorf. Er fährt mit konstanter Geschwindigkeit und schafft in einer halben Stunde 9 km.
Eine halbe Stunde nachdem Tom losgefahren ist, fährt Anne mit ihrem Rennrad los, um Tom einzuholen und ihm seine Geldbörse zu übergeben. Sie beeilt sich und schafft im Schnitt 24 km pro Stunde.
Wo könnten sich die beiden treffen und nach welcher Zeit?
Nutze bei der Bearbeitung die angegeben Hilfen.

Erstelle für den Sachverhalt eine zugehörige Wertetabelle und ergänze die Spalte für Anne.
Lies den Zeitpunkt des Treffens ab.

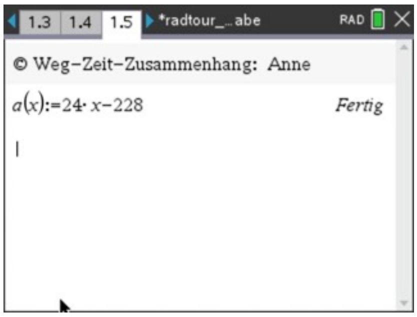


Stelle den Zusammenhang
Uhrzeit $\longmapsto$ zurückgelegter Weg
für Tom und Anne graphisch dar.

Ermittle aus der graphischen Darstellung den Zeitpunkt des Einholens und den bis dahin zurückgelegten Weg.



Berechne den Zeitpunkt des Einholens und den bis dahin zurückgelegten Weg.

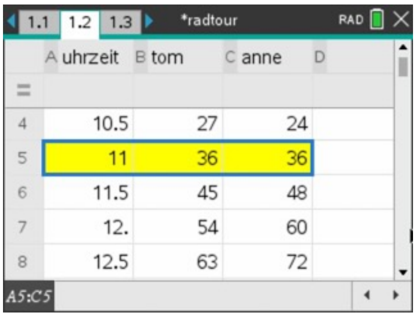


Einen Tag später: Tom und Anne fahren wie gehabt los.
Aber diesmal plant Tom nach 27 km eine Pause von einer halben Stunde in einem Gartenrestaurant am See ein. Nach der Pause fährt Tom mit 18 km pro Stunde weiter. Anne kann diesmal ihr Tempo nur eine halbe Stunde durchhalten und reduziert dann ihre Geschwindigkeit auf 12 km pro Stunde.

- Erzeuge eine neue Datei mit den geänderten Daten.
- Erstelle eine neue Funktionsvorschrift für Tom und Anne.
- Wo treffen sich die beiden nun?

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 9[12]:

Wertetabelle

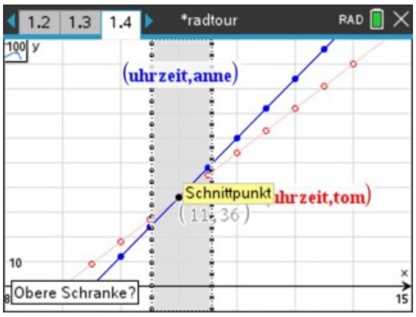


	A uhrzeit	B tom	C anne	D
4	10.5	27	24	
5	11	36	36	
6	11.5	45	48	
7	12.	54	60	
8	12.5	63	72	

Zusammenhang

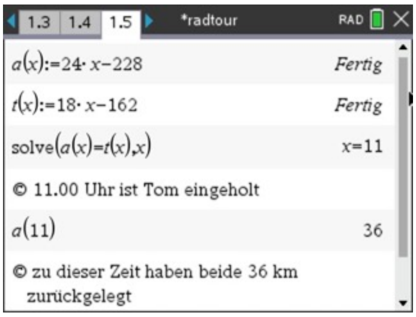
Uhrzeit ⟼ zurückgelegter Weg

für Tom und Anne.



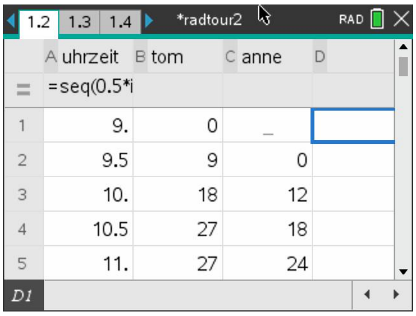
Der Schnittpunkt wird graphisch bestimmt.
Zeitpunkt: 11 Uhr
Zurückgelegter Weg: 36 Km

Berechnung des Zeitpunktes des Einholens und des bis dahin zurückgelegten Weges.

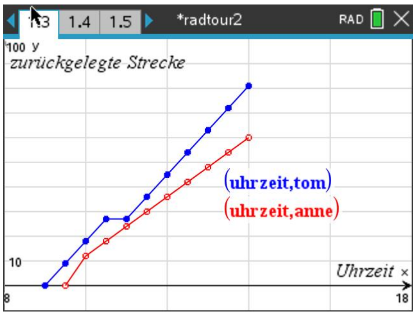


Einen Tag später:

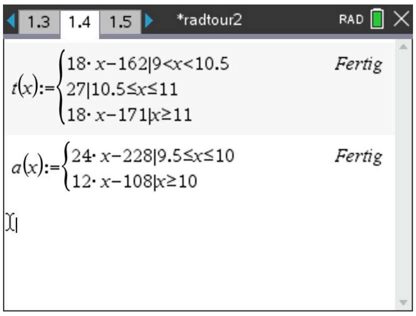
Darstellung mittels Streudiagramm

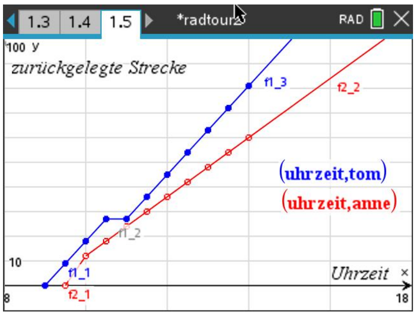


	A uhrzeit	B tom	C anne	D
=	=seq(0.5*i			
1	9.	0	_	
2	9.5	9	0	
3	10.	18	12	
4	10.5	27	18	
5	11.	27	24	



Verwendung abschnittsweise definierter linearer und konstanter Funktionen
Tom und Anne treffen sich erst in BDorf.





[12] Lösungen in Datei: radtour1.tns

Arbeitsblatt 10: Eine Piratengeschichte[13]

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern.
Die Voraussetzungen sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km.
Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot legt in der ersten Stunde eine Strecke von 20 km in Richtung Nordost zurück.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff in Richtung Südost.
Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt und legt in einer Stunde 15 km zurück.
Können die Piraten entkommen?

Aufgabe

Veranschauliche unter Nutzung der Tipps und graphischen Darstellungen den Sachverhalt in der Applikation ***Graphs***.

Tipps:
Ermittle jeweils für die x und y - Koordinate der Boote eine Gleichung in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit und stelle die Punkte in einem Streudiagramm dar.

Verknüpfe die Variable für die vergangene Zeit mit einem Schieberegler.

Die Sichtweite des Patrouillenbootes kann durch einen Kreis (hier gelb gefärbt) veranschaulicht werden.
Dazu erstellt man über menu – *Aktionen – Text*

den Text $r = 0.5$.

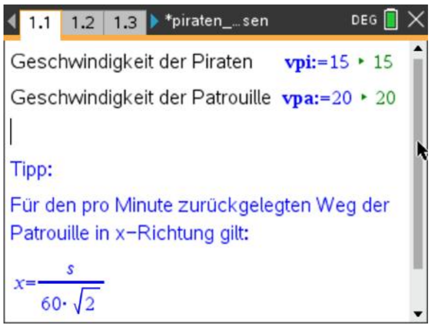
Über menu – *Geometry – Konstruktion – Zirkel*
zeichnet man einen Kreis um den Punkt (Patrouillenboot) und klickt auf den Text $r = 0.5$.

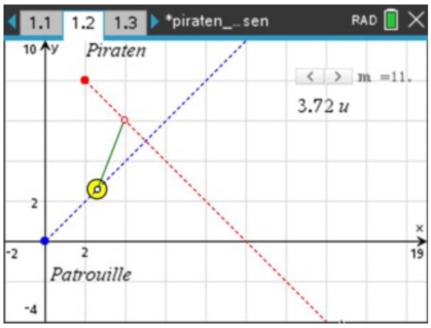
Veranschauliche den jeweils aktuellen Abstand in einer Zuordnung: ***vergangene Zeit*** $\longmapsto$ ***aktueller Abstand***

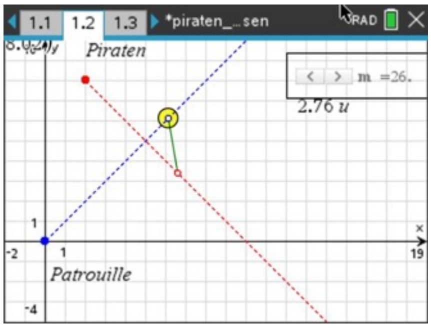
Experimentiere mit verschiedenen Geschwindigkeiten für das Patrouillenboot.

Welche Sichtweite müsste an diesem Tag möglich sein, damit die Piraten entdeckt werden?

Umsetzung







[13] aus: Computer, Internet & Co. Im Mathematikunterricht. Cornelsen: Berlin, S. 85 ff

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 10[14]

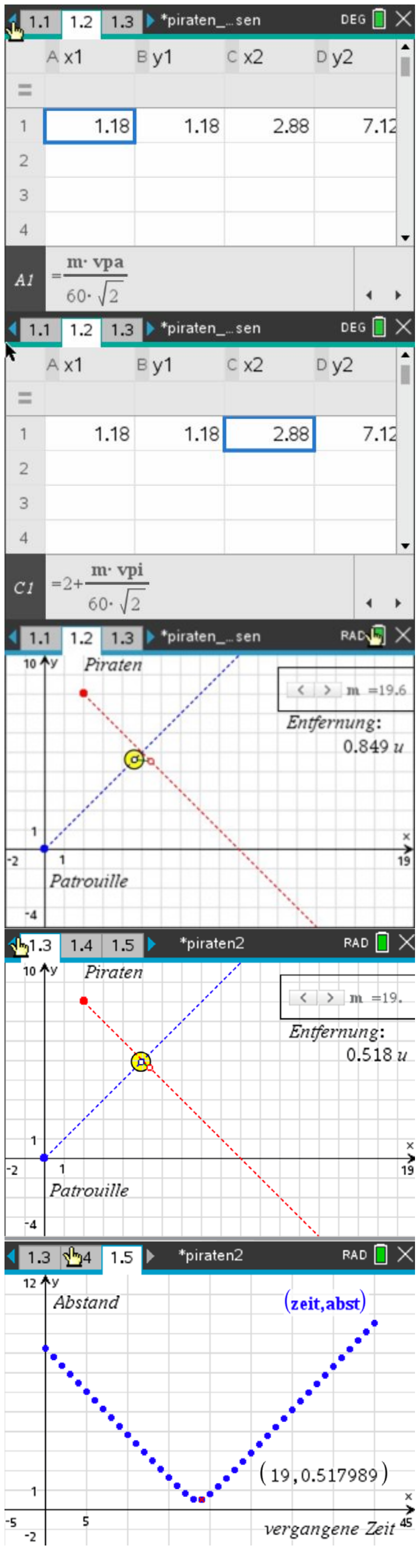
Punktkoordinaten in der Tabellenkalkulation in Abhängigkeit vom Schieberegler m definieren

Patrouille: $x_1 = \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Patrouille}$ $y_1 = \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Patrouille}$

Piraten: $x_2 = 2 + \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Piraten}$ $y_2 = 8 - \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Piraten}$

m … Variable des Schiebereglers

v in $\frac{km}{h}$



Darstellungen als Streudiagramm: $s1 \begin{cases} x \leftarrow x1 \\ y \leftarrow y1 \end{cases}$ $s2 \begin{cases} x \leftarrow x2 \\ y \leftarrow y2 \end{cases}$

Abstand-Zeit im Streudiagramm $s3 \begin{cases} x \leftarrow zeit \\ y \leftarrow abst \end{cases}$

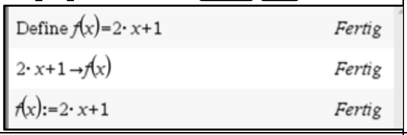
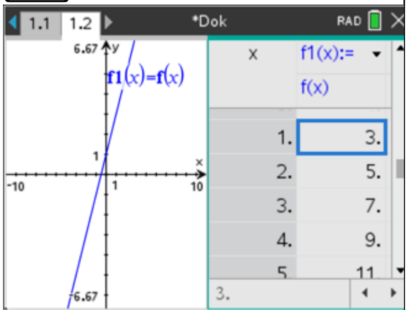
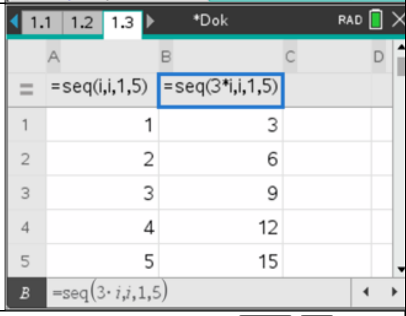
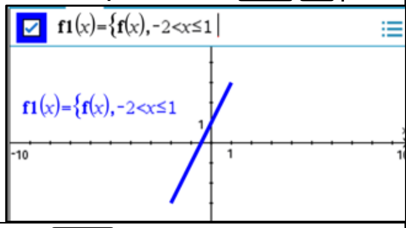
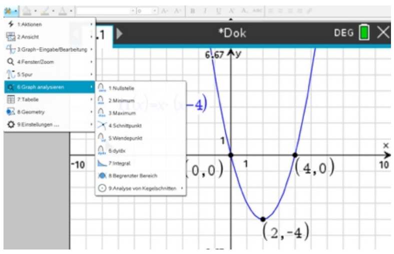
(Vgl. Definition der Variablen Zeit und abst in der Datei piraten.tns)

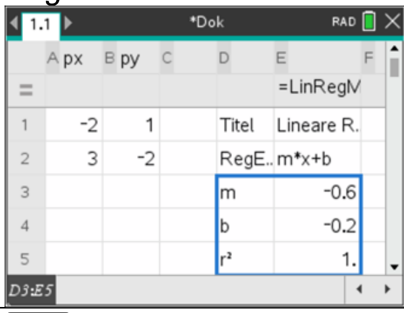
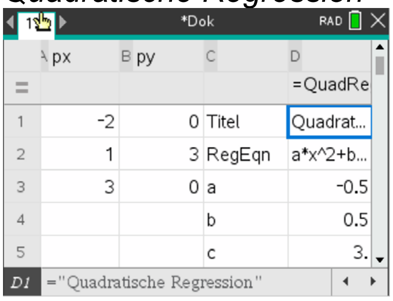
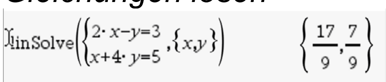
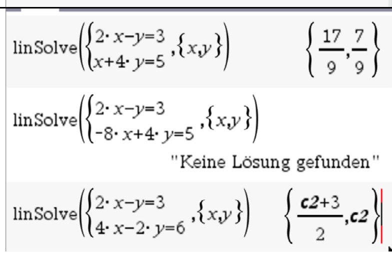
Experimente mit verschiedenen Geschwindigkeiten für das Patrouillenboot ergeben, dass z. B. bei einer Geschwindigkeit des Patrouillenbootes von 22 $\frac{km}{h}$ das Piratenboot entdeckt wird (es existieren noch andere mögliche Geschwindigkeiten).

Der Funktionswert des tiefsten Punktes liefert dann ca. 518 m als kleinsten Abstand.
Also wird das Piratenboot bei einer Sichtweite von etwa 500 m entdeckt.
(Eine Berechnung wird hier nicht gefordert.)

[14] Lösungen in Datei: piraten.tns

Checkliste Funktionen und lineare Gleichungssysteme

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
eine Funktion oder Variable definieren.	1. [menu] – *Aktionen– Define* 2. „sto→", Tasten [ctrl] [var] 3. „:=", Tasten [ctrl] [=] 		
eine Wertetabelle zu einer Funktion anzeigen.	[menu] – Tabelle–*Tabelle…* 		
die Spalte einer Tabelle mit fortlaufenden Zahlen füllen.			
eine Funktion stückweise zeichnen.	with- Operator - [ctrl] [=] | 		
Eigenschaften von Funktionsgraphen aus dem Graphen ablesen.	1. [menu] – *Graph analysieren* 		

einen Schieberegler erstellen.	1. Treten in einer Funktion f unabhängig von der veränderlichen Variable x weitere Parameter auf, so werden für diese automatisch Schieberegler erstellt. 2. menu – *Aktion-Schieberegler einfügen*		
eine lineare Funktion aus zwei Punkten erstellen lassen.	menu – *Statistik-Statistische Berechnungen- Lineare Regression* 		
eine quadratische Funktion aus drei Punkten erstellen lassen.	menu – *Statistik-Statistische Berechnungen-Quadratische Regression* 		
ein lineares Gleichungssystem lösen.	menu – *Algebra-Gleichungssysteme lösen-2 System linearer Gleichungen lösen* 		
Die Lösung eines LGS interpretieren **- eine Lösung** **- keine Lösung** **- unendlich viele Lösungen**			

4. Inhaltsfeld Geometrie (Geo)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Umfang und Flächeninhalt: Dreieck, Viereck, zusammengesetzte Figuren, Höhe und Grundseite
- geometrische Sätze: Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkelsatz, Innen-, Außen- und Basiswinkelsatz, Kongruenzsätze, Satz des Thales
- Konstruktion: Dreieck, Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Inkreis, Umkreis, Thaleskreis und Schwerpunkt

Der TI Nspire CAS verfügt über ein DGS (dynamisches Geometrie System), mit dem sich recht einfach verschiedene geometrische Figuren erforschen lassen.

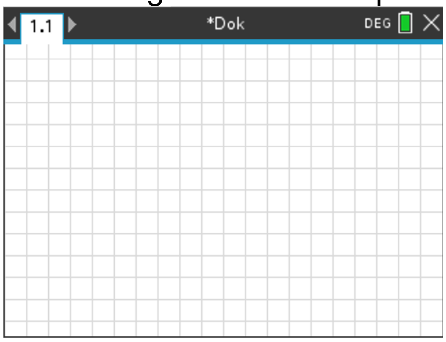
Technische Hinweise für Lehrkräfte

Oft lassen sich geometrische Konstruktionen in Graphs am günstigsten darstellen. Dazu wird – wie in schon bei den Funktionen – ein Koordinatengitter erzeugt. Werden nun Punkte auf einem Gitterkreuz hinzugefügt, dann rasten diese dort ein, so dass sich der Punkt nur in Schritten bewegen lässt.

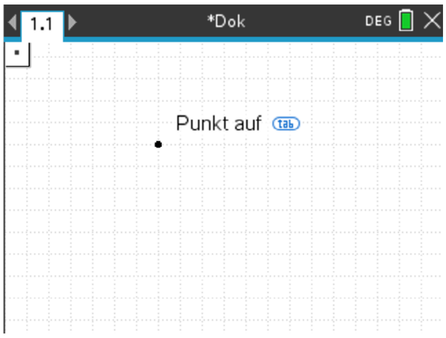
Hinweise

Zunächst wird eine **Graphsseite** zu einem Dokument hinzugefügt. Unter menu ->Ansicht -> Gitter lässt sich ein liniertes Gitter einblenden, mit menu ->Ansicht-> Achsen ausblenden entsteht ein leeres, kariertes Blatt.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

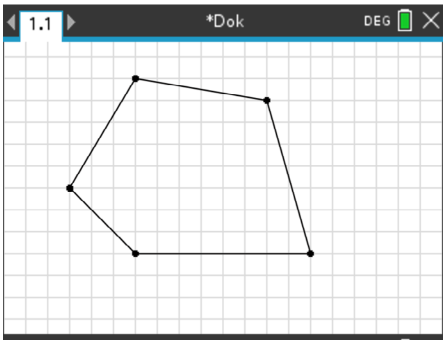


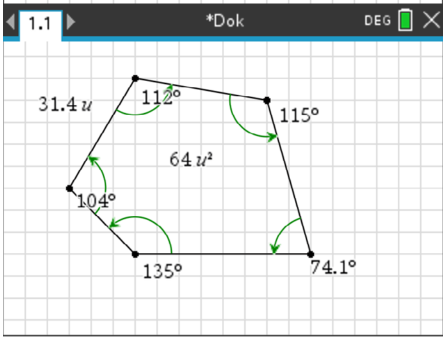
Nun kann ein Punkt durch das Drücken der Taste „p“ erzeugt werden. Hier besteht die Möglichkeit, einen Punkt frei zu positionieren oder die Koordinaten anzugeben.
Zunächst soll ein Punkt auf dem Koordinatensystem platziert werden, dazu muss die obere Option „Punkt“ ausgewählt werden.
Der Punkt wird nun auf ein Gitterkreuz bewegt, die Gitterlinien werden gepunktet. Wird der Punkt nun platziert, so ist der Punkt am Raster ausgerichtet.



Mit der Option menu -> 8.Geometry -> 2. Formen -> 4. Polygon kann ein Polygon erzeugt werden.
Hier wurde ein Fünfeck erzeugt, der letzte Punkt wird auf dem Ersten gesetzt.

Jedes Polygon kann verändert werden, in dem man einen der Punkte verschiebt. „Fasst“ man eine der Seiten an, lässt sich das Polygon als Ganzes verschieben.
Unter menu -> 8. Geometry -> 3. Messung kann nun die Fläche oder der Umfang bestimmt werden.
Für die Messung von Winkeln empfiehlt sich die Option „gerichteter Winkel“.





Des Weiteren gibt es spezielle Befehle zur Erzeugung von Dreiecken und regelmäßigen Vielecken, sowie von Geraden, Strahlen, Parallelen und Senkrechten uvm.

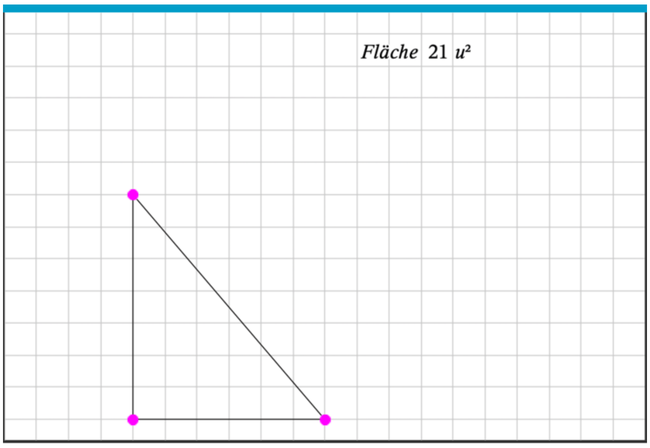
Als nützlich hat sich erwiesen, dass Punkte nicht nur auf dem Koordinatengitter platziert werden können, sondern auch auf anderen Objekten. Dazu zählen Kreise, Funktionen und Relationen, aber auch parametrisierte Funktionen, Funktionen in Kreiskoordinaten, stückweise definierte Funktionen und Streudiagramme. Das kann in der Konstruktion von Arbeitsblättern enorm nützlich sein.
Durch einen Rechtsklick (am Computer) oder durch *ctrl+menu* (am Handheld) kann ein Kontextmenu zu Objekten aufgerufen werden. Mit -> 4. Auswahl dieses Menüs kann ein Objekt ausgeblendet werden, mit ->A. Fixieren lässt sich das Objekt feststellen, so dass es nicht verändert werden kann.

Exemplarisch soll hier ein Arbeitsblatt zu Erforschung des Zusammenhangs zwischen der Höhe bzw. der Grundseite eines Dreiecks und seiner Fläche vorgestellt werden. Weiterhin wird ein Arbeitsblatt zur Entdeckung des Satzes des Thales angegeben.

Vorbereitung:
Öffne die Datei „*dreiecke.tns*“. Du siehst ein Dreieck mit pinken Eckpunkten.

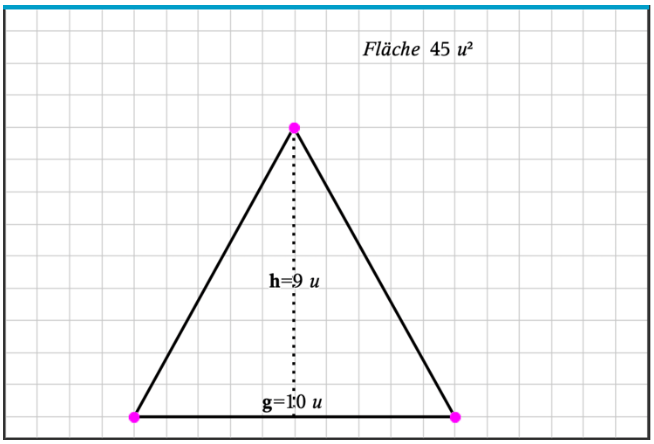
Aufgaben:

1. Fasse die pinken Punkte an und bewege sie. Die Bewegungsfreiheit einiger Punkte ist eingeschränkt. Ermittle, welche Punkte sich wie bewegen lassen. Notiere Deine Beobachtungen.
2. Bewege nun die Punkte, die die Grundseite des Dreiecks festlegen und beobachte die Fläche des Dreiecks. Was fällt Dir auf?
3. Bewege nun den Punkt, der die obere Spitze des Dreiecks definiert und beobachte ebenfalls die Fläche. Hier passiert etwas Unerwartetes! Versuche genau herauszufinden, wann sich die Fläche ändert und wann nicht!



Auf der nächsten Seite kannst Du die Höhe des Dreiecks und die Länge seiner Grundseite sehen. Lege eine Tabelle an. Verändere zunächst nur die Länge der Grundseite und schreibe die Flächen auf.

Grundseite g /cm	Höhe h /cm	Fläche /cm^2



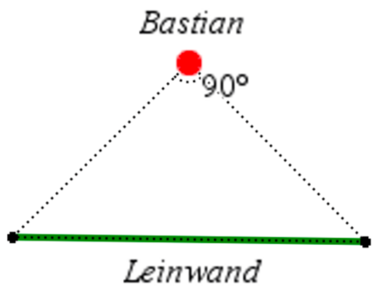
Was stellst Du fest?
Formuliere Deine Theorie als Formel!

Variiere nun die Höhe und halte die Länge der Grundseite fest.

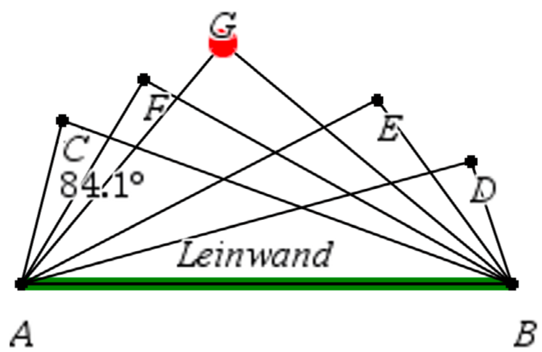
Grundseite g /cm	Höhe h /cm	Fläche /cm^2

Wie verändert sich die Fläche? Formuliere Deine Theorie als Formel!

Bastian sitzt im größten Kino der Stadt und stellt mit einer Smartphone-App fest, dass sein Sichtwinkel zur Leinwand fast genau 90° beträgt. Er fragt sich nun, ob dies auch für andere Besucher zutrifft.

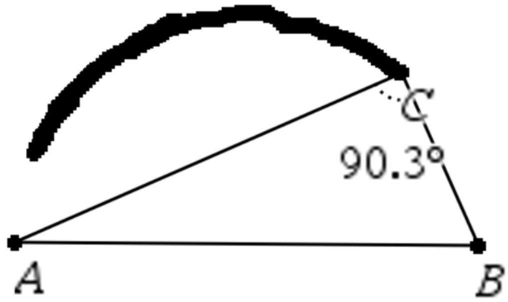


Aufgabe 1:

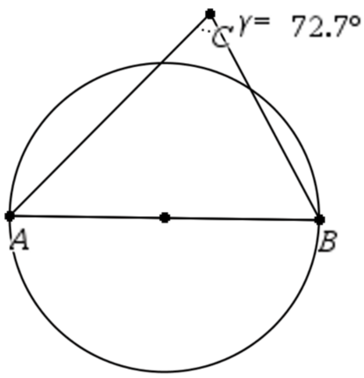
Erstelle das nebenstehende Bild in der Anwendung *Geometry*: Nutze dazu eine beliebige Strecke AB und konstruiere mit dem DGS mindestens 5 Dreiecke. Miss dann die Winkel bei C, D, E, F, G und stelle diese dann so ein, dass etwa 90° entstehen.	
Auf welcher Linie könnten diese Punkte dann liegen?	

Aufgabe 2

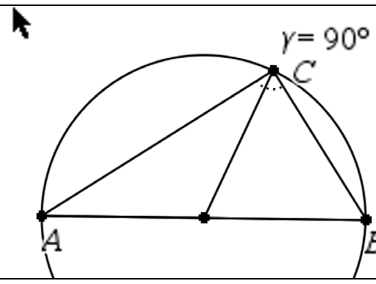
Zeichne in der Anwendung *Geometry* ein beliebiges Dreieck ABC und miss den Winkel ACB.
a) Ziehe an C so, dass der Winkel immer möglichst etwa 90° ist.
b) Lasse C dabei eine Spur zeichnen.



Aufgabe 3

Konstruiere in der Anwendung *Geometry* das nebenstehende Bild. Ziehe an C. a) Was stellst du für γ fest, wenn C innerhalb des Kreises liegt? b) Was stellst du für γ fest, wenn C außerhalb des Kreises liegt? c) Binde C an den Kreis. Was stellst du nun für γ fest?	

Aufgabe 4 Auf dem Weg zum Beweis des Satzes des Thales

Man kann beweisen, dass der sogenannte Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises immer 90° beträgt. In der Skizze ist eine Hilfslinie eingezeichnet. Miss alle Winkel in den beiden Teildreiecken und versuche damit den Beweis zu finden.	

Lösungen zu Arbeitsblatt 2

Vergleiche Datei *thales.tns*

T³ DEUTSCHLAND

T³ Teachers Teaching with Technology

Netzwerk
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

Fortbildungen
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

Materialien
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr

Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:

www.t3deutschland.de I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

@T3Europe

T3 Europe

TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE