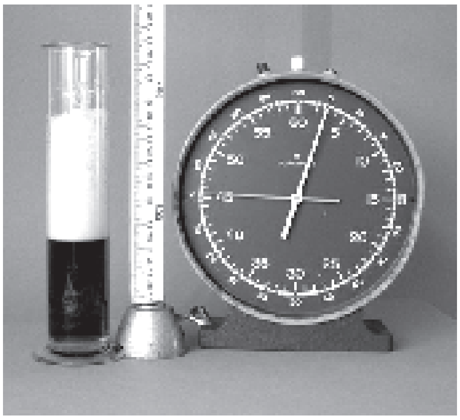
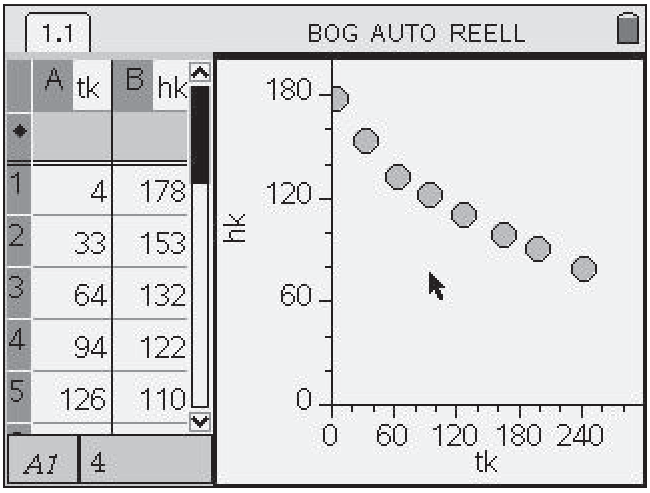
Zerfall von Bierschaum

Ulla Schmidt, Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Lünen



Wie schnell zerfällt Bierschaum?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufen I und II
(Exponentialfunktionen)
Dauer: 1-2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- haben Grundkenntnisse in der Bedienung der Tabellenkalkulation
- können einen Graphen zeichnen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle
- begründen die Wahl ihres Modells

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- stellen Exponentialfunktionen als Wertetabellen, Graphen und Terme dar
- können zu Messwerten eine Ausgleichsfunktion finden

Rolle der Technologie (TI-Nspire™, TI-Nspire™ CAS)
- Visualisieren von Messwerten und Graphen
- Berechnen einer Regressionsfunktion

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Numerisch: Auflisten der gemessenen Werte in einer Tabelle
- Algebraisch: Variieren des Funktionsterms
- Graphisch: Anpassen eines Graphen an die Punkte eines Streudiagramms

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Arbeit in Kleingruppen (3 - 4 Schülerinnen und Schüler)
- Führen eines Lerntagebuches

Bierschaumzerfall

„Ein gutes Pils braucht 7 Minuten!“ Vielleicht hast du das schon einmal gehört. Aber wie lange dauert es, bis der Schaum wieder zerfallen ist? Wie läuft der Zerfall genau ab?

- gleichmäßig
- anfangs schneller und später langsamer
- der Schaum ist anfangs ziemlich stabil und zerfällt dann sehr schnell

Plane ein Experiment, mit dem du die Schaumhöhe in Abhängigkeit von der Zeit ermitteln kannst.

Miss die Schaumhöhe etwa alle 15 Sekunden und halte die Ergebnisse in einer Tabelle fest.

Tipps

- *Da der Schaum von oben und von unten zerfällt, kann es für das Ablesen einfacher sein, in regelmäßigen Zeitabständen Fotos zu machen oder das Experiment zu filmen.*
- *Da mit fortschreitendem Zerfall auch Bierschaumreste am Glas hängen bleiben, wird es schwierig, die Oberkante genau festzulegen. Wir haben gute Erfahrungen damit gemacht, dass wir den jeweils tiefsten Punkt am oberen Rand der Schaumkrone gewählt haben.*

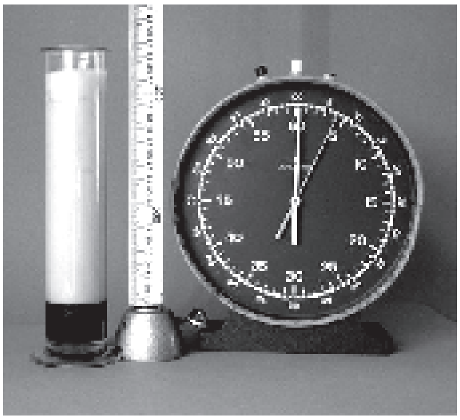
Modelliere die Messwerte durch eine geeignete Funktion. Begründe die Wahl des Funktionstyps.

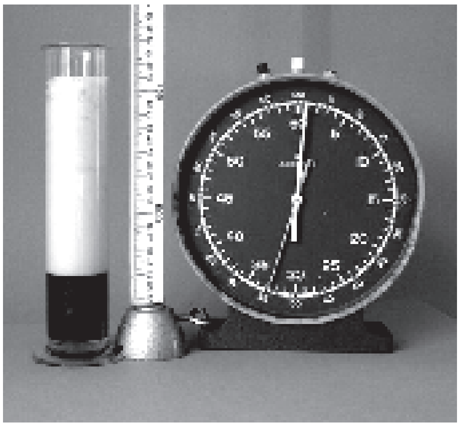
Wann ist der Bierschaum nur noch halb so hoch wie am Anfang?

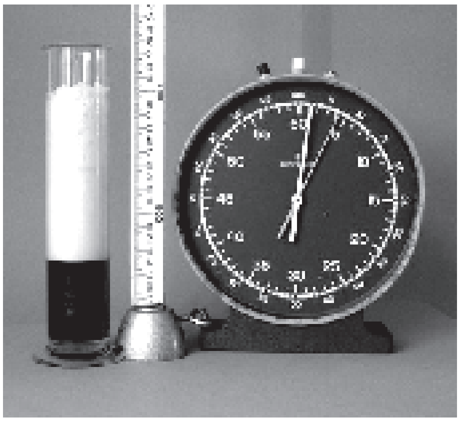
Wie viel Prozent des Schaums sind in deinem Modell nach 7 Minuten zerfallen?

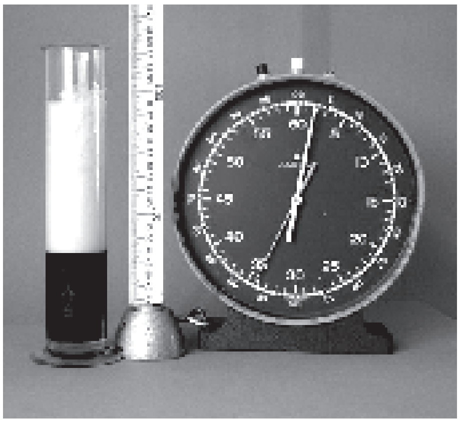
Formuliere auch eigene Fragen an das Experiment und an das Modell.

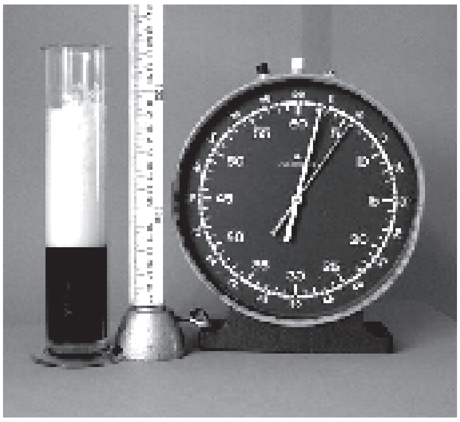
Für alle, die keine Möglichkeit haben, das Experiment selbst durchzuführen:

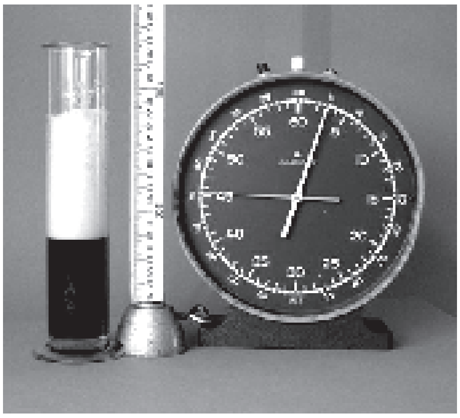

1

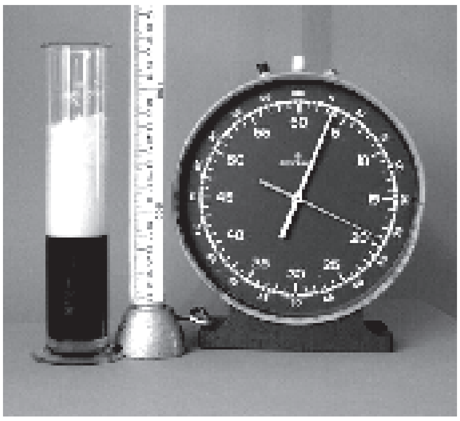

2

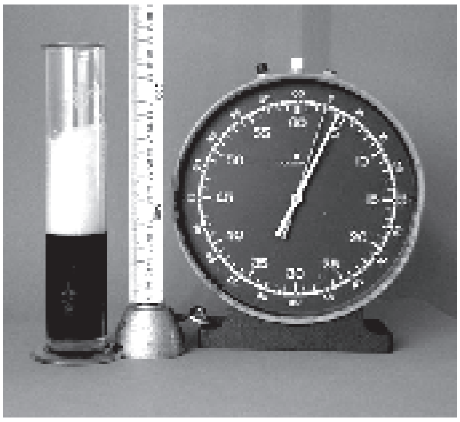

3


4


5


6


7


8

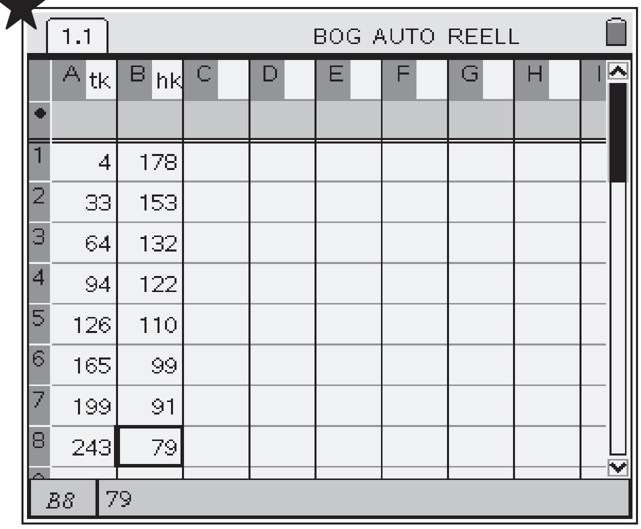
Tipps zur Versuchsdurchführung

Nach unseren Experimenten eignet sich Altbier besser als Pils. Auch Malzbier ist einen Versuch wert. Aus Gründen der besseren Ablesbarkeit bietet es sich an, kein gewöhnliches Glas zu verwenden, sondern einen Messzylinder. Dieser kann bereits eine Skala haben, man kann aber auch ein Lineal daneben stellen. Die Höhe der Bierschaumkrone sollte in Abständen von 10 bis 15 Sekunden abgelesen werden.

Auswertung

Hier wird die Versuchsserie zu den Fotos ausgewertet. Es gibt verschiedene Vorgehensmöglichkeiten, zwei unterschiedliche sollen hier gezeigt werden.

Die Zeit tk (in s) und Höhe hk der Bierschaumkrone (in mm) werden nacheinander von den Fotos abgelesen und in **Lists & Spreadsheet** eingegeben.

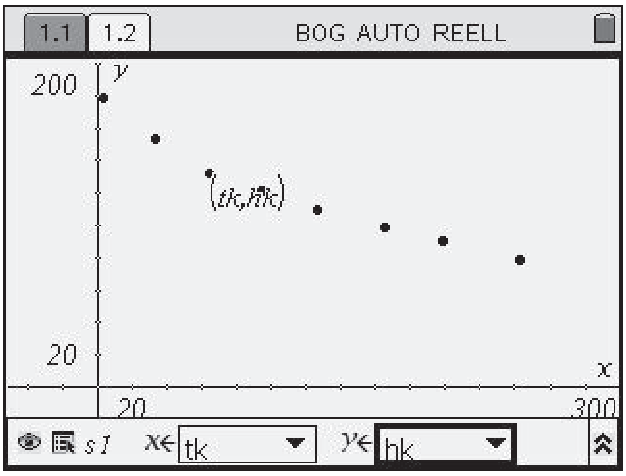


	A tk	B hk
1	4	178
2	33	153
3	64	132
4	94	122
5	126	110
6	165	99
7	199	91
8	243	79

Tipp: Eigene Namen für die Spalten sollten mehr als einen Buchstaben lang sein; wenn der Name nur aus einem Buchstaben besteht, muss das Programm immer nachfragen, ob es sich um die selbstdefinierte Variable handelt oder um die vorgegebene Spalte der Tabellenkalkulation.

Alternative 1:

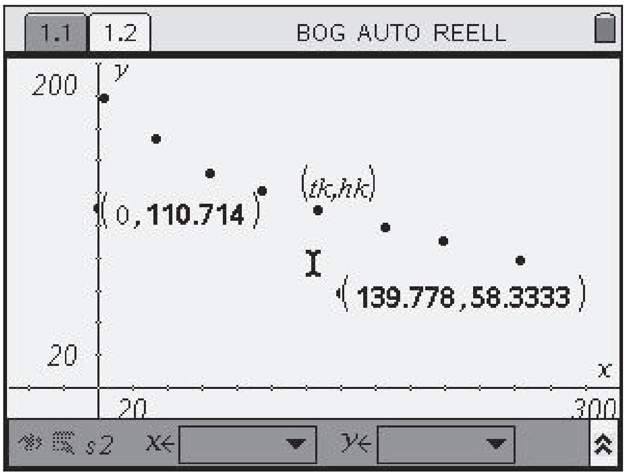
Die Messwerte werden auf einer neuen Seite in einem Streudiagramm dargestellt (Listen graphisch darstellen).



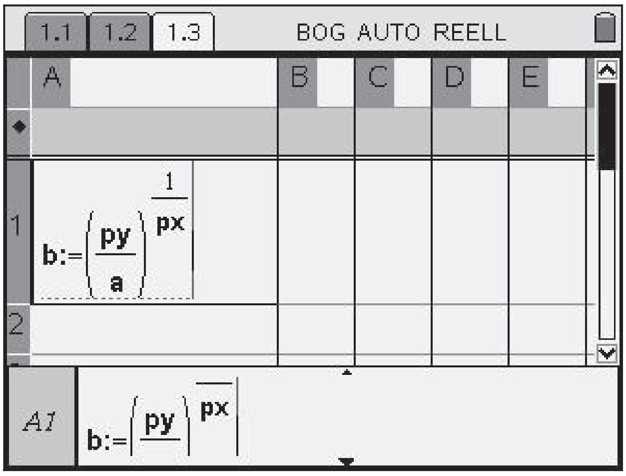
Schön wäre nun, eine Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ von Hand an die Punkte anzupassen.

Änderungen mit der Greifhand – wie bei Parabeln (Graph einer Funktion zeichnen) – stehen hier nicht zur Verfügung, lassen sich aber nachbauen.

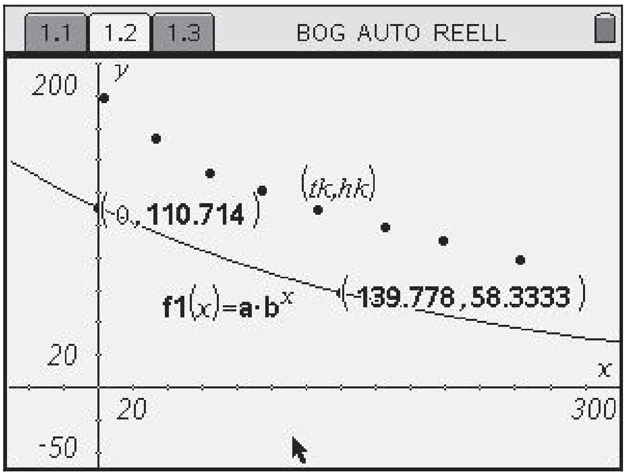
Dazu wird ein Punkt auf die y-Achse gelegt und ein zweiter Punkt auf die Zeichenfläche.
Die Koordinaten der beiden Punkte werden angezeigt, die y-Koordinate des ersten Punktes wird als Variable a abgespeichert, die beiden Koordinaten des anderen Punkts als px und py (Werte speichern).



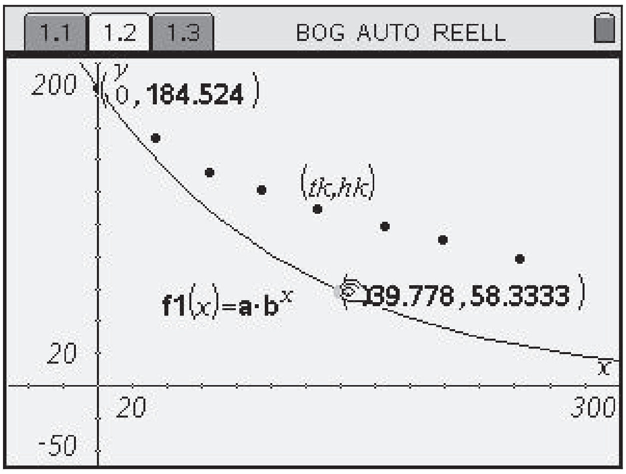
Daraus wird in der Applikation **Lists & Spreadsheet** in Zelle A1 die Basis b berechnet und das Ergebnis als Variable b gespeichert.



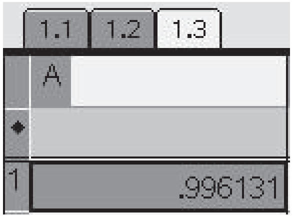
Der Term $a \cdot b^x$ wird bei f1(x) eingegeben und man erhält eine Exponentialfunktion durch die beiden Punkte.

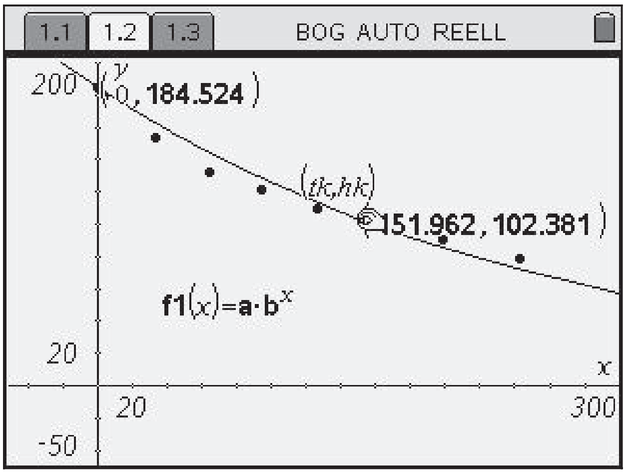


Durch Ziehen an den beiden Punkten kann man nun den Graphen nach Augenmaß an den Streu-Plot anpassen.



Die aktuelle Basis lässt sich der Tabelle entnehmen.



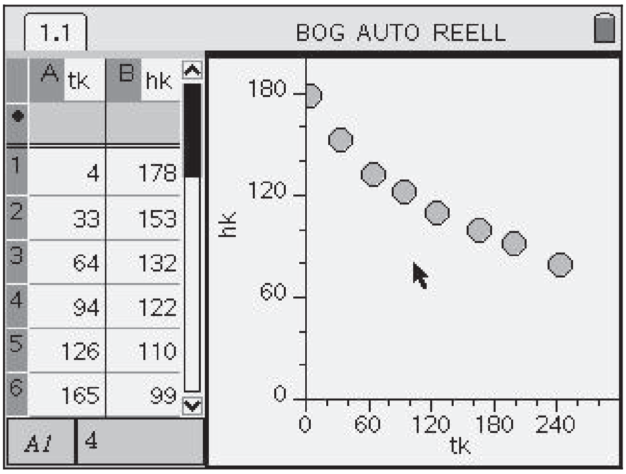


Anmerkung: Statt mit der Greifhand kann man auch direkt mit den Parametern a und b im Funktionsterm experimentieren. Dies wird in Alternative 2 dargestellt, ist aber auch hier möglich.

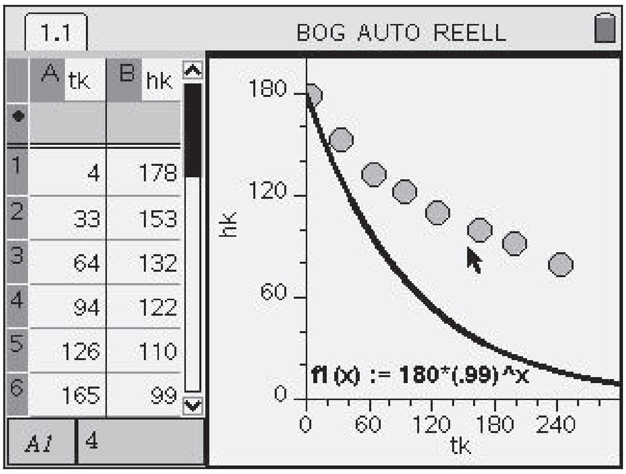
Alternative 2:
Zu den Messwerten wird ein SchnellGraph gezeichnet.

Unter Seitenlayout lässt sich das Graphikfenster benutzerdefiniert vergrößern (Seiten teilen).

Ggf. müssen die Einstellungen der Koordinatenachsen angepasst werden.



Im ersten Schritt wird eine Exponentialfunktion vom Typ $f(x)=a \cdot b^x$ von Hand an die Punkte angepasst. Dies geschieht über Funktion zeichnen:

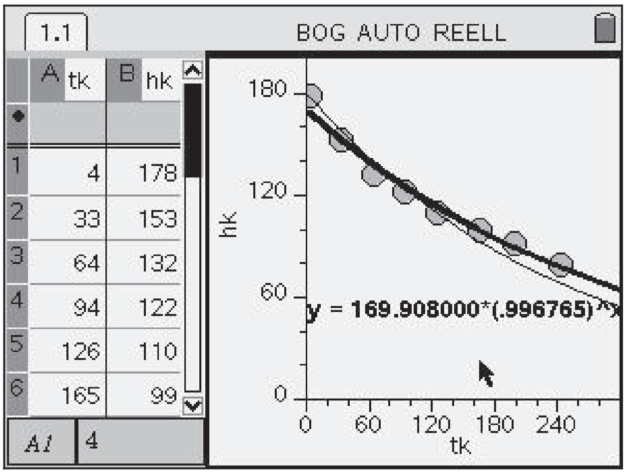


Geschätzt wird ein Startwert von a = 180, mit der Wahl von b wird experimentiert (hier wurde zunächst b = 0,99 gewählt).

Der Funktionsterm kann durch Doppelklick [,] editiert werden.

b = 0,996 liefert in diesem Fall einen gut passenden Graphen.

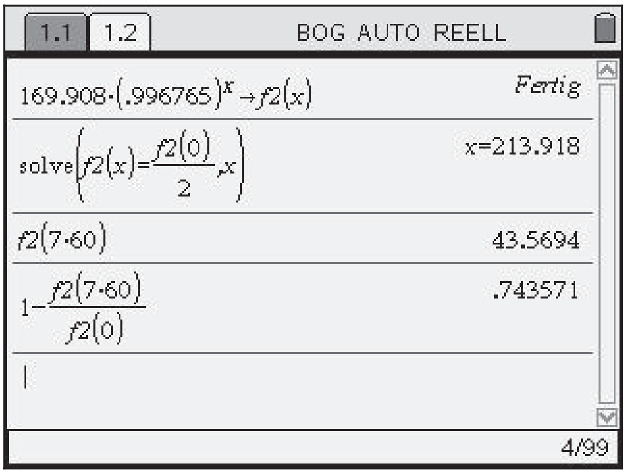
Danach wird eine Exponential-Regression mit dem Rechner durchgeführt (Regression durchführen).



Hier kann man gut vergleichen, wie sich der Regressionsgraph (fett) von dem von Hand angepassten Graphen (dünn) unterscheidet.

Wann ist der Bierschaum nur noch halb so hoch wie am Anfang?

Wie viel Prozent des Schaums sind in deinem Modell nach 7 Minuten zerfallen?



Diese Fragen lassen sich im **Calculator** beantworten.

Dazu wird nach einem Doppelclick auf die Regressionsgleichung der Term mit copy-paste in den **Calculator** übertragen und als f2(x) abgespeichert (Werte speichern).

Im Unterricht lässt sich dieses Experiment z. B. einsetzen als eine Station in einem Lernzirkel über Anwendungen von Exponentialfunktionen oder mit einem etwas anderen Akzent im Zusammenhang der Modellierung von Messdaten durch verschiedene Funktionenklassen.

In dem Experiment wird die Höhe einer Bierschaumkrone in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Weil es sich dabei um einen Zerfallsprozess handelt, kann hier genauer untersucht werden, ob in einer bestimmten Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz der noch vorhandenen Bierschaumkrone zerfällt. Dies wäre gleichbedeutend mit einer Modellierung durch eine Exponentialfunktion.

Als Vorgehensweisen bei den Messungen bieten sich an:

- Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Gruppen mit drei bis vier Mitgliedern zusammen. Einer liest die Höhe des oberen Schaumrandes ab und notiert diese, ein anderer verfährt ebenso mit dem unteren Schaumrand. Ein weiteres Gruppenmitglied achtet auf die Uhr und gibt das Kommando zum Ablesen.
- Der Versuchsaufbau wird alle 10 bis 15 Sekunden mit einer Digitalkamera fotografiert, die Bilder werden auf einen Computer übertragen, so dass die jeweilige Höhe der Bierschaumkrone in Ruhe abgelesen werden kann.
- Der Zerfallsprozess wird mit Hilfe einer Videokamera gefilmt. Der Film wird danach z. B. mit Hilfe eines Beamers projiziert; in regelmäßigen Abständen werden Standbilder erstellt und ausgewertet.

Das Experiment ist nach ca. 5 Minuten beendet.

Danach wird es in den Kleingruppen, die auch zusammen gemessen haben, ausgewertet.

An dieser Stelle haben die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, die Daten mit Hilfe einer geeigneten Funktionenklasse zu modellieren. Je nach Vorerfahrungen werden vielleicht quadratische Funktionen oder aber auch schon Exponentialfunktionen vorgeschlagen.
Um die Parameter der Exponentialfunktion besser zu verstehen, ist es günstig, zuerst eine Funktionsanpassung von Hand vorzunehmen und anschließend die Regressionsrechnung vom Programm durchführen zu lassen.

Die Übereinstimmung zwischen dem Punkteplot der Messpunkte und der Regressionskurve ist gut bis auf die ersten Messpunkte. Dieses Phänomen beobachtet man bei der exponentiellen Regression mit Computern öfter. Bei diesem Experiment ist aber auch eine Modellkritik lohnend, da die letzten Werte durch das Hängenbleiben von Bierschaumresten am Glas mit höheren Fehlern behaftet sind.

Literatur

Ministerium für Schule und Weiterbildung (2007): Berichte, Informationen, Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch SINUS-Transfer NRW. Medienzentrum Rheinland, Düsseldorf. Dort: Projekt 2, EiMu (**E**xperimente **i**m **M**athematik**u**nterricht).

