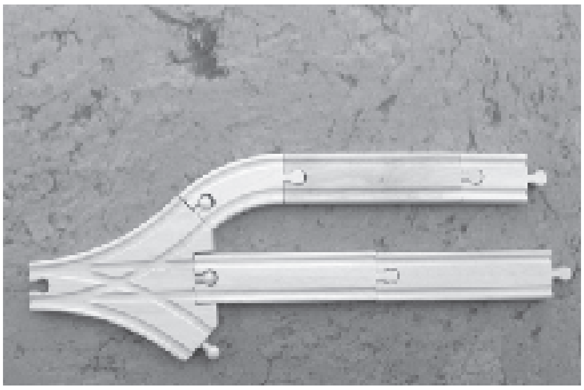
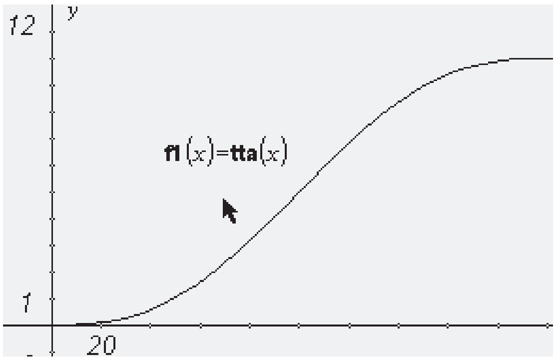
Gleisarbeiten

Sabine Wüllner, Landrat-Lucas-Gymnasium Leverkusen
Andreas Pallack, Soest



Wie krümmt sich eigentlich ein Gleis?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis)
Dauer: 1-2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können mit Polynomen und deren Graphen umgehen
- kennen die Grundlagen der Differenzialrechnung
- können elementare Modellierungen (auch mit Krümmungen) durchführen

Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren gegebene Situationen mit Hilfe von Funktionen
- reflektieren die Modellierung

Inhaltsbezogene Ziele/Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- entwickeln und lösen lineare Gleichungssysteme
- arbeiten mit Polynomen höheren Grades

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS):
- Visualisieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Algebraische Entwicklung einer Lösung und gleichzeitige graphische Kontrolle

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Die Aufgabe kann sowohl zum Einstieg in den Themenkomplex höhere Ableitungen als auch zur Vertiefung am Ende der Reihe Differenzialrechnung eingesetzt werden.

Es bietet sich dabei an, die Lernenden möglichst selbstständig arbeiten zu lassen. Spannend ist der Vergleich von Ideen der Schülerinnen und Schüler. Plakate oder Folien, aber auch der Einsatz eines Overheaddisplays; ist denkbar.

Sanft krümmt sich, was ein Gleis werden will…

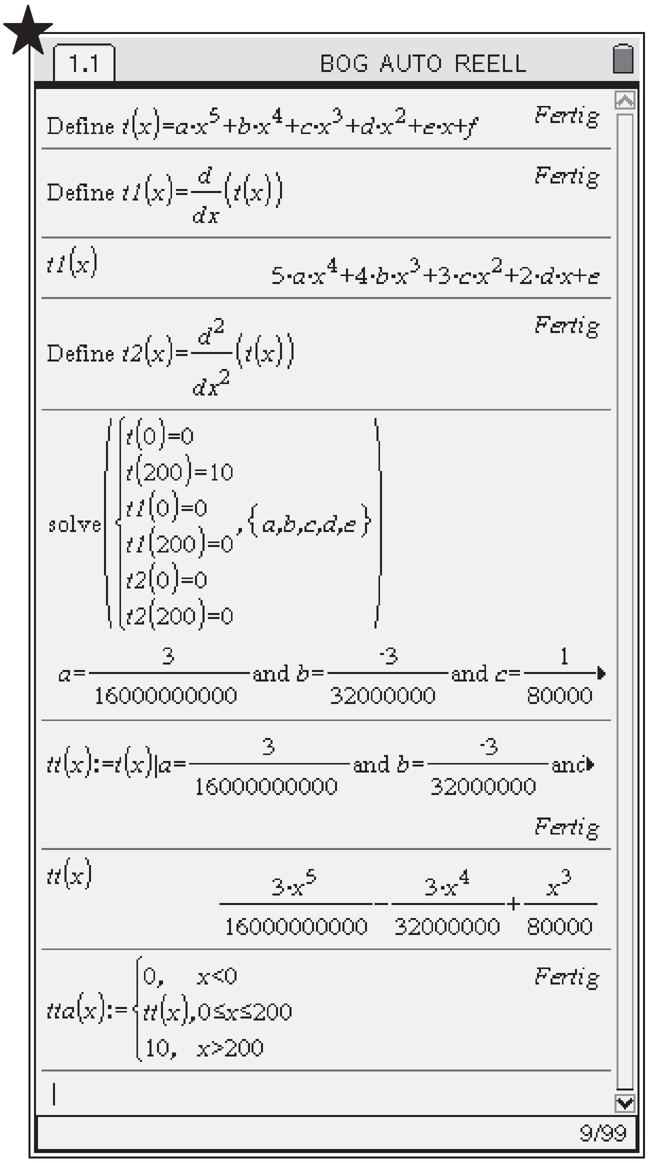
Die Anzahl der in Adorf haltenden Züge hat sich sehr stark vergrößert, deshalb wird ein neuer Bahnsteig benötigt. Dieser soll so angelegt werden, dass das zugehörige Gleis parallel zu den Gleisen der anderen Bahnsteige im Abstand von 10 m verläuft.

Für das Verbindungsgleis steht eine Länge von 200 m zur Verfügung.

Aufgabe:

Entwickle eine Funktion, deren Graph diesen Übergang beschreibt. Achte dabei darauf, dass Züge auch in der Realität ohne Probleme das Gleis passieren könnten.

Damit der Zug problemlos auf das neue Gleis kann,
- müssen die Anschlussstellen der beiden Gleise übereinstimmen,
- dürfen keine Steigungs- und
- keine Krümmungssprünge an den Verbindungspunkten entstehen.



Betrachten wir die Gleise als Graphen von Geraden g_1 und g_2, so kann eine Verbindung durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion beschrieben werden.

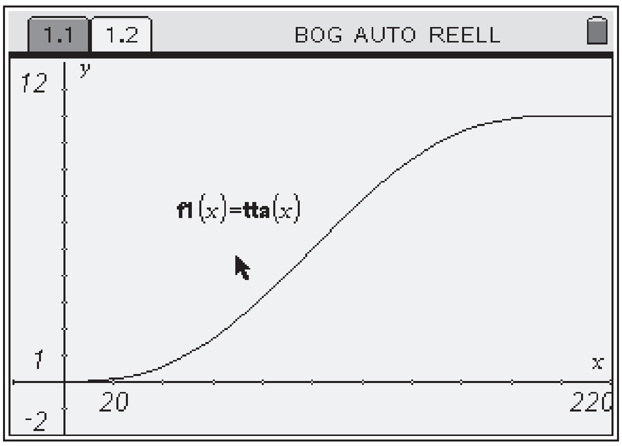
Günstig ist, das Koordinatensystem so zu legen, dass der Ursprung im ersten Verbindungspunkt liegt. So lauten die Gleichungen von g_1 und g_2: $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 200$.

Aus den obigen Überlegungen ergeben sich dann sechs Bedingungen. Funktionswert sowie Wert der ersten und zweiten Ableitung müssen mit an den Anschlussstellen übereinstimmen:

$t(0)$	$= g_1(0)$	$= 0$
$t(200)$	$= g_2'(200)$	$= 10$
$t'(0)$	$= g_1 0)$	$= 0$
$t'(200)$	$= g_2'(200)$	$= 0$
$t''(0)$	$= g_1''(0)$	$= 0$
$t''(200)$	$= g_2''(200)$	$= 0$

Damit wird eine Funktion 5. Grades gesucht:

$$t(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex^1 + f$$



Es werden nun die Funktionen t, t’ und t’’ (t, t1, t2) definiert (Funktion definieren). Auf die Definition der Geradengleichungen wurde verzichtet.

Danach werden die o. g. Bedingungen zur Lösung des Gleichungssystems eingegeben. Der Rechner gibt die Ergebnisse für die Koeffizienten aus. Die Ergebnisse der Rechnung werden unter tta(x) gespeichert.

Damit ergibt sich dann der Graph, der ein Vorschlag zur Modellierung des Gleises ist (Graph einer Funktion zeichnen).

Aufgaben dieser Art sind mittlerweile Standard im anwendungsbezogenen Mathematikunterricht. Die eigentliche Rechnung ist mit neuen Technologien schnell erledigt. Interessanter sind Diskussionen über die Art und die Tragfähigkeit der Modellierung.

Genauer betrachtet ist diese Modellierung alles andere als realistisch. Die Bezeichnung *realitätsbezogen* muss schon weit ausgelegt werden: Straßen und auch Schienen werden in der Praxis meist mit Klotoiden entwickelt. Dieses Verfahren hat gegenüber der Modellierung mit Polynomen den großen Vorteil, dass der Streckenverlauf sehr gut kontrolliert werden kann. Bei der Modellierung mit Polynomen – aber auch bei der Modellierung mit Splines – macht man immer wieder die Erfahrung, dass die Graphen dieser Funktionen oszillieren und deswegen nur schwer kontrollierbar sind. Im Unterricht wird es kaum möglich sein, Schienenverläufe zu entwickeln, die auch Ingenieurgutachten standhalten könnten; das ist aber auch nicht das Ziel. Vielmehr sollte es das Ziel sein, die Lernenden für solche Modellierungen zu sensibilisieren. Schließlich werden Straßen und Schienen nicht *irgendwie* geplant. Dahinter steckt System und eine große Portion Mathematik.

Ein weitere Herausforderung liegt in der hier vorgenommenen didaktischen Reduktion: Ein Gleis besteht ja nicht aus nur einer Schiene. Um einen Zug über das Gleis rollen zu lassen, benötigt man schon zwei davon. Diese müssen – damit der Zug nicht zwangsläufig entgleist – parallel sein. Dazu könnte man einfach den Graphen nach oben oder unten verschieben. Aber sind die Gleise dann wirklich parallel? Vorab: Die Antwort ist *nein*.

Mit solchen Variationen ist diese einfache Aufgabe auch im Leistungskurs einsetzbar: eine Erweiterung auf die Behandlung paralleler Graphen oder Splines ist ohne weiteres möglich.

