Von: Andreas Pallack
Sekundarstufe II
Fach: Mathematik
Benötigte Zeit: 90 Minuten

Ziel

Beim Arbeiten mit graphischen Systemen, wie zum Beispiel TI-Nspire™, vergessen Nutzerinnen und Nutzer häufig, dass Graphen alleine nur eine begrenzte Aussagekraft haben. In diesem Beispiel geht es darum das Auge vorsätzlich zu täuschen, um eine höhere Sensibilität beim Umgang mit Graphen zu erreichen. Primäres Werkzeug beim Erkunden der Graphen sollte das Funktionenmikroskop (Zoom-Rahmen) bzw. das gezielte Verändern der Achseinstellungen sein.

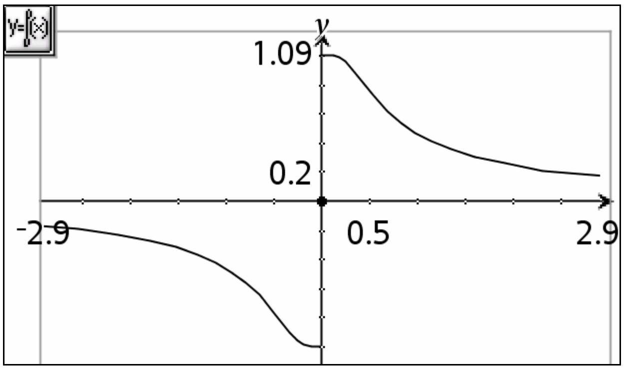
Voraussetzungen

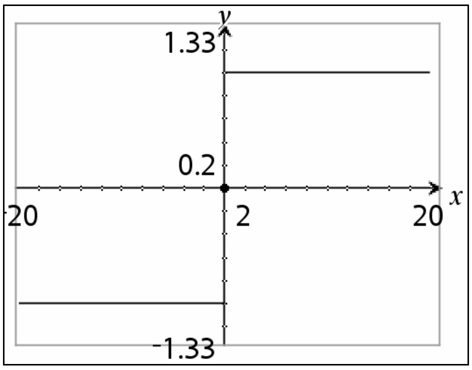
Schülerinnen und Schüler

- kennen die Begriffe „Stetig“ und „Differenzierbar“ und haben zumindest ein qualitatives Verständnis von ihnen (Hinweis: Im Beispiel werden bewusst die Bezeichnungen „Sprünge“ bzw. „Knicke“ verwendet, da diese stärker an die Anschauung appellieren).

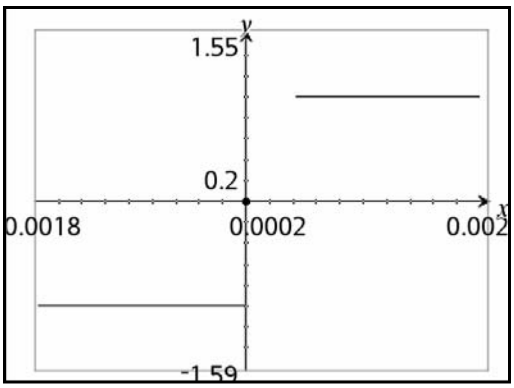
Aufgabe 1

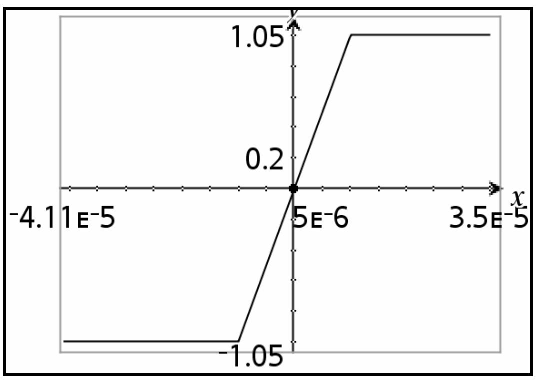
Manche Funktionen habe Lücken oder sogar Sprünge. Schau dir die nächsten beiden Seiten an. Hier findest du Graphen von Funktionen. Haben diese Sprünge oder nicht? Wie kann man das untersuchen, wie kann man das entscheiden?





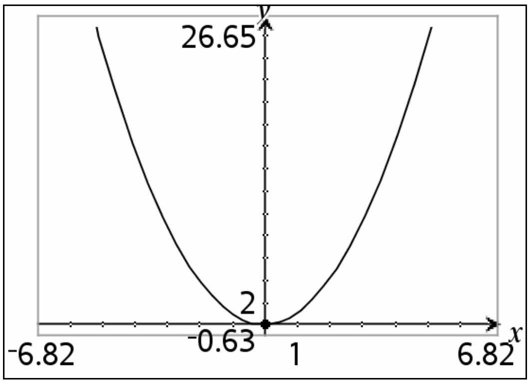
Präsentiert werden zwei Graphen, die augenscheinlich an der Stelle 0 einen Sprung haben. Untersucht man die Stelle mit dem Funktionenmikroskop genauer, so zeigt sich, dass im linken Fall tatsächlich ein Sprung vorliegt, im rechten Fall aber nicht.

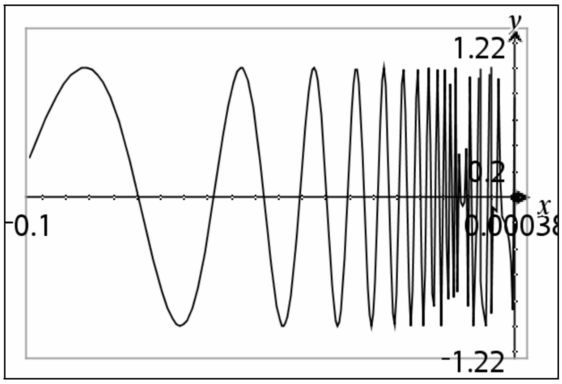




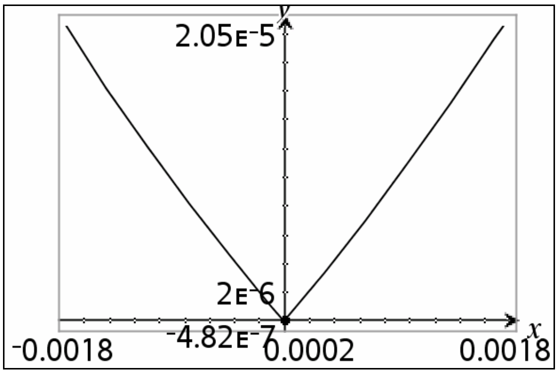
Aufgabe 2

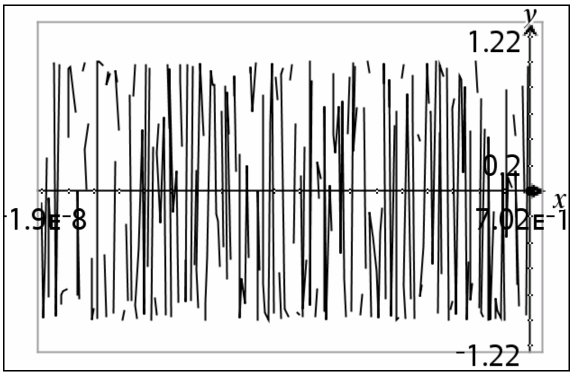
Bei den folgenden beiden Beispielen geht es um Knicke. Untersuche, ob die Graphen der Funktionen Knicke haben. Begründe das, auch mithilfe der Funktionsterme.





Im zweiten Fall soll das Intervall [-1,0[näher untersucht werden.





Im ersten Fall ergibt sich nach einigen Zoom-Schritten ein klarer Knick bei 0. Im zweiten Fall kann keine seriöse Entscheidung getroffen werden. Dem Nutzer bietet sich, umso kleiner das Intervall bei 0 gewählt wird, ein chaotisch anmutendes Bild.

Zur näheren Betrachtung können die Funktionsterme analysiert werden:

$$f1(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$f2(x) = \begin{cases} 100000x & -0{,}00001 < x < 0{,}00001 \\ \operatorname{sign}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f3(x) = x^2 + 0{,}01|x|$$

$$f4(x) = \sin(1/x)$$

Bei f1(x) zeigt sich eine Definitionslücke. f2(x) ist überall stetig, entsprechend findet man hier keinen Sprung. f3(x) ist bei 0 nicht differenzierbar, was man z. B. durch Bilden der Ableitung herausfindet. Die letzte Funktion ist auf dem zu untersuchenden Intervall überall stetig und differenzierbar. Das Bild ergibt sich durch den Alising-Effekt. Die Funktion oszilliert hier so stark, dass nur separierte Punkte durch Strecken miteinander verbunden werden.

Eine attraktive Erweiterung dieses Beispiels ist, Schülerinnen und Schüler selbst Beispiele entwickeln zu lassen, die dann von den Mitschülerinnen und Mitschülern untersucht werden.

Hinweis:

Die Lehrerdatei enthält neben den Schülerinformationen die vergrößerten Ausschnitte.