Modellierung durch Funktionsanpassung – Regression oder Schieberegler?

Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß

Einführung

Das Modellieren von Prozessen durch mathematische Funktionen ist ein wichtiger Bestandteil des heutigen Mathematik- und Physikunterrichtes. Dazu stehen häufig Daten in Form einer Tabelle als Basis für solche Untersuchungen zur Verfügung. Um diese Daten durch eine Funktion zu beschreiben, gibt es mehrere Möglichkeiten. So bieten graphische Taschenrechner und Taschencomputer mit CAS Regressionsverfahren für eine große Anzahl von Funktionsklassen an. Der TI-Nspire™ verfügt über eine zusätzliche Alternative, die Schieberegler. Damit lassen sich die Parameter vorgegebener Funktionstypen so einstellen, dass sie gegebene Daten möglich gut beschreiben. Einige Funktionen lassen sich auch manuell durch Ziehen mit der Greifhand an Daten anpassen.

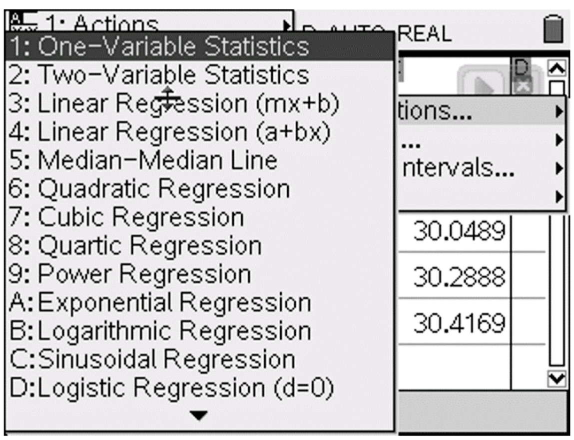


Abb.1: Funktionsklassen für Regressionen

Bei allen Verfahren ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse über die Funktionsklassen (Abb.1) haben, die von den Rechnern für die Approximation angeboten werden bzw. um einen Funktionstyp auszuwählen, bei dem dann die Parameter mit dem Schieberegler variiert werden sollen.

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits aus dem Graphen erkennen können, welcher Klasse die zugehörige Funktion angehören könnte. Auch aus der Wertetabelle können Kenntnisse über den Funktionstyp gewonnen werden, indem die Zusammenhänge bei den jeweiligen Punktepaaren untersucht werden. Bei der Arbeit mit Schiebereglern muss zusätzlich erkannt werden, welche Parameter variabel sein müssen und in welchem Zahlbereich die Parameter gewählt werden müssen, um einen Funktionsgraph möglichst gut durch die Datenpunkte verlaufen zu lassen.

Eine sinnvolle rechnerunterstützte Modellierung setzt also eine Reihe wichtiger mathematischer Kompetenzen voraus. Deren Anwendung und nicht die anschließende numerische Berechnung oder das Ziehen am Schieberegler ist der wichtige Teil von Modellierungen. Kritiker des Einsatzes von Taschencomputer im Unterricht vergessen dies häufig.

Anhand von drei Beispielen werden nachfolgend die Methoden zur Modellierungen demonstriert. Damit wird ein Vergleich der Verfahren möglich.

Modellierung mithilfe von Regression und Schiebereglern

Beispiel 1 (Regression und Schieberegler)

In einem kleinen Messzylinder ist ein eingeschlossenes Gasvolumen zunächst komprimiert und anschließend expandiert worden. Dabei ist für bestimmte Volumina (*dc03.event*) der Druck (*dc03.press1*) aufgezeichnet worden.

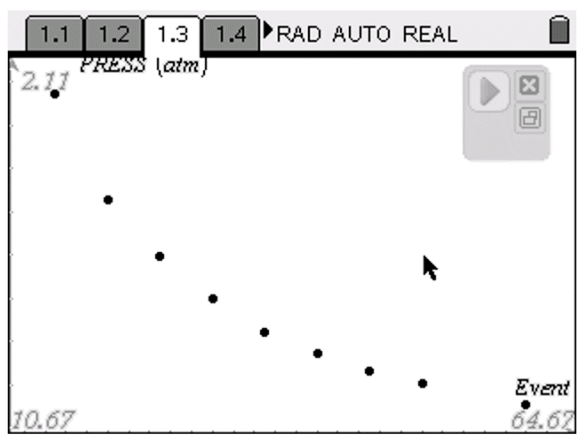


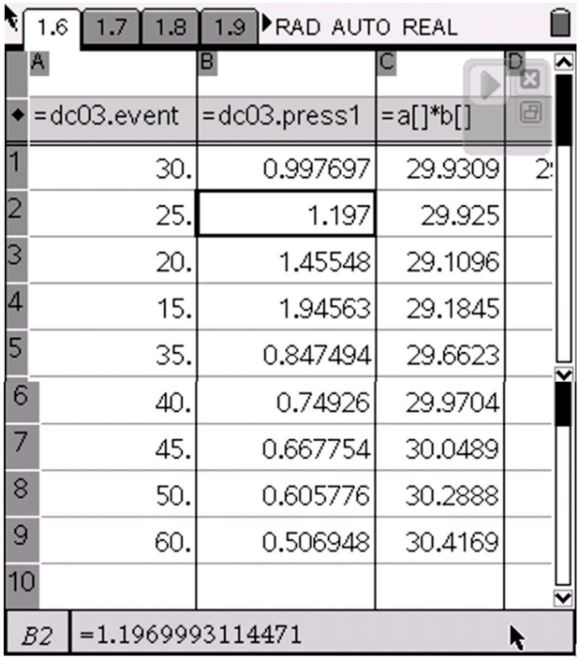
Abb.2: Graphische Darstellung der Messdaten

In Abb. 2 sind die Daten graphisch dargestellt und in Abb.3 in einer Tabelle zu sehen.

Ziel der Modellierung soll sein, dass die Beziehung

$$p(V) \approx \frac{1}{V} \qquad (1)$$

erkennbar wird.



	A	B	C
◆	=dc03.event	=dc03.press1	=a[]*b[]
1	30.	0.997697	29.9309
2	25.	1.197	29.925
3	20.	1.45548	29.1096
4	15.	1.94563	29.1845
5	35.	0.847494	29.6623
6	40.	0.74926	29.9704
7	45.	0.667754	30.0489
8	50.	0.605776	30.2888
9	60.	0.506948	30.4169
10			

Abb.3: Messdaten

Für eine Modellierung muss zunächst der Funktionstyp festgelegt werden. In der Tabelle in Abb.3 ist in Spalte C das Produkt der Werte von Volumen und Druck berechnet worden, das für alle Messpunkte etwa konstant ist. Dies deutet auf eine antiproportionale Zuordnung. Eine solche wird in dem Menü in Abb.1 nicht angeboten. Stattdessen muss man aus dem Menü für die möglichen Regressionsfunktionen in Abb.1 „*Power Regression*“ (Potenzfunktion) wählen. (menu, *1:Actions, 4:Statistics, 1:Stat Calculations... 9:Power Regression*)

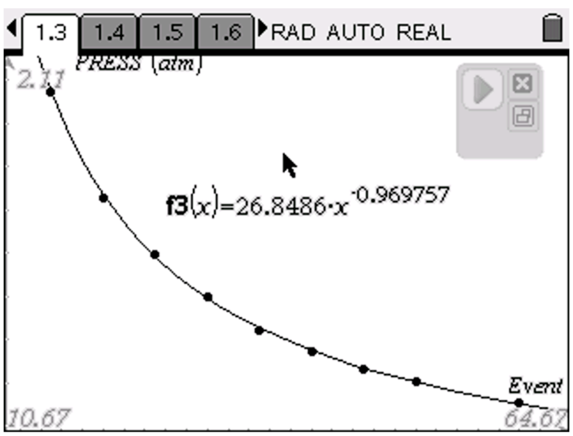


Abb.4: Modellierung durch die Regressionsfunktion

Die Regressionsfunktion ist als f3(x) gespeichert und in Abb.4 zusammen mit den Daten graphisch dargestellt worden. Sie beschreibt recht gut den Verlauf der Messdaten. Die Aufgabe zur Modellierung der Daten ist somit erfüllt. Man erhält:

$$p(V) = 26{,}8 \cdot V^{-0{,}97} \qquad (2)$$

Nun wird die Modellierung mit Schieberreglern gezeigt. Dazu benötigt man im Allgemeinen genauere Kenntnisse über den Datentyp und auch den Wertebereich der Parameter. In Spalte „C“ der Tabelle (Abb.3) ist das Produkt $p \cdot V$ berechnet worden, das für alle Werte nahezu konstant ist. Daher kann geschlossen werden, dass die Daten durch eine Funktion des Typs

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

beschrieben werden können.

In der Applikation Graphs & Geometrie wird nun ein Schieberegler installiert mit menu*, 1:Actions, A:Slider*. Die Parameter für den Schieberegler kann man mit ctrl menu, *1:Settings...* eingeben.

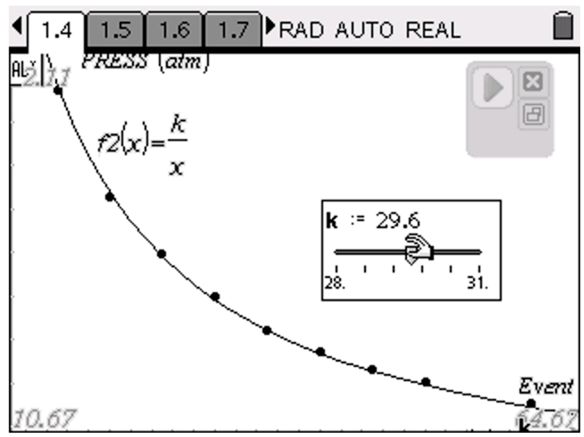


Abb.5: Funktionsanpassung mit Schieberegler

Durch die Berechnung in der Tabelle in Abb.3 ist bekannt, dass für k gilt: $29 < k < 31$. Entsprechend können die Grenzen von k eingegeben werden. Mit der Greifhand (Abb.5) kann dann k eingestellt werden. Für $k = 29{,}6$ ist eine gute Approximation der Daten erreicht. Die Modellfunktion ist demnach:

$$p(V) = \frac{29{,}6}{V} \qquad (3)$$

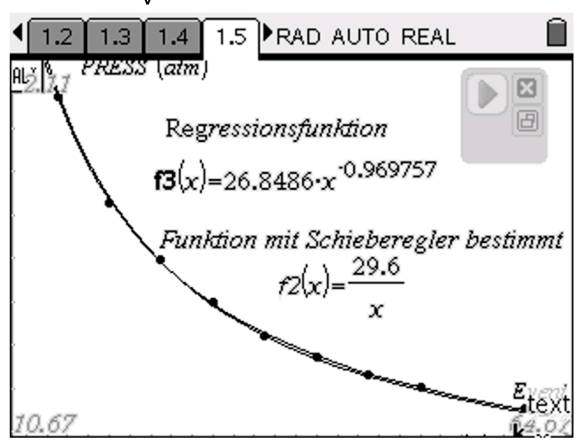


Abb.6: Vergleich der Modellfunktionen

Ein Vergleich der Modellierungen in Abb.6 zeigt, dass beide Funktionen gemäß (2) und (3) sehr gute Approximationen der Daten ergeben. Eine Entscheidung zwischen ihnen muss nach fachlichen und bzw. oder didaktischen Gesichtspunkten erfolgen. Hier ist dem Ergebnis (3) mit dem Schieberegler der

Vorzug zu geben, denn das Ergebnis (2) der Regression mit dem Exponenten -0,97 lässt das zugrunde liegende Naturgesetz, die antiproportional Beziehung zwischen p und V, nicht klar erkennen.

Beispiel 2 (Schieberegler):
Ein Gymnastikball fällt aus einer Höhe von ca. 2 m zu Boden und springt mehrfach auf. Seine Bewegung wird mit einem Ultraschallabstandssensor aufgezeichnet und ist in Abb. 7 dargestellt. Der Graph besteht aus einer großen Anzahl von Bögen, die vermutlich durch quadratische Gleichungen beschrieben werden können. Der Nachweis ist nicht mit einer Regressionsrechnung zu führen, weil bei einer Regression eine Ausgleichsfunktion zu dem gesamten Datensatz berechnet wird und nicht zu den einzelnen Bögen. Erst wenn man sich einen Ausschnitt, z.B. einen einzelnen Parabelbogen wählt, wird eine Regression sinnvoll.

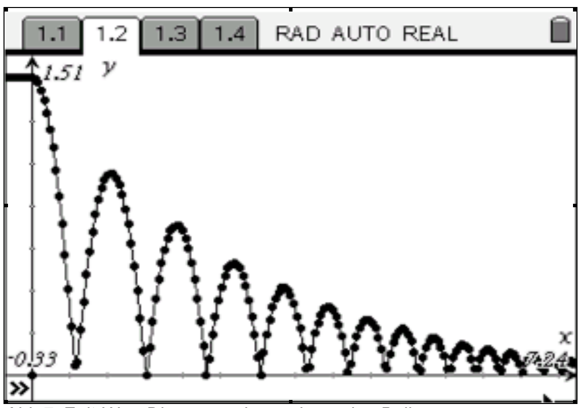


Abb.7: Zeit-Weg-Diagramm des springenden Balles

Ein Schieberegler kann flexibler eingesetzt werden. Z.B. ist es möglich, die einzelnen Bögen durch Parabeln vom Typ

$k \cdot (x - x_0)^2 + y_0$

zu approximieren. Dazu wären allerdings drei Schieberegler für x_0, y_0 und k erforderlich.

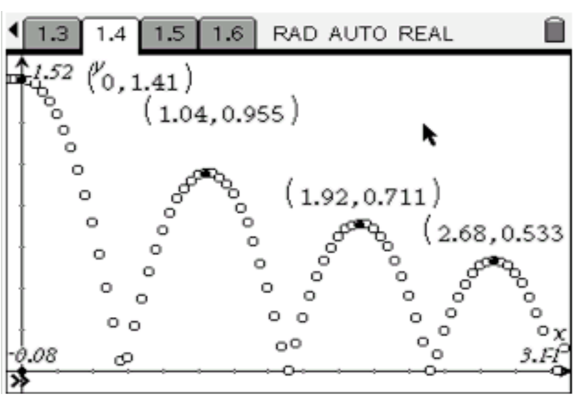


Abb.8

In dem Display des Handhelds könnten sie nur mit Mühe untergebracht werden. Außerdem ist es sehr schwierig, eine Funktion mithilfe von drei Reglern durch die Punkte hindurchzulegen. Eine Reduktion der Parameter ist daher dringend empfohlen. Das ist hier möglich, denn man kann den Scheitelpunkt $S(x_0 \mid y_0)$ der Parabeln leicht aus dem Graphen ablesen. Danach ist nur noch ein Regler für k erforderlich, um den Graphen anzupassen.

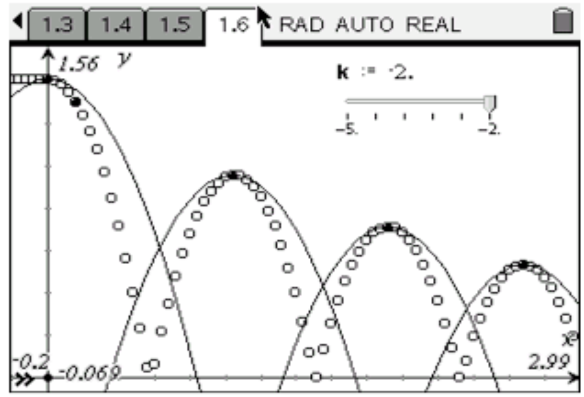


Abb. 9

Mit der Spurfunktion (menu, *5:Trace*) können die Koordinaten der einzelnen Datenpunkte angezeigt und mit der Entertaste fixiert werden. Auf diese Weise werden die Scheitelpunkte bestimmt. Danach wird ein Schieberegler (menu*, 1:Actions, A:Slider*) installiert und das Intervall für k festgelegt (ctrl menu, *1:Setting..*).

Abschließend werden in der Eingabezeile nacheinander die Funktionen f1 bis f4 zur Modellierung der ersten 4 Bögen eingegeben.

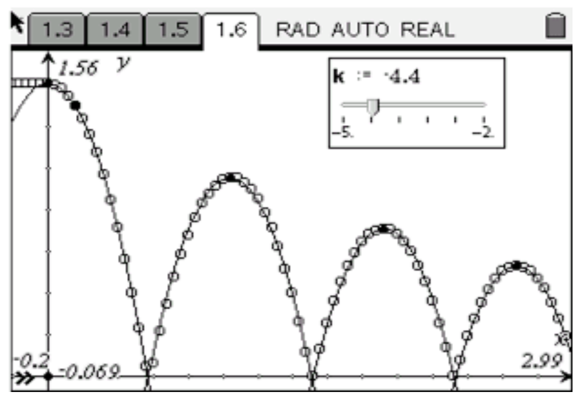


Abb. 10

Nun wird mit der Greifhand der Schieber so eingestellt, dass die Parabeln möglichst gut durch die Messpunkte verlaufen. Offensichtlich gelingt mit k = -4,4 eine Anpassung für alle vier Bögen des Graphen. Mit dem so ermittelten Wert für k lassen sich die Parabelbögen durch die Funktionen f1 bis f4 beschreiben.

Für die physikalische Interpretation bedeuten die Scheitelpunktskoordinaten y_0 die Anfangshöhe h_0 der Fallbewegung und x_0 die Startzeit t_0. Da die Variable x der Zeit t entspricht, können die einzelnen Parabelbögen beschrieben werden durch:

$$s(t) = h_0 - 4.4 \frac{m}{s^2} \cdot (t - t_0)^2$$

Beispiel 3 (manuelles Anpassen)

Das Anpassen von Funktionen kann mit dem TI-Nspire™ in einigen Fällen noch einfacher und intuitiver durchgeführt werden. Graphen von linearen, quadratischen, trigonometrischen Funktionen und einigen Exponentialfunktionen können mit der Greifhand so verändert werden, dass sie vorgegebene Bedingungen erfüllen.

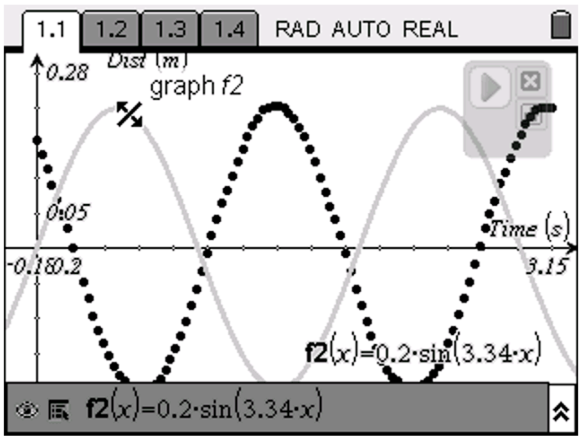


Abb.11: Anpassen der Schwingungsdauer und Schwingungsweite

In Abb. 11 ist das Zeit-Weg-Diagramm einer Pendelschwingung dargestellt, die durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden soll. Dazu ist in der Editorzeile eine Sinusfunktion eingegeben worden, bei der die Schwingungsweite und die Schwingungsdauer mit den Parametern 0,25 und 2 bereits der gezeigten Schwingung angepasst ist. So ist das Manipulieren des Graphen deutlich einfacher. Für das Bearbeiten stehen zwei Werkzeuge zu Verfügung. Klickt man auf den oberen oder unteren Teil des Graphen, so verändert sich der Zeiger wie in Abb. 11. Die Schwingungsweite kann durch vertikales Ziehen und die Schwingungsdauer durch horizontales Ziehen am Graphen eingestellt werden.

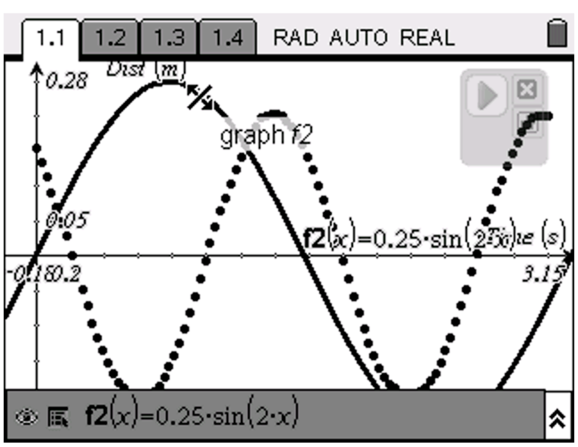


Abb.12: Anpassen der Schwingungsdauer und -weite

In Abb.12 ist eine solche Veränderung erfolgt. Dabei hat sich gleichzeitig der Funktionsterm entsprechend den Verschiebungen verändert.

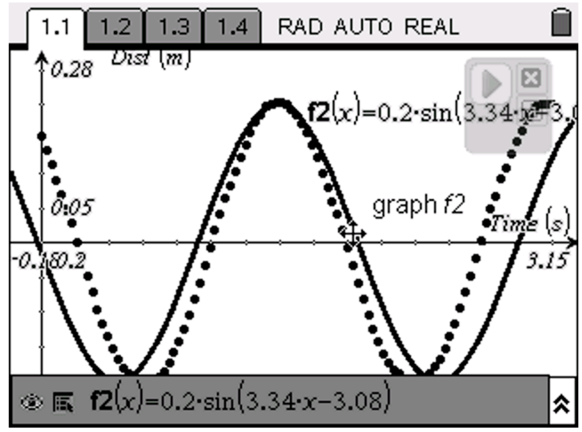


Abb.13: Verschiebung in x- und y-Richtung

Zur Einstellung der Anfangsbedingung klickt man auf den Graphen der Funktion in der Nähe der x-Achse. Wiederum verändert sich der Zeiger (Pfeilkreuz in Abb. 13), nun kann der Graph vertikal und horizontal verschoben werden kann. Die erfolgte Verschiebung ist wieder in der Änderung des Terms zu erkennen. Die beschrieben Werkzeuge müssen nun mehrfach eingesetzt werden, damit eine zufriedenstellende Modellierung entsteht. Dazu gehören einerseits etwas manuelles Geschick und andererseits Kenntnisse über den Funktionstyp, denn man muss sich immer wieder darüber klar werden, welchen Parameter man ändern will.

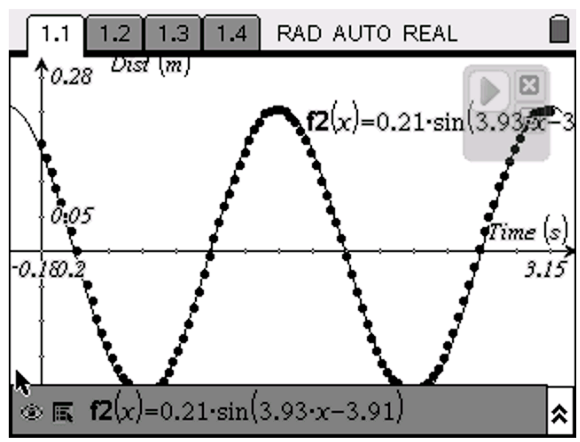


Abb.14: Modellfunktion

Abb. 14 zeigt das Ergebnis der manuellen Modellierung mit dem Term der Modellierungsfunktion in der Eingabezeile.

Approximiert man die Daten mithilfe einer Regressionsrechnung, so erhält man den folgenden Term:

$$0{,}203 \cdot \sin(3{,}98 \cdot x + 2{,}23) - 0{,}0007\ .$$

Die Abweichung beider Terme ist sehr gering. Lediglich die unterschiedlichen absoluten Zahlen im Argument der Sinusfunktion (Verschiebungen in x Richtung, bzw. Phasenverschiebungen) bedürfen einer Erläuterung. Für die Differenz der Werte gilt:

$$2{,}23 - (-3{,}91) = 6{,}14 \approx 2\pi$$

Wegen der Mehrdeutigkeit der Sinusfunktion sind Graphen, die sich um 2π unterscheiden, identisch.

Zusammenfassung

Im Folgenden ist zusammengestellt worden, was die Verfahren zur Modellierung im Einzelnen charakterisiert:

Die Arbeit mit Regressionsfunktionen

- ist schnell und problemlos ausführbar,
- führt zu einem eindeutigen Ergebnis, weil es wird mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet wird,
- ist auf vorgegebene Funktionen (s. Abb.1) beschränkt (lässt u.a. Modellfunktionen x^{-1}, x^{-2}, 2^{x}, 10^{x}, e^{x} nicht zu),
- führt bei der Modellierung von Prozessen, die sich exponentiell einem anderen Wert als Null annähern, zu keinem korrekten Ergebnis,
- kann nicht auf einen Teil der gegebenen Daten angewendet werden,
- lässt Schülerinnen und Schüler nicht erkennen, wie die Modellfunktion zustande kommt.

Bei der Arbeit mit Schiebereglern

- kann jeder Funktionstyp gewählt werden,
- ist die Kenntnis über Funktionstypen erforderlich,
- ist die Kenntnis über Verschiebung und Streckung von Funktionen bei der Anpassung an Daten erforderlich,
- sind Ausschnitte der Daten bearbeitbar,
- kann die Zahl der Parameter zu groß werden,
- muss die Größenordnung der Parameter der Modellfunktion möglichst vorher ermittelt werden,
- weisen die Ergebnisse individuelle Unterschiede auf,
- ist experimentelles Geschick erforderlich,
- ist das Regeln spannend.

Für eine Modellierung durch Regression spricht die einfache und schnelle Durchführung und die Eindeutigkeit der Lösung. Das Einrichten von Schiebereglern dauert länger und die Anpassung durch die Einstellung der Regler ist manchmal mühsam. Aber diese Methode ist auch dann anwendbar, wenn die Regression nicht zum Erfolg führt. Außerdem sind deutlich größere Kenntnisse über Funktionen und Funktionsklassen erforderlich. Dies sind auch außerhalb dieser Problemkreise Kompetenzen, die vor allem für das Arbeiten mit CAS dringend erforderlich sind. Deshalb sollten Modellierungen nach Möglichkeit mit Schiebereglern durchgeführt werden, um diesen Kompetenzerwerb zu fördern.

Autoren:

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Altenholz (D)
kh.Keunecke@keukiel.de
Angelika Reiß, Berlin (D)
reiss-berlin@t-online.de