

---

## Thema: Abstand Gerade und Punkt in $\mathbb{R}^3$

Franz Schlöglhofer

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Gerade, Parameterdarstellung, Normalabstand

---

## Unterrichtsmaterial

Worum es geht: Änderung der Geraden und des Punktes A (Datei *3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_A.tns*). Berechnet wird automatisch der Abstand des Punktes A von der Geraden und der zugehörige Punkt B für den Normalabstand (Lotfußpunkt). Zur Auswahl steht eine zweite Datei (*3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_B.tns*), in der die Berechnungen selbstständig ausgeführt werden sollen. Der für den Normalabstand zugehörige Punkt muss B sein (wegen der Darstellung im Koordinatensystem).

## Aufgabe

Verwende die Datei *3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_A.tns*.

Im ersten Fenster kann man die Gerade ändern (Punkt **pg** und Richtungsvektor **rg**) bzw. andere Werte für den Punkt **A** eingeben.

Zur Berechnung des Abstandes eines Punkts von der Geraden wird angenommen, dass die Länge der kürzesten Verbindungslinie vom Punkt A zur Geraden der Abstand ist und dass diese Verbindungslinie normal auf die Gerade steht. Das Skalarprodukt des Vektors **g-a** zum Punkt P mit dem Richtungsvektor **rg** der Geraden muss deshalb 0 sein. Daraus lässt sich der Punkt B berechnen.

A) Verwende die Datei *3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_A.tns*:

- Arbeite die Berechnung in der Datei durch und beschreibe sie. Berechne die Entfernung mit den gegebenen Daten auch ohne Rechner.
- Wähle den Punkt A auf der Geraden g bzw. wähle für A den Ursprung. Kontrolliere, ob im ersten Fall auch die Entfernung mit 0 richtig angegeben wird. Berechne wiederum ohne Rechner.

B) Verwende die Datei *3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_B.tns*:

In dieser Datei sind die Eingabe und die grafische Darstellung bereits vorhanden. Führe die Berechnungen selbstständig durch und überprüfe sie an den Angaben des Punktes A.



## Didaktischer Kommentar

Punkte und Gerade können eingegeben werden. Der kürzeste Abstand wird berechnet und dargestellt. Die Rechnung soll nachvollzogen werden und als Alternative auch selbst gemacht werden.

## Vorschlag zur Umsetzung

Eingabe von Punkten und Geraden im ersten Fenster. Die Berechnung wird im zweiten Fenster ausgeführt. Mit verschiedenen Werten für die Gerade und den Punkt kann experimentiert werden.

**Abstand des Punktes A von der Geraden g:**

Eingabe Punkt und Richtungsvektor der Geraden:

$$\mathbf{pg} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{rg} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eingabe des Punktes A:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

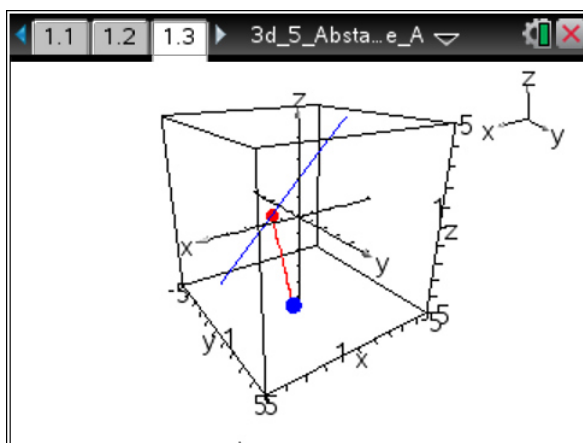
**Lotfußpunkt B – Abstand:**

$$\mathbf{g} = \mathbf{pg} + t \cdot \mathbf{rg} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-t \\ t-2 \\ 2 \cdot t-1 \end{bmatrix} \quad \text{dotP}(\mathbf{g}-\mathbf{a}, \mathbf{rg}) \rightarrow 6 \cdot t - 2$$

$$\mathbf{tb} = \text{solve}(\text{dotP}(\mathbf{g}-\mathbf{a}, \mathbf{rg})=0, t) \rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}|_{\mathbf{tb}} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \text{norm}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \rightarrow \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Darstellung im Koordinatensystem:



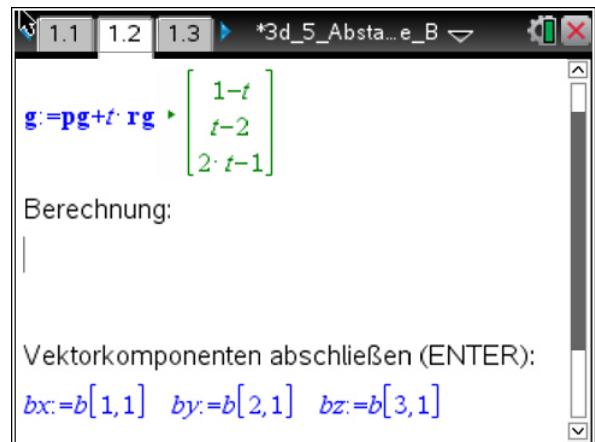
Wenn man  $\mathbf{A} = (-1/0/3)$  wählt, so liegt A auf der Geraden und es ergibt sich der Abstand 0.

Datei *3d\_5\_Abstand\_Gerade\_Punkt\_B.tns*:

Im Fenster 1.2 ist nach „Berechnung“ ein Bereich für das Einfügen der Berechnungen vorgesehen.

Zu beachten ist, dass der berechnete Punkt auf g die Bezeichnung b erhält.

Wenn b berechnet ist müssen die Vektorkomponenten (unten im Fenster) noch mit ENTER abgeschlossen werden.



## Technologiehilfe

Verwendung einer fertigen Datei; Eingabe der Geraden und der Koordinaten des Punkts.

Eingabe und Durchführung einer Berechnung mit Formeln und Lösung einer Gleichung in NOTES.