Lösungsvielfalt und Vernetzung – ein Beispiel aus der Geometrie

Hans Kramer

Vorbemerkung

Vorgestellt wird eine klassische Problemsstellung aus der Geometrie bzw. Vermessungskunde, die Aufgabe findet sich in ähnlicher Form z.B. im Lehrbuch MatheNetz10 [1]. Die Aufgabe kann mit Hilfe des Sinussatzes gelöst werden – stellt aber zunächst keine simple Übungsaufgabe dar.

Reizvoll an der Aufgabe ist insbesondere, dass recht unterschiedliche Zugänge möglich sind. Im Artikel soll insbesondere ein funktionaler Ansatz vorgestellt werden, bei dem zur Schnittpunktberechnung von Kreisen und Geraden der GTR verwendet wird.

Aufgabenstellung

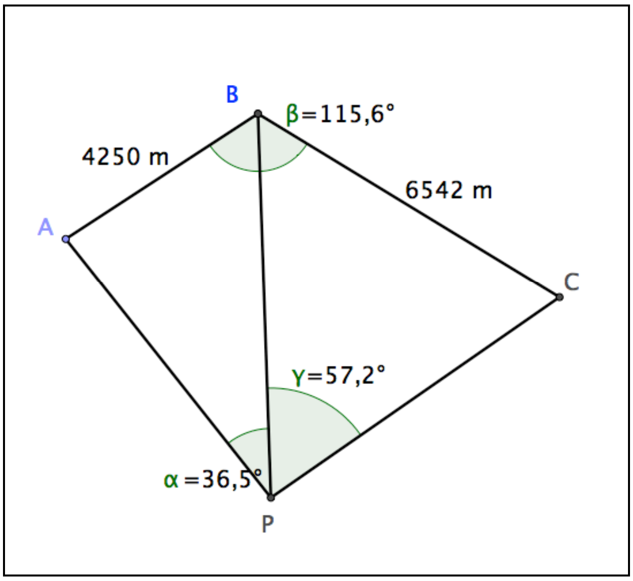

Abb. 1

Gegeben ist die (Vermessungs-) Figur nach Abb. 1. Aufgrund der Geländebedingungen wurden vom (neuen) Standpunkt P aus Richtungsmessungen zu den drei (bekannten) Punkten A, B und C vorgenommen. Zu bestimmen ist der Abstand des Punktes P von A, B und C.

Lösung mit Hilfe dynamischer Geometrie-Software

Einen ersten Zugang stellt das maßstabsgetreue Zeichnen der Figur gemäß Abb. 1 mit einer dynamischen Geometrie-Software, z.B. mit Cabri Geometry II™, dar. Hierzu sind die beiden Umfangswinkelkreise zu denjenigen Peripheriewinkeln zu konstruieren, die bei P vorgegeben sind (vgl. Abb. 2); dabei kann z.B. der Winkel δ_1 unter Ausnutzung des Mittelpunktswinkelsatzes konstruiert werden. Der Punkt P ergibt sich als Schnittpunkt dieser beiden Kreise. Erste Messungen der Streckenlängen sind dann möglich (siehe Skizze).

Auch die Größe des Winkels ABP kann so durch Messung näherungsweise ermittelt werden. Dieser Weg lässt sich natürlich auch konkret durchrechnen.

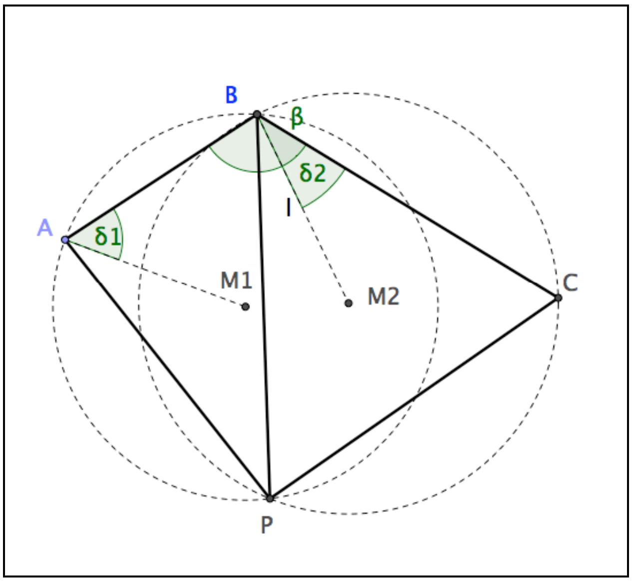

Abb. 2

Rechnerische Lösung mit Peripheriewinkelkreisen

Legt man ein Koordinatensystem derart fest, dass B der Koordinatenursprung ist und A auf der positiven x - Achse liegt, so besitzen diese Punkte die Koordinaten $B(0|0)$ und $A(4250|0)$.

Zunächst werden die Koordinaten des Punktes C bestimmt. Die Gerade $g_1 = \mathrm{BC}$ besitzt die Gleichung

$$g_1\colon y = \tan(115{,}6°)\cdot x.$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = 6542$ (im zweiten Quadranten) legt den Punkt C fest. Für einen Kreis um den (beliebigen) Mittelpunkt $M(x_m\,|\,y_m)$ mit dem Radius r gilt:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

Für die Funktionsgleichung zum oberen Halbkreis gilt dann:

$$y = y_m + \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} \quad \text{bzw.} \quad y = \sqrt{6542^2 - x^2}\,.$$

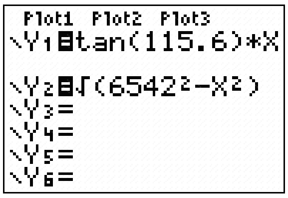

Abb. 3

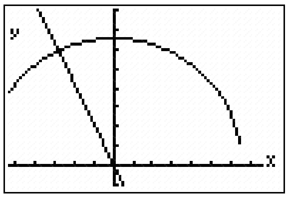

Abb. 4

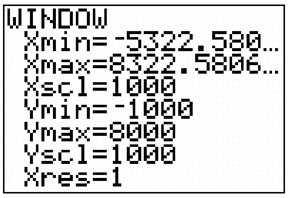

Abb. 5

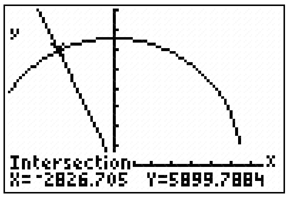

Abb. 6

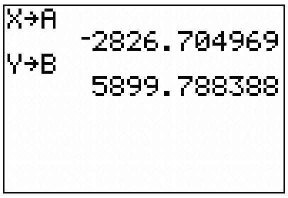

Abb. 7

Für den Punkt C ergeben sich die Koordinaten $C(-2826{,}7\,|\,5899{,}8)$.

Nun werden die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 aus Abb. 2 bestimmt.

Der gesuchte Punkt P besitzt bezüglich der Sehne $\overline{BA}$ den Umfangswinkel $\gamma_1 = 36{,}5°$. Deshalb besitzt das gleichschenklige Dreieck BAM_1 aus Abb. 2 bei B den Winkel $x_1 = 53{,}5°$ (Umfangswinkelsatz). Die Mittelsenkrechte dieses Dreiecks bezüglich $\overline{BA}$ hat die Gleichung $x = ½ \cdot 4250 = 2125$.

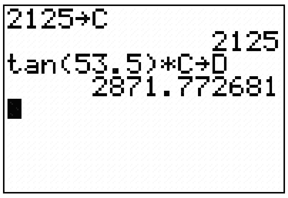

Abb. 8

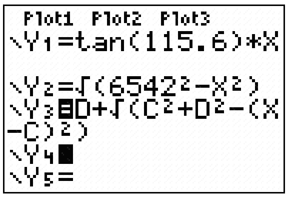

Abb. 9

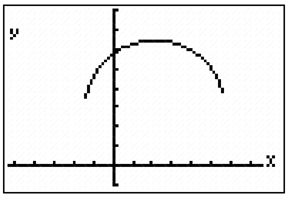

Abb. 10

Die Ursprungsgerade g_2 durch die Punke B und M_1 hat die Gleichung $y = \tan(53{,}5°) \cdot x$; $x = 2125$, deshalb besitzt der Mittelpunkt M_1 des ersten Umfangswinkelkreises K_1 die Koordinaten $M_1(c\,|\,d)$ (siehe Abb. 8). Da der Kreis K_1 durch den Ursprung B verläuft, gilt für seinen Radius r_1:

$$r_1^2 = c^2 + d^2.$$

Mit diesen Daten lässt sich unter Y3 die Funktionsgleichung zum oberen Halbkreis von K_1 eingeben. Eine erste Ortslinie, auf der der gesuchte Punkt P liegen muss, ist bestimmt.

Bezüglich der Sehne $\overline{CB}$ besitzt der Punkt P den Umfangswinkel $\gamma_2 = 57{,}2°$. Deshalb besitzt das gleichschenklige Dreieck CBM_2 in C und B den Winkel $x_5 = 32{,}8°$.

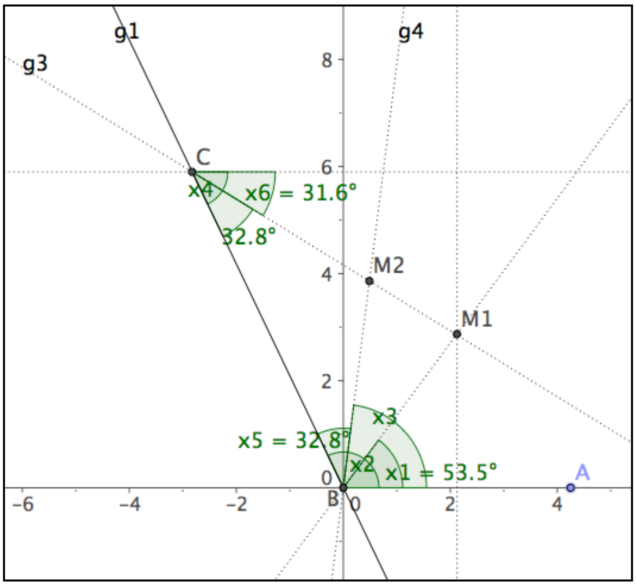

Abb. 11

M_2 ergibt sich gemäß Abb. 11 als Schnittpunkt der Geraden $g_4 = BM_2$ und $g_3 = CM_2$.

Mit $\sphericalangle ABC = 115{,}6° =: x_2 \Rightarrow x_3 = x_2 - x_5 = 82{,}8°$; mit $x_4 = 180° - x_2 = 64{,}4° \Rightarrow x_6 = x_4 - x_5 = 31{,}6°$.

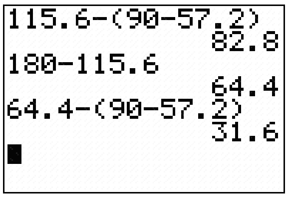

Abb. 12

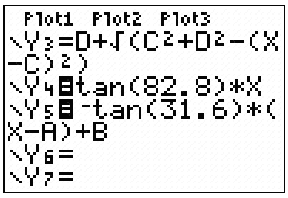

Abb. 13

Die Gleichung zu g_4 als Ursprungsgerade ergibt sich somit sofort: $y = \tan(82{,}8°) \cdot x$, gespeichert unter Y4. Für die Ermittlung der Gleichung von g_3 ist zu beachten, dass die Gerade fallend verläuft, ihr Steigungsfaktor also negativ ist: $m = -\tan(31{,}6°)$. Die Gerade g_3 verläuft durch den Punkt $C(a\,|\,b)$ und besitzt den oben angeführten Steigungsfaktor. So lässt sich der entsprechende Term unter Y5 speichern (Abb. 13).

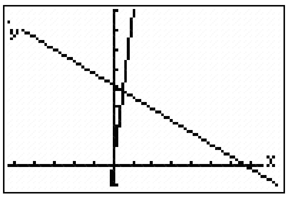

Abb. 14

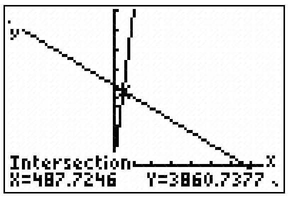

Abb. 15

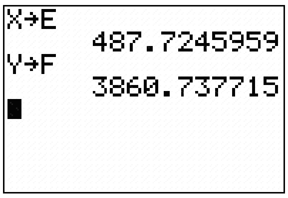

Abb. 16

Nach der Darstellung der Geraden, der Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes M_2 und deren Speicherung besitzt der Mittelpunkt zum Kreis K_2 die Koordinaten $M_2(e|f)$.

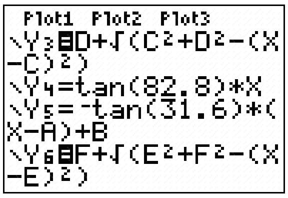

Abb. 17

Da auch K_2 ein Kreis durch den Ursprung ist, gilt analog auch für seinen Radius r_2: $r_2^2 = e^2 + f^2$.

Mit diesen Daten lässt sich unter Y6 die Funktionsgleichung zum oberen Halbkreis von K_2 eingeben. Eine zweite Ortslinie, auf der der gesuchte Punkt P liegen muss, ist bestimmt.

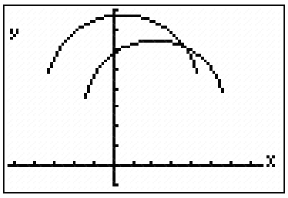

Abb. 18

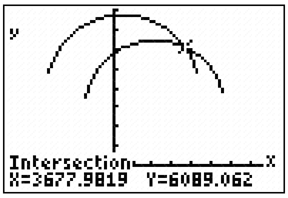

Abb. 19

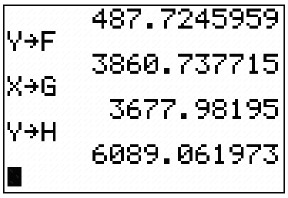

Abb. 20

Der gesuchte Punkt P ist als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt, seine Koordinaten werden entsprechend gespeichert: $P(g|h)$.

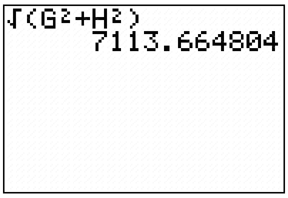

Abb. 21

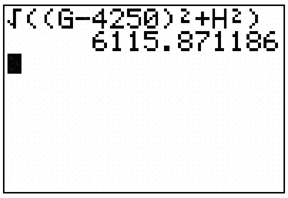

Abb. 22

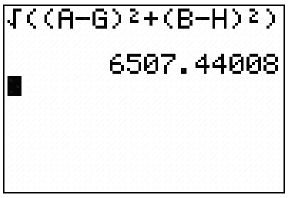

Abb. 23

B liegt im Koordinatenursprung, die Rechnung aus Abb. 21 bestimmt die Länge der Strecke $\overline{PB}$. A liegt auf der x- Achse, die Rechnung gemäß Abb. 22 bestimmt den Abstand der Punke P und A. Die entsprechende Rechnung für den Abstand $\overline{CP}$ zeigt Abb. 23.

Lösung mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen

Die Aufgabe lässt sich auch unter Verwendung des Sinussatzes lösen, dies soll hier abschließend nur angedeutet werden:

Sowohl im $\triangle PBA$ wie auch im $\triangle PBC$ nach Abb. 2 kann der Sinussatz unter Verwendung des Winkels $\sphericalangle ABP = x$ bzw. unter Verwendung von $\sphericalangle PBC = 115{,}6° - x$ und der Strecke $\overline{PB} = a$ angewendet werden. Das System aus zwei Gleichungen mit den Unbekannten x und a lässt sich unter Verwendung des Additionstheorems für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und der Beziehung $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ auflösen.

Auf die Verwendung des Additionstheorems kann bei einer anderen Vorgehensweise verzichtet werden: Für diesen Rechenweg verwendet man den Umkreis des Dreiecks ACP und bestimmt zunächst die Koordinaten des Hilfspunktes Q, der sich als Schnittpunkt zwischen dem Umkreis und der Verlängerung von $\overline{PB}$ ergibt.

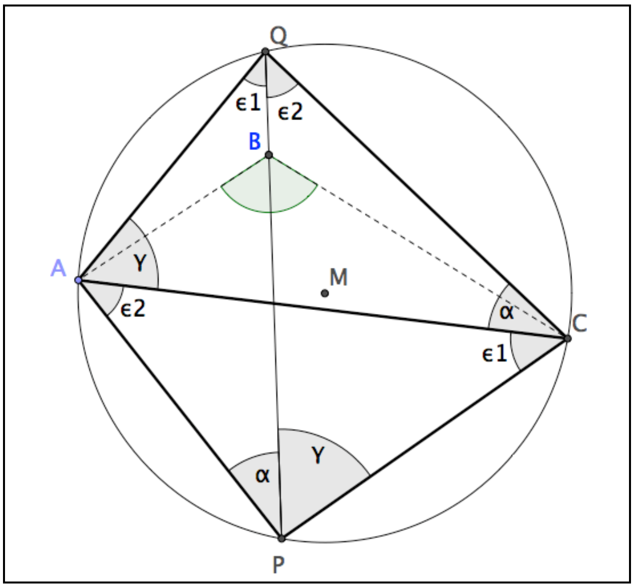

Abb. 24

Im Dreieck ACQ gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\sphericalangle QCA = \alpha$ und $\sphericalangle QAC = \gamma$, mit Hilfe des Sinussatzes kann $\overline{AQ}$ bestimmt werden. Mit den Koordinaten des Punktes Q sind auch die Winkel ε_1 und ε_2 bekannt, im Dreieck APC lassen sich die Koordinaten von P bestimmen.

Literatur-Quelle

[1] Cukrowicz, J.; Zimmermann, B. (Hrsg.): *MatheNetz 10 – Ausgabe N*, Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig ([1]2002)

Autor:

Hans Kramer, Burgwedel (D)
Gymnasium Großburgwedel,
Landesschulbehörde Abt. Hannover
hkramer01@aol.com