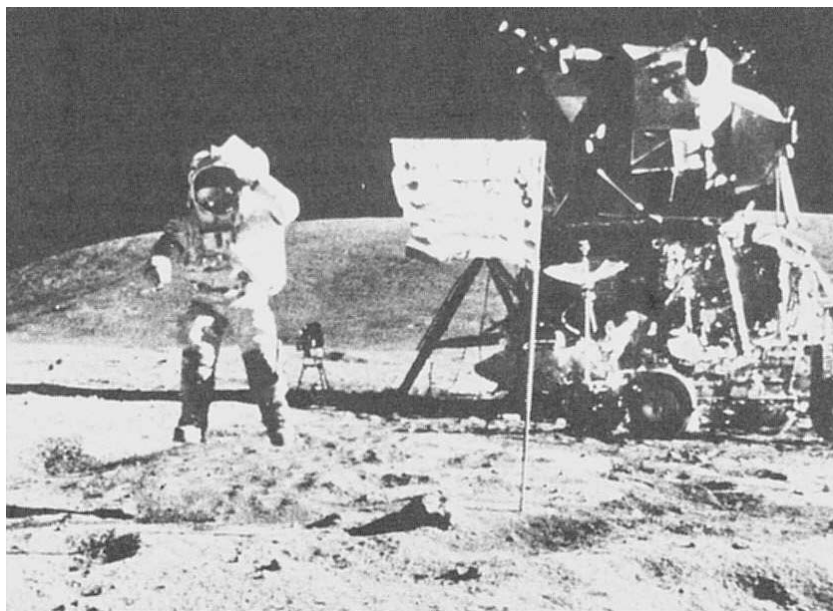


# Mit dem Sinus auf der Spur des Mondes

Elvira Malitte, Halle



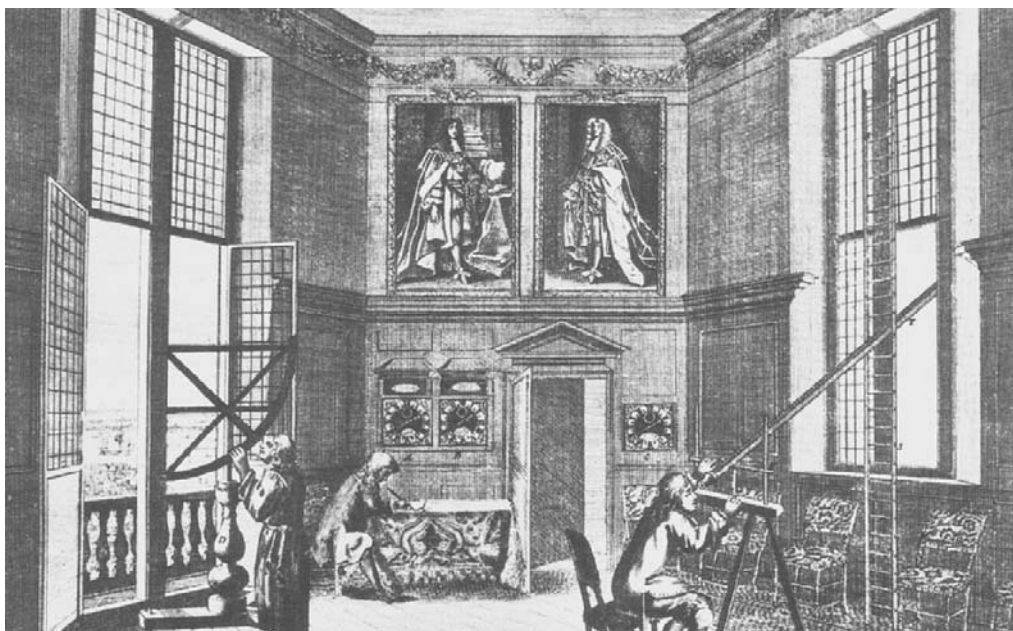
„Wie verändert sich die Mondscheindauer im Laufe der Zeit?“ Diese Frage stellt sich ganz natürlich, wenn Schülerinnen und Schüler den Auftrag erfüllen, Daten für Mondaufgang und Monduntergang aus der Tageszeitung zu sammeln. Ausgehend von realem Datenmaterial wird eine Aufgabensequenz vorgestellt, die schrittweise zu einer angemessenen mathematischen Beschreibung hinleitet.

Sowohl die Aufbereitung der vorliegenden Daten, als auch die mathematische Auseinandersetzung mit der funktionalen Beziehung „Tag -> Mondscheindauer“ stellen grundlegende Aspekte der Aufgabensequenz dar. Die grafische Veranschaulichung führt zur Idee der Sinuskurven-Anpassung. Diese Idee wird Schritt für Schritt durchdacht und realisiert.

Die Aufgabensequenz kann genutzt werden, um die trigonometrischen Funktionen zu motivieren und einzuführen, aber auch, um bereits erworbenes Wissen zu üben und zu festigen, oder zur Wiederholung, etwa zu Beginn der Sekundarstufe II. Verzichtet man auf die Anpassung einer Sinuskurve an die Ausgangsdaten, d.h. stellt man den funktionalen Zusammenhang als solchen in den Mittelpunkt, so ist eine Bearbeitung bereits ab Klasse 7 denkbar.

Bei der Realisierung dieser Aufgabensequenz können verschiedene Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden. Hier sollen zunächst die Möglichkeiten unter Verwendung eines Grafikrechners aufgezeigt werden.<sup>1</sup> Der Grafikrechner erweist sich dabei als angemessenes und leistungsfähiges Werkzeug. Durch ihn wird die Bewältigung der Aufgabe, die weit über die rein händischen Möglichkeiten der Bearbeitung hinausgeht, zu einem interessanten, vielgestaltigen Auftrag. Stehen Symbolrechner wie der TI-92+ bzw. dessen Nachfolger Voyage 200 zur Verfügung, so sind weiterführende Betrachtungen möglich. Das gilt insbesondere, da die Rechner mit einer speziellen Applikation zur Datenverarbeitung – dem Programm CellSheet – ausgestattet sind bzw. sich leicht und ohne Zusatzkosten damit ausstatten lassen. Plant man eine Realisierung dieser Aufgabensequenz in einen Computerpool, so bietet sich ein Tabellenkalkulationsprogramm wie Excel an. Gegebenenfalls ist auch ein Datenaustausch zwischen verschiedenen Werkzeugen wünschenswert. Für einen Datenaustausch zwischen Excel und CellSheet steht der TI-CellSheet-Converter zur Verfügung. Die Verwendung verschiedener Werkzeuge eröffnet die Möglichkeit vergleichender Betrachtungen, macht Vorteile und Grenzen ihres Einsatzes bewusst.

<sup>1</sup> In Anlehnung an W. Herget, E. Malitte, K. Richter 2002



Observatorium in Greenwich: Der achteckige Raum ist mit besonders hohen Fenstern ausgestattet, um astronomische Beobachtungen mit Spezialgeräten zu ermöglichen. Stich von Francis Place, ca. 1700.

## Der Mond ist aufgegangen ... Arbeitsblatt 1

Aus der Tageszeitung kann man die Daten für den Mondaufgang (MA) und den Monduntergang (MU) entnehmen.

Ein Schüler sammelte diese Daten vom 1. Juli bis zum 28. August und legte die folgende Tabelle vor. Sonntags erscheint die Zeitung nicht, und manchmal vergaß der Schüler auch, sich die Zeiten zu notieren. So kam es zu Lücken in der Tabelle.

Nr.	Datum	MA	MU
1	01.07.	13:02	00:52
2	02.07.	14:06	01:14
3	03.07.	15:09	01:35
4	04.07.	16:13	01:59
5	05.07.		
6	06.07.	17:45	02:24
7	07.07.	19:19	03:29
8	08.07.	20:16	04:12
9	09.07.	21:07	05:03
10	10.07.	21:52	06:02
11	11.07.	22:30	07:09
12	12.07.		
13	13.07.	23:32	09:38
14	14.07.	23:59	10:52
15	15.07.		12:10
16	16.07.	00:25	13:27
17	17.07.	00:52	14:44
18	18.07.	01:22	16:00
19	19.07.		
20	20.07.	02:35	18:23

Nr.	Datum	MA	MU
21	21.07.	03:22	19:24
22	22.07.	04:16	20:17
23	23.07.	05:17	21:00
24	24.07.	06:22	21:37
25	25.07.	07:29	22:07
26	26.07.		
27	27.07.	09:42	22:56
28	28.07.	10:48	23:18
29	29.07.	11:52	23:40
30	30.07.	12:56	
31	31.07.		
32	01.08.		
33	02.08.		
34	03.08.	17:05	01:26
35	04.08.	18:03	02:05
36	05.08.	18:57	02:52
37	06.08.	19:45	03:47
38	07.08.	20:26	04:51
39	08.08.	21:02	06:02
40	09.08.		

Nr.	Datum	MA	MU
41	10.08.	22:02	08:36
42	11.08.	22:30	09:56
43	12.08.	22:57	11:15
44	13.08.	23:26	12:33
45	14.08.	23:58	13:50
46	15.08.		15:04
47	16.08.		
48	17.08.	01:19	17:17
49	18.08.	02:09	18:11
50	19.08.	03:07	18:57
51	20.08.	04:09	19:36
52	21.08.	05:15	20:08
53	22.08.	06:22	20:35
54	23.08.		
55	24.08.	07:38	21:08
56	25.08.	08:34	21:22
57	26.08.	09:38	21:44
58	27.08.	10:42	22:08
59	28.08.	11:45	22:29
60	29.08.		

► Kann man aus diesen Daten etwas Interessantes ablesen? Versuchen wir es!

# Wie verändert sich die Mondscheindauer im Laufe der Zeit ?

Arbeitsblatt 2

Gesucht ist eine Darstellung der Mondscheindauer im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Tagesnummer.

Dazu wäre es günstig, die Mondscheindauer in Dezimalschreibweise zu erhalten.

1. Wie lässt sich die Mondscheindauer mit dem Grafikrechner aus den Daten berechnen?

a) Um mit den Daten arbeiten zu können, übertrage sie als Listen auf deinen Grafikrechner. Verwende dabei nur Datensätze, für die vollständige Werte vorliegen:

L<sub>1</sub> Tagesnummer  
L<sub>2</sub> MA-Stunde  
L<sub>3</sub> MA-Minute  
L<sub>4</sub> MU-Stunde  
L<sub>5</sub> MU-Minute

b) Füge als Liste L<sub>6</sub> an die Tabelle aus Teilaufgabe a) die Differenz zwischen MU und MA an – und zwar in Dezimalschreibweise!

Formel für die Differenz  
zwischen MU und MA,  
in Dezimalschreibweise: L<sub>6</sub> „.....“

Achtung: Es kommen zwei verschiedene Fälle in den erfassten Datensätzen vor:  
Zwischen MA und MU kann ein Tageswechsel liegen oder auch nicht. Das muss in der gesuchten endgültigen Formel noch berücksichtigt werden.

Ergänze dazu eine weitere Liste D für die Mondscheindauer.

Formel für die  
Mondscheindauer,  
in Dezimalschreibweise: D „.....“

2. Veranschauliche den Zusammenhang zwischen Tagesnummer (L<sub>1</sub>) und zugehöriger Mondscheindauer (D) grafisch.

3. Wie könnte man die in der Ausgangstabelle fehlenden Daten für die Mondscheindauer sinnvoll ergänzen?

4. Welche Mondscheindauer kann man für den 30. September vorhersagen?

## Auswertung der Arbeitsblätter 1 und 2 mit dem TI-83+

Die vorgegebenen Messwerte werden im Grafikrechner als Listen eingegeben. Mit Hilfe der grafischen Darstellung – die dann überdacht und diskutiert werden sollte – lassen sich Vermutungen über den funktionalen Zusammenhang zwischen Tagesnummer und Mondscheindauer ableiten.

Die Auseinandersetzung mit dem *diskreten Definitionsbereich* „Tagesnummern“ und der *kontinuierlichen Betrachtungsweise der Funktion* „Mondscheindauer“ sowie die sich anschließende hinterfragende Interpretation der Resultate sollten bewusst geführt werden.

Der Vorschlag des Funktionstyps „Sinus“ bildet schließlich den Ausgangspunkt für die weiter unten beschriebene Anpassung der Parameter an die gegebenen Daten. Statt des Sinus könnte natürlich ebenso der Cosinus als Ausgangsvorschlag für den Funktionstyp verwendet werden, die Vorgehensweise wäre ganz entsprechend.

Wesentlich für das *aktive* Verständnis des ermittelten Zusammenhangs „Tagesnummer – Mondscheindauer“ ist es, die an die Messwerte angepasste Funktion für die Schätzung weiterer – d. h. mit ihrer Hilfe interpolierter und extrapolierter – Messwerte zu nutzen.

Die Daten-Eingabe erfolgt im STAT-Menü. Es können nur die vollständig vorliegenden Datensätze in die Listen L<sub>1</sub> bis L<sub>5</sub> mit der entsprechenden inhaltlichen Festlegung eingetragen werden, da zum einen in den Spalten keine Leerstellen erzeugt werden können, zum anderen eine grafische Veranschaulichung angestrebt wird.

Formeleingaben erfolgen im Spaltenkopf L<sub>6</sub> und im nächsten Spaltenkopf, der den Namen D erhält. Durch die Anführungsstriche bleiben die Formeln erhalten:

$$L_6 \quad „L_4 - L_2 + (L_5 - L_3)/60“$$

Befindet sich zwischen MA und MU kein Tageswechsel, so liefert die Berechnung in L<sub>6</sub> wie gewünscht die Mondscheindauer in Stunden in Dezimalschreibweise.

Befindet sich dagegen zwischen MA und MU ein Tageswechsel, so liefert die Berechnung in L<sub>6</sub> eine negative Zahl. Die Mondscheindauer erhält man in diesen Fällen durch Addition von 24 („Mitternacht“).

Diese beiden Fälle können mit einem kleinen Trick zusammengefasst werden: Der Test „Ist L<sub>6</sub> < 0?“ liefert nämlich im Falle einer wahren Aussage den Wert 1 und im Falle einer falschen Aussage den Wert 0.

Damit berechnet sich die Mondscheindauer stets durch die folgende Formel in der Spalte D:

$$D \quad „L_6 + 24 (L_6 < 0)“$$

Die folgenden Abbildungen zeigen beispielhaft die Eingabe der Daten und der beiden Formeln sowie die damit berechneten Werte.

L1	L2	L3	1	L4	L5	MA	# 6	D	#	-----	7
1	13	2		0	52	-12.17		11.833			
2	14	6		1	14	-12.87		11.133			
3	15	9		1	35	-13.57		10.433			
4	16	13		1	59	-14.23		9.7667			
6	17	45		2	24	-15.35		8.65			
7	19	19		3	29	-15.83		8.1667			
8	20	16		4	12	-16.07		7.9333			
L1(?)=8				L6 = "L4 - L2 + (L5 - L3				D = "L6 + 24 (L6 < 0)"			

## Einstellung eines geeigneten Fensters

Zur Einstellung eines geeigneten Fensters unter WINDOW wählen wir für den x-Bereich die Tagesnummern, hier also zwischen 0 und 60.

Für den y-Bereich, also für die Mondscheindauer, wählen wir den Bereich zwischen den Extremwerten  $\min(D)$  und  $\max(D)$ . Damit bietet sich die nebenstehende Fenstereinstellung an.

```
min(LD
7.916666667
max(LD
16.03333333
```

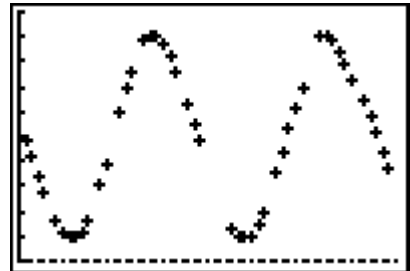
```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=60
Xscl=1
Ymin=7
Ymax=17
Yscl=1
Xres=1
```

### Grafische Darstellung der Daten

Um die Daten grafisch darstellen zu können, müssen unter STATPLOT Plot1 die Darstellungsweise Type, die zu verwendenden Listen (hier  $L_1$  und  $D$ ) und die Punktdarstellung Mark festgelegt werden.

Zu den hier gewählten Einstellungen ergibt sich dann mit GRAPH die Darstellung rechts:

```
Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Ylist:D
Mark: [ ] [ ] [ ]
```

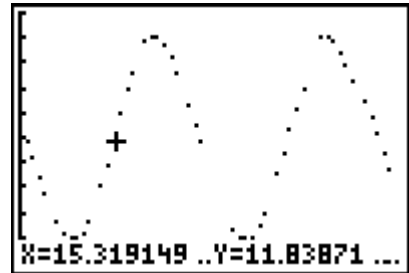
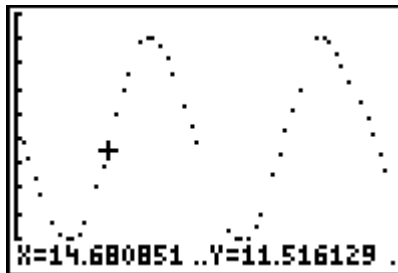


**Wie könnte man die in der Tabelle fehlenden Mondscheindauer-Daten sinnvoll ergänzen?**

Wir betrachten z. B. den 15. Tag.

#### Weg 1:

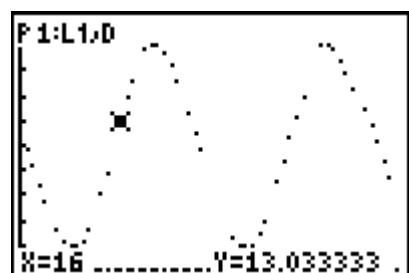
Eine Kursorbewegung im Grafikfenster durch die Pfeiltasten in etwa am Graphen entlang ermöglicht eine grobe Abschätzung von Zwischenwerten (Anzeige am unteren Rand). Ganzzahlige Argumente können mit dem Cursor allerdings meist nicht erreicht werden (vgl. die nebenstehenden Abbildungen). Für die fehlenden Daten des 15. Tages kann so eine Mondscheindauer von ca. 11,7 h, also etwa 11 Stunden und 40 Minuten geschätzt werden.



#### Weg 2:

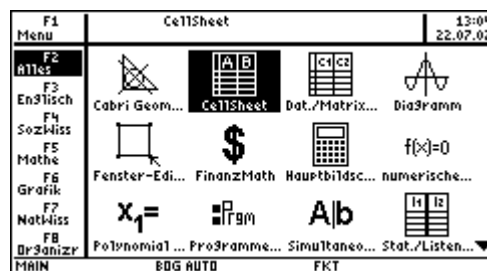
Mittels TRACE kann mit den Pfeiltasten direkt auf dem Graphen entlang gewandert werden. Allerdings können hier **keine** Zwischenwerte erreicht werden: Es stehen als x-Werte nur die Werte der Liste  $L_1$  zur Verfügung. Das ändert sich auch nicht, wenn die Punkte bei der grafischen Darstellung verbunden würden (STATPLOT Plot1 Type).

Hinweis: Damit die Cursorposition deutlich sichtbar wird, wurde hier der Darstellungsstil geändert (über STATPLOT Plot1 Mark).



## Auswertung der Arbeitsblätter 1 und 2 mit CellSheet auf dem Voyage 200

CellSheet ist eine „Mini“-Tabellenkalkulation, die als Flash-Applikation sowohl für den Grafikrechner TI-83+ als auch für die symbolischen Algebrarechner TI-89 und TI-92+ bzw. dessen Nachfolger Voyage 200 entwickelt wurde. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Auswahl der CellSheet-Applikation aus einer Vielzahl standardmäßig angebotener Applikationen auf dem Voyage 200.



Wesentliche Charakteristiken einer Tabellenkalkulation wurden in CellSheet realisiert:

- Die Zellen können folgende Typen enthalten: Zahlen, Formeln, Ausdrücke, Strings, Funktionen.
- In Formeln können absolute und relative Zellbezüge und eine große Anzahl vordefinierter Funktionen verwendet werden.
- Übliche Arbeitstechniken, wie Markieren von Zellen bzw. Bereichen, Kopieren, Einfügen, Löschen, Einfügen oder Löschen von Zeilen oder Spalten, Importieren oder Exportieren von Matrizen, Listen, Variablen, Öffnen oder Speichern von Dateien, Sortieren ausgewählter Bereiche, ... lassen sich einfach ausführen.
- Verschiedene statistische Berechnungen sind vordefiniert.
- Die Darstellung numerischer Daten mit Hilfe verschiedener Diagrammtypen wird angeboten.
- ...

Damit wurden die Möglichkeiten des STAT-Menüs des TI-83+ bzw. des DATA-MATRIX-Editors der Symbolrechner durch CellSheet deutlich erweitert.

### Daten- und Formeleingabe in CellSheet

Bei der Dateneingabe in CellSheet können alle Lücken der Ausgangstabelle in gleicher Weise übernommen werden. Jede Zelle des Tabellenblattes kann jederzeit erreicht werden.

Da wir eine grafische Veranschaulichung anstreben, verzichten wir aber auch hier auf die Eingabe unvollständig vorliegender Datensätze.

Die Eingabe einer Uhrzeit in eine Zelle führt zu einer Fehlermeldung. Als numerische Werte sind nur ganze Zahlen und Zahlen mit Dezimalpunkt zulässig. Deswegen wird hier die Dateneingabe ganz analog zu der beim Grafikrechner organisiert.

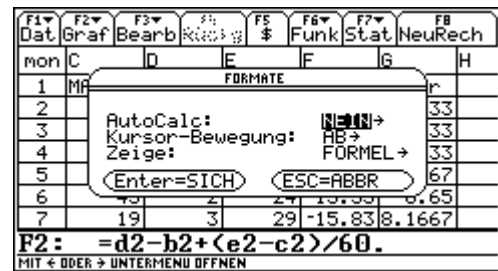
Die nebenstehenden Abbildungen zeigen die Eingabe der ersten Daten und Formeln sowie die damit berechneten Werte. Die Formeleingabe erfolgt durch Eintrag in eine Zelle. Die üblichen Arbeitstechniken Markieren, Auswählen eines Bereiches und Einfügen führen zur effizienten Eingabe der Formeln im gesamten Bereich. Dabei werden die relativen Zellbezüge realisiert. Die Formelberechnung in der Spalte F liefert eine Zahl mit Dezimalpunkt – keinen Bruch – da als Quotient die Dezimalzahl 60. verwendet wurde.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Menu	alles	Enf	Soz	Mathe	Grafik	Not	Br
1	2	3	4	5	6	7	8
Mon	A	B	C	D	E	F	
1	Nr.	MA-h	MA-min	MU-h	MU-min	Dif	
2	1	13	2	0	52	-12	
3	2	14	6	1	14	-12	
4	3	15	9	1	35	-13	
5	4	16	13	1	59	-14	
6	6	17	45	2	24	-15	
7	7	19	19	3	29	-15	

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Dat	Graf	Bearb	Rückg	\$	Funk	Stat	NeuRech
mon	C	D	E	F	G	H	
1	MA-min	MU-h	MU-min	Diff	Dauer		
2	2	0	52	-12.17	11.833		
3	6	1	14	-12.87	11.133		
4	9	1	35	-13.57	10.433		
5	13	1	59	-14.23	9.7667		
6	45	2	24	-15.35	8.65		
7	19	3	29	-15.83	8.1667		

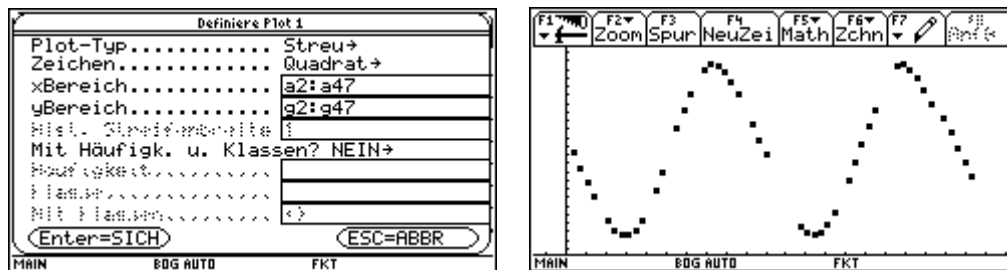
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Dat	Graf	Bearb	Rückg	\$	Funk	Stat	NeuRech
mon	C	D	E	F	G	H	
1	MA-min	MU-h	MU-min	Diff	Dauer		
2	2	0	52	-12.17	11.833		
3	6	1	14	-12.87	11.133		
4	9	1	35	-13.57	10.433		
5	13	1	59	-14.23	9.7667		
6	45	2	24	-15.35	8.65		
7	19	3	29	-15.83	8.1667		

Damit die Eingabe aller Daten und die Berechnung der Formeln in CellSheet nicht unnötig viel Zeit in Anspruch nimmt, ist darauf zu achten, dass das ständige automatische Neuberechnen innerhalb dieses Programms ausgeschaltet ist. Diese Einstellung kann im F1-Menü unter Format vorgenommen werden, siehe die nebenstehende Abbildung.



## Grafische Darstellung der Daten

Für die grafische Darstellung werden hier keine Spaltenvariablen vorgegeben, sondern es können auch Teilbereiche der eingegebenen Daten ausgewählt werden. Hier wurden zunächst alle vorhandenen Datensätze verwendet und ein entsprechender Plot definiert. Damit ergibt sich die Abbildung rechts:

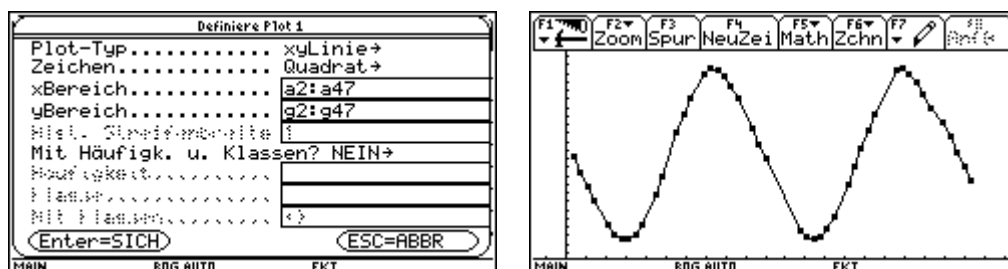


## Ist es sinnvoll, die Daten-Punkte zu einer Kurve zu verbinden?

Dazu gibt es zwei Sichtweisen – beide gilt es, deutlich zu machen:

- *Im realen Kontext* handelt es sich um Messwerte, die bezüglich des betrachteten funktionalen Zusammenhangs an diskrete natürliche Zahlen (nämlich die Tagesnummern) für den Definitionsbereich geknüpft sind. Der Definitionsbereich ist demgemäss *diskret*.
- Liegt dagegen das *Hauptaugenmerk auf der mathematischen Beschaffenheit* des funktionalen Zusammenhangs, so macht es sehr wohl Sinn, die für *kontinuierlichen* Definitionsbereich erklärte Sinusfunktion zu untersuchen. Bei der interpretierenden, abschließenden Begutachtung der an die Messwerte angepassten Sinuskurve ist dann wieder der Schritt zur Diskretisierung, d. h. zur ausschließlichen Betrachtung ganzzahliger Werte des Definitionsbereichs, zu vollziehen.

Wir erhalten eine Kurve, bei der die Datenpunkte verbunden sind, durch die folgende Einstellung:



Welche Sinuskurve verläuft in dieser Weise? Versuchen wir eine schrittweise Lösung dieser Frage auf verschiedenen Wegen.

# Welcher Sinus passt am besten ?

## Arbeitsblatt 3

1. Probiere zunächst Funktionen mit

$$y(x) = a \cdot \sin(x) + d .$$

Welche Bedeutung hat dabei  $a$  ? Welche Bedeutung hat  $d$  ?

Wie groß ist das Maximum der Mondscheindauer, wie groß ist das Minimum? Welche Bedeutung hat das für den Wert von  $a$  ? Welche Bedeutung hat es für  $d$  ?

2. Probiere jetzt Funktionen mit

$$y(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + d .$$

Welche Bedeutung hat dabei  $b$  ?

3. Bist du mit der Anpassung zufrieden? Ändere ggf. die Funktion weiter ab.
4. Wie könnte man die in der Ausgangstabelle fehlenden Daten für die Mondscheindauer sinnvoll ergänzen? Es fehlen u. a. die Mondscheindauern für den 05.07. und für die Tage 30.07. – 02.08.

Welche Mondscheindauer kann man für den 30.09. vorhersagen?

Datum	Nummer des Tages	Mondscheindauer
05.07.	5	
30.07.	30	
31.07.	31	
01.08.	32	
02.08.	33	
30.09.		



### Auswertung des Arbeitsblattes 3 mit dem TI-83+

Wir beginnen mit dem Ansatz

$$y(x) = a \sin(x) + d$$

Überlegung zu  $a$ :

Die **Amplitude** lässt sich recht einfach aus der Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten  $y$ -Wert (siehe Liste D) schätzen:

$$a = (y_{\max} - y_{\min})/2 = (16 - 8)/2 = 4.$$

Überlegung zu  $d$ :

Passendes **Verschieben** entlang der  $y$ -Achse:

$$d = y_{\min} + a = 8 + 4 = 12.$$

Hinweis: Bei der WINDOW-Einstellung vergrößern wir den  $y$ -Bereich hier etwas, damit im Grafikfenster noch Platz für die Angabe der zugehörigen Funktionsgleichung ist.

Damit ergibt sich der erste Versuch für eine möglichst passende Sinusfunktion:

Unser erster Sinus-Vorschlag  $Y_1 = 4 \sin(x) + 12$  schwingt „zu schnell“. Er „schafft“ im dargestellten Bereich 10 Schwünge, die Datenkreuze schaffen dagegen nur zwei.

Abhilfe: Wir erweitern den bisherigen Ansatz

$$y(x) = a \sin(x) + d$$

auf den allgemeineren Ansatz

$$y(x) = a \sin(b x) + d.$$

Überlegung zu  $b$ : Anpassen der **Periodenlänge**,  
Vorschlag  $b = 1/5$ :

Hinsichtlich der Frequenz ist eine deutlich bessere Annäherung der Sinuskurve an die Datenkreuze erzielt.

Nur: Die Schwingung der Datenpunkte geht zuerst nach unten, dann nach oben. Bei dieser Sinusfunktion ist es dagegen umgekehrt. – Was tun?

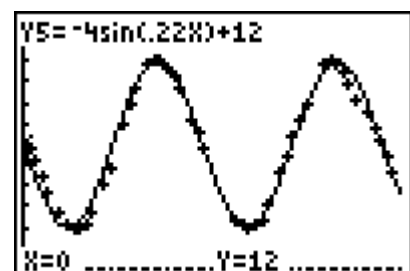
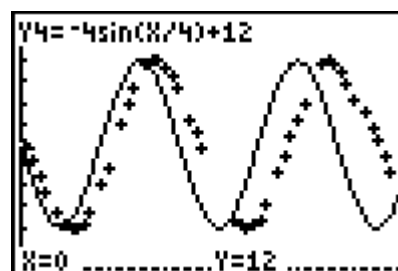
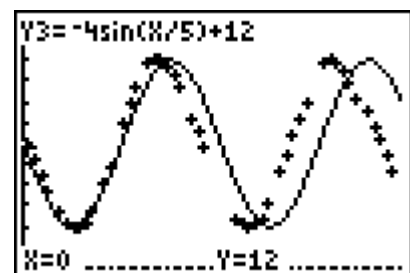
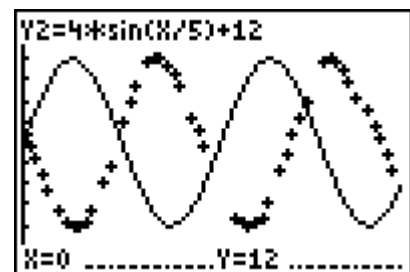
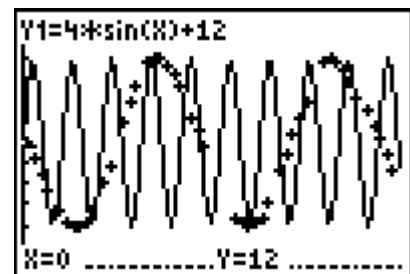
Eine mögliche Lösungsidee dazu ist **Spiegeln** – das erreicht man durch Vorzeichenänderung von  $a$  im Funktionsterm.

Es bleibt noch ein wenig **Feinanpassung** beim Wert von  $b$ , um die Periodenlänge genauer einzustellen:

Der letzte Funktionsvorschlag liefert augenscheinlich eine recht gute Annäherung an die Datenpunkte.

Wir verwenden im Weiteren deshalb

$$Y_5 = -4 \sin(0.22 x) + 12.$$



## Wie könnte man nun die in der Tabelle fehlenden Mondscheindauer-Daten sinnvoll ergänzen?

Dazu kann die Wertetabelle für  $Y_5$  verwendet werden.

Die erste Lücke in unserer Datenliste ist am 5. Tag. Weiterhin fehlen z. B. die Mondscheindauern für die Tage 30.07. – 02.08., also für die Tage mit den Nummern 30 bis 33.

Aus der Wertetabelle schlussfolgern wir für die Mondscheindauer am 05.07. ungefähr 8 Std. und 25 min., am 30.07. 10 Std. und 45 min., am 31.07. knapp 10 Std. (etwa 3 Minuten weniger) usw.

X	$Y_5$	
1	11.127	
2	10.296	
3	9.5475	
4	8.917	
5	8.43517	
6	8.1251	
7	8.0019	
$Y_5=8.43517055975$		

X	$Y_5$	
28	12.491	
29	11.613	
30	10.732	
31	9.9544	
32	9.2536	
33	8.6851	
34	8.2765	
$Y_5=10.7538345459$		

## Welche Mondscheindauer kann man für den 30. 09. vorhersagen?

Hier kann wieder das Auswerten der Wertetabelle oder des Graphen helfen, aber auch der direkte Funktionsaufruf an einer speziellen Stelle ist möglich.

Durch unsere Festlegungen hat der 30. September die Nummer 92.

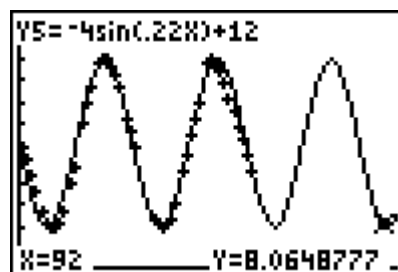
### Weg 1:

Wir können an die entsprechende Stelle der Wertetabelle schauen oder ...

X	$Y_5$	
90	8.7453	
91	8.3163	
92	8.0648772447	
93	8.0031	
94	8.1341	
95	8.4514	
96	8.9397	
$Y_5=8.06487772447$		

### Weg 2:

im Grafikenfenster TRACE mit einem (über WINDOW) erweiterten x-Bereich nutzen oder ...



### Weg 3:

direkt im Hauptbildschirm den interessierenden Funktionswert abfragen.

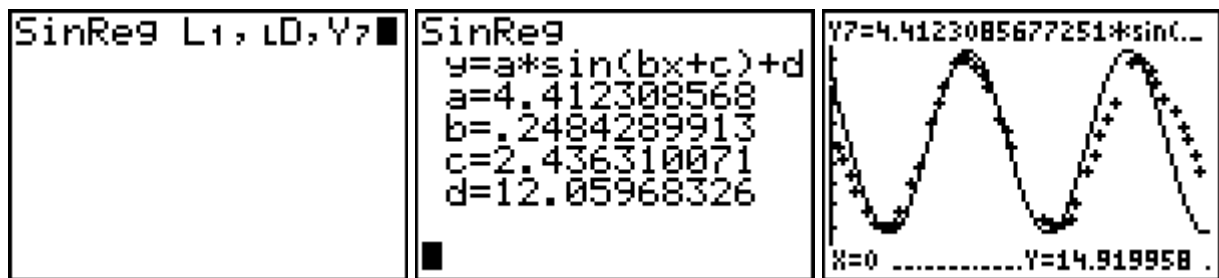
$Y_5(92)$   
8.064877724

Ergebnis: Wir erwarten also am 30. September eine Mondscheindauer von etwas mehr als 8 Stunden.

## Angebote des TI-83+ zur Kurvenanpassung

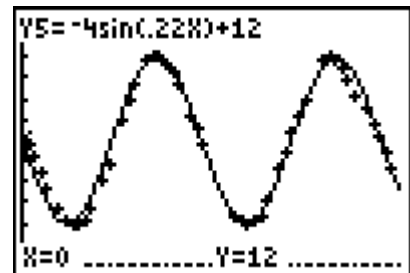
Man könnte zur Lösung auch die Möglichkeiten des TI-83+ zur direkten Kurvenanpassung (Regressionsanalyse) nutzen.

Im Menü STAT CALC gibt es u. a. die Möglichkeit, mit SinReg eine Sinus-Regression ermitteln zu lassen. Dazu sind dort die Listennamen für die  $x$ -Werte und die  $y$ -Werte (hier  $L_1$  und  $D$ ) einzugeben sowie die  $Y$ -Variable festzulegen, in der das Ergebnis der Regression gespeichert werden soll (hier  $Y_7$ ), siehe die folgende Abbildung links. Dann erhält man die vom Rechner vorgeschlagenen Parameter-Werte angezeigt und kann den Graph zu  $Y_7$  zeichnen lassen.



Es bietet sich an, den eben mit der Sinusregression SinReg des Grafikrechners ermittelten Graphen zu vergleichen mit dem von uns vorher entwickelten Vorschlag  $Y_5 = -4 \sin(0.22x) + 12$ .

Der Vergleich fällt eindrucksvoll aus und ist für alle reinen Rechner-Fans eine kleine Enttäuschung: Die Vorzüge des selbst entwickelten Kurvenvorschlags gegenüber der SinReg-Lösung des Rechners dürften – insbesondere in der ersichtlich besseren Anpassung für höhere Tagesnummern – deutlich erkennbar sein.



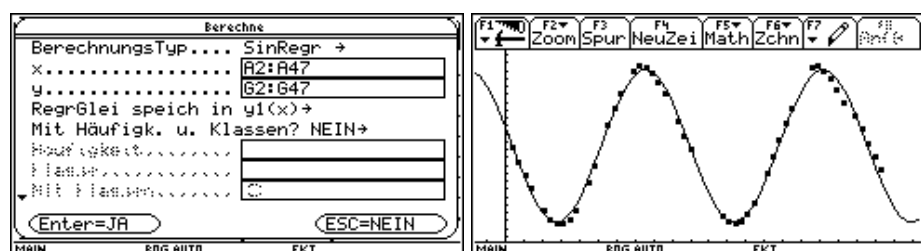
### Angebote des Voyage 200 zur Kurvenanpassung

Die Sinusregression im Stat-Menü von CellSheet eröffnet neue Möglichkeiten zum Experimentieren. Für die Regressionsanalyse werden nicht zwingend alle Daten der entsprechenden Spalten verwendet, sondern nach Wunsch auch nur Teilbereiche. Es kann interessant sein, verschiedene Datenbereiche für eine Regressionsanalyse zu verwenden und dabei folgende Fragen zu untersuchen:

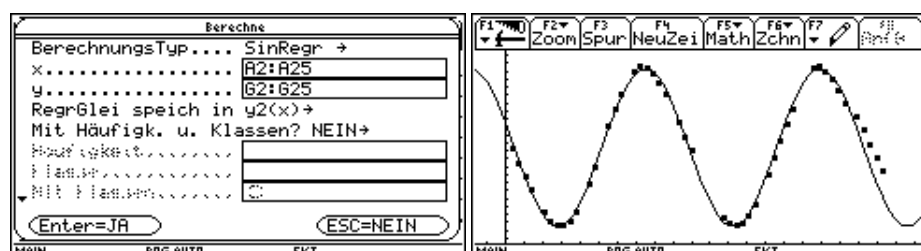
- Hat der Umfang der verwendeten Daten Einfluss auf das Ergebnis der Sinusregression?
- Wir wählen verschiedene Bereiche für die x-Werte, aber jeweils gleich viele Wertepaare. Liefert die Sinusregression unterschiedliche Ergebnisse?
- Wir wählen verschiedene Bereiche für die x-Werte mit jeweils gleicher Intervalllänge, die sich aus der Differenz des größten und des kleinsten x-Wertes ergibt. Welche Ergebnisse werden deutlich?
- Wie lassen sich die Ergebnisse interpretieren?

Hier eine Auswahl verschiedener Untersuchungen:

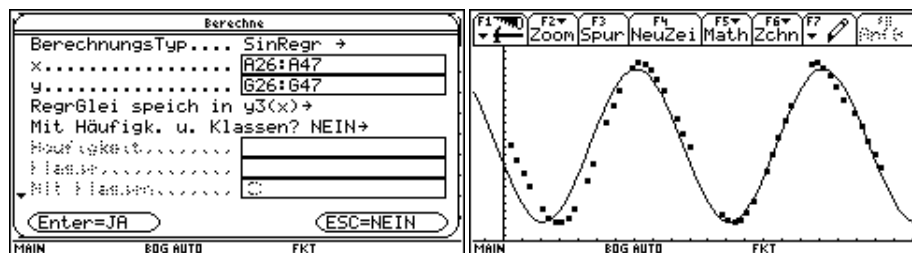
Zunächst werden alle Daten verwendet und das Ergebnis der Regression in  $y1(x)$  gespeichert. Die grafische Veranschaulichung verdeutlicht eine gute Kurvenanpassung.



Die Verwendung der ersten Hälfte des entsprechenden x-Intervalls liefert auch ein akzeptables Ergebnis. Die Kurvenanpassung im verwendeten Intervall ist besser als im benachbarten Bereich.



Wenn die restlichen Wertepaare ausgewertet werden, gelingt in dem Bereich eine besonders gute Kurvenanpassung.



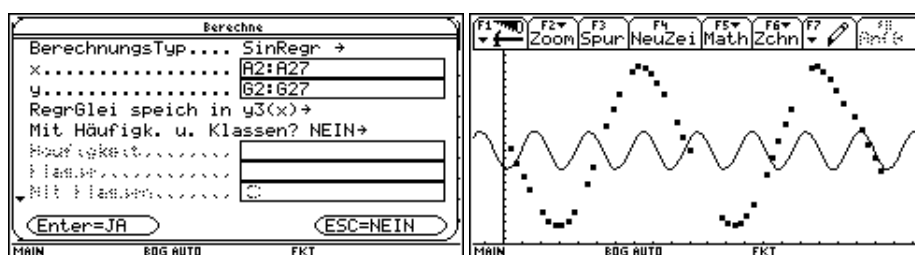
Die obigen Regressionsgleichungen wurden in den Variablen  $y1(x)$ ,  $y2(x)$  bzw.  $y3(x)$  gespeichert. In der nebenstehenden Abbildung erhalten wir zusammenfassend einen Überblick über diese Funktionsterme im Hauptbildschirm des Rechners.

$y1(x)$   
 $3.91155 \cdot \sin(.225258 \cdot x + 2.92288) + 11.96$   
 $y2(x)$   
 $4.00662 \cdot \sin(.229879 \cdot x + 2.85442) + 11.92$   
 $y3(x)$   
 $3.8821 \cdot \sin(.215282 \cdot x - 2.87655) + 11.8662$   
 $y3(x)$

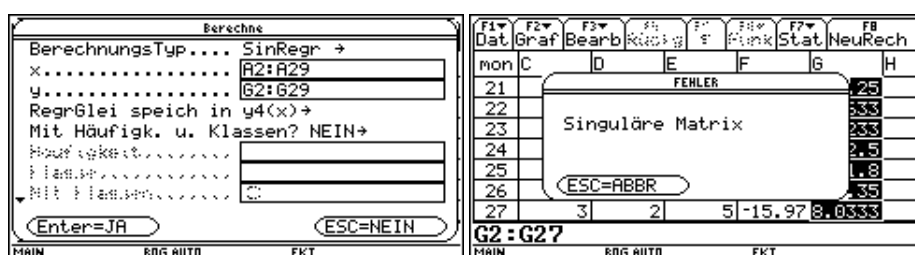
### Kleine Änderung – große Wirkung

Kleine Änderungen im verwendeten Bereich können jedoch zu überraschenden Ergebnissen führen. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen jeweils den ausgewählten Bereich. Daneben sind Ergebnisse von SinRegr zu sehen.

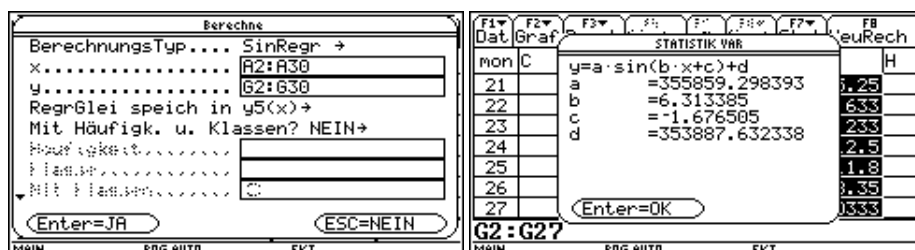
Im ersten Beispiel wird die errechnete Funktion gemeinsam mit den Datenpunkten grafisch veranschaulicht. Eine Kurvenanpassung gelingt offensichtlich nicht.



Im zweiten Beispiel wird die Berechnung mit dem Hinweis „Singuläre Matrix“ abgebrochen. Das weist auf die komplexen numerischen Probleme hin, die hier zu bewältigen sind.



Auf die grafische Veranschaulichung der ermittelten Funktion für das dritte Beispiel wurde verzichtet. Es genügt, die Parameter a und d zu betrachten.



Hier nun die zu diesen drei Beispielen gehörenden Funktionsterme als Ergebnis von SinRegr:

$y3(x)$   
 $.96244 \cdot \sin(.739263 \cdot x - 1.92922) + 11.7859$   
 $y4(x)$   
 $355859 \cdot \sin(6.31338 \cdot x - 1.67651) + 35388$   
 $y5(x)$

Sicherlich ist es wünschenswert, stets korrekte Ergebnisse von einem Rechner zu erhalten. Allerdings können diese Beispiele auch den kritischen Umgang mit Computerprogrammen unterstützen. Bei diesen Beispielen ist die Fehlerhaftigkeit der Rechnerergebnisse augenscheinlich – zum Glück.

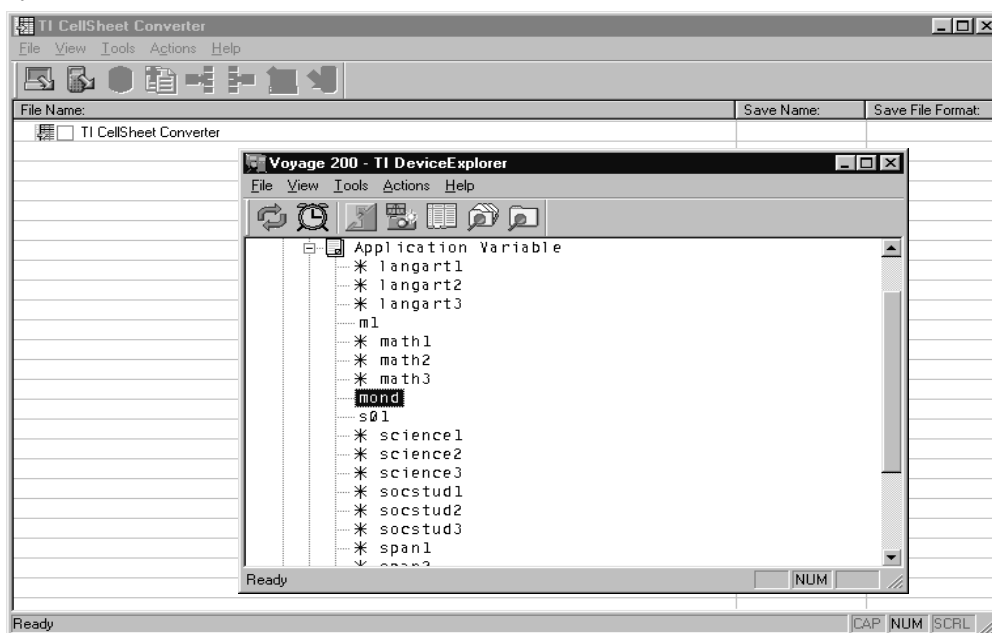
Die Lösung umfangreicher Gleichungssysteme – die Aufgabenstellung also, die sich hinter der Regressionsanalyse verbirgt – stellt nicht nur für Kleinrechner, sondern auch für wesentlich leistungsfähigere Computeralgebrasysteme mitunter ein sehr schwieriges Problem dar, das auch dort zu Fehlern führen kann.

## Datenaustausch zwischen CellSheet und Excel

Die „Mini“-Tabellenkalkulation CellSheet kann einige Erwartungen an eine Tabellenkalkulation erfüllen, andere Wünsche bleiben offen. Durch einen Datenaustausch mit entsprechender PC-Software können Ergänzungen auf verschiedenen Gebieten angestrebt werden:

- beim Leistungsumfang,
- bei der grafischen Veranschaulichung,
- bei der Interaktion,
- ...

Unter Verwendung der Software *TI CellSheet Converter* ist ein einfacher Austausch von Arbeitsblättern zwischen CellSheet, Excel und anderen Tabellenkalkulationen über den PC und den Macintosh möglich. In der nachfolgenden Abbildung wurde als Datenquelle im *TI CellSheet Converter* der Voyage 200 gewählt und bei korrekter Kabelverbindung zwischen PC und Symbolrechner stehen alle interessierenden Dateien zum Transfer auf den PC zur Verfügung.



Wir wählen die auf dem Voyage 200 vorliegende Datei **mond** aus und kopieren diese auf den PC. Nach Konvertieren in das Excel-Format und Abspeichern kann schließlich in Excel die zugehörige Datei geöffnet werden. Hier ein Ausschnitt aus der entsprechenden Datei:

Microsoft Excel - main.mond.xls													
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ?													
Arial 10													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	Nr.	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"						
2	1	13	2	0	52	=d2-b2+(e2-c2)/60.	=when(f2<0,f2+24,f2)						
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0,F3+24,F3)						
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0,F4+24,F4)						
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0,F5+24,F5)						
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0,F6+24,F6)						
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0,F7+24,F7)						

Die Formeln in den Spalten F und G werden nicht berechnet, sondern wie Text behandelt. Es müssen noch einige *Anpassungen per Hand* vorgenommen werden.

In der Spalte F ist der Dezimalpunkt vorhanden. Das Löschen des Dezimalpunktes ist hier leicht möglich und führt zu einer korrekten Berechnung der Formel in Excel. Dieses Beispiel zeigt jedoch, dass alle Zellen, die in CellSheet Zahlen mit Dezimalpunkt enthalten, beim Konvertieren in Excel zu Problemen führen. Der Dezimalpunkt in der Zahlendarstellung von CellSheet wird bedauerlicherweise nicht in das Komma der Zahlendarstellung von Excel konvertiert.

Die Bezeichnungen der vordefinierten Funktionen und die zugehörigen Trennzeichen werden beim Konvertieren „noch“ nicht angepasst. Es ist notwendig, die Bedingung „when“ (CellSheet) durch „WENN“ (Excel) zu ersetzen, die beiden Kommas durch Semikolons.

Microsoft Excel - main.mond.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L13										
1	Nr.	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"			
2	1	13	2	0	52	=D2-B2+(E2-C2)/60	=WENN(F2<0;F2+24;F2)			
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0;F3+24;F3)			
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0;F4+24;F4)			
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0;F5+24;F5)			
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0;F6+24;F6)			
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0;F7+24;F7)			

Microsoft Excel - main.mond.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
J13												
1	Nr.	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"					
2	1	13	2	0	52	-12,16666667	11,83333333					
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0;F3+24;F3)					
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0;F4+24;F4)					
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0;F5+24;F5)					
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0;F6+24;F6)					
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0;F7+24;F7)					

Damit sind die hier entstandenen Probleme gelöst. Durch die üblichen Arbeitstechniken Kopieren, Markieren und Ausfüllen gelingt die Anpassung in allen Zellen recht schnell. Der zeitaufwändige Arbeitsabschnitt bei einer Tabellenkalkulation – die Dateneingabe – konnte ohne „Nachbesserung“ auf dem PC genutzt werden.

## Steuerelemente zur dynamischen Kurvenanpassung in Excel

Nun stehen weitere Möglichkeiten zur Visualisierung einer schrittweisen Kurvenanpassung zur Verfügung. Mit Hilfe der Steuerelemente-Toolbox können Schieberegler zur Variation der Parameter definiert werden. Die nachfolgende Abbildung zeigt, wie für den Parameter a ein „scrollen“ über 401 Werte (vgl. die Eigenschaften der ScrollBar – Max 400, Min 0) im Intervall [2;6] (vgl. die Formel in der Zelle I4 mit dem Bezug auf I9 – „LinkedCell“ der ScrollBar) realisiert wurde. Analoges gilt für die Parametervariation von b, c und d. (vgl. die Formeln in J4, K4 und L4).

Microsoft Excel - mond.xls

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	MU_Min.	Differenz	Mondscheindauer		$y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$				x	y
2	52	=D2-B2+(E2-C2)/60	=WENN(F2<0; F2+24;F2)						1	=(\$I\$4*SIN(\$J\$4*M2+\$K\$4)+\$L\$4
3	14	=D3-B3+(E3-C3)/60	=WENN(F3<0; F3+24;F3)						=M2+0,5	=(\$I\$4*SIN(\$J\$4*M3+\$K\$4)+\$L\$4
4	35	=D4-B4+(E4-C4)/60	=WENN(F4<0; F4+24;F4)		a	b	c	d	=M3+0,5	=(\$I\$4*SIN(\$J\$4*M4+\$K\$4)+\$L\$4
5	59	=D5-B5+(E5-C5)/60	=WENN(F5<0; F5+24;F5)		=2+I9/100	=2+J9/100	=K9/100	=10+L9/100		
6		=D6-B6+(E6-C6)/60								
7	24	=D7-B7+(E7-C7)/60	=WENN(F7<0; F7+24;F7)							
8	29	=D8-B8+(E8-C8)/60	=WENN(F8<0; F8+24;F8)							
9	12	=D9-B9+(E9-C9)/60	=WENN(F9<0; F9+24;F9)							
10	3	=D10-B10+(E10-C10)/60	=WENN(F10<0; F10+24;F10)							
11	2	=D11-B11+(E11-C11)/60	=WENN(F11<0; F11+24;F11)							
12	9	=D12-B12+(E12-C12)/60	=WENN(F12<0; F12+24;F12)							
13		=D13-B13+(E13-C13)/60								

Eigenschaften

ScrollBar1 ScrollBar

Alphabetisch Nach Kategorien

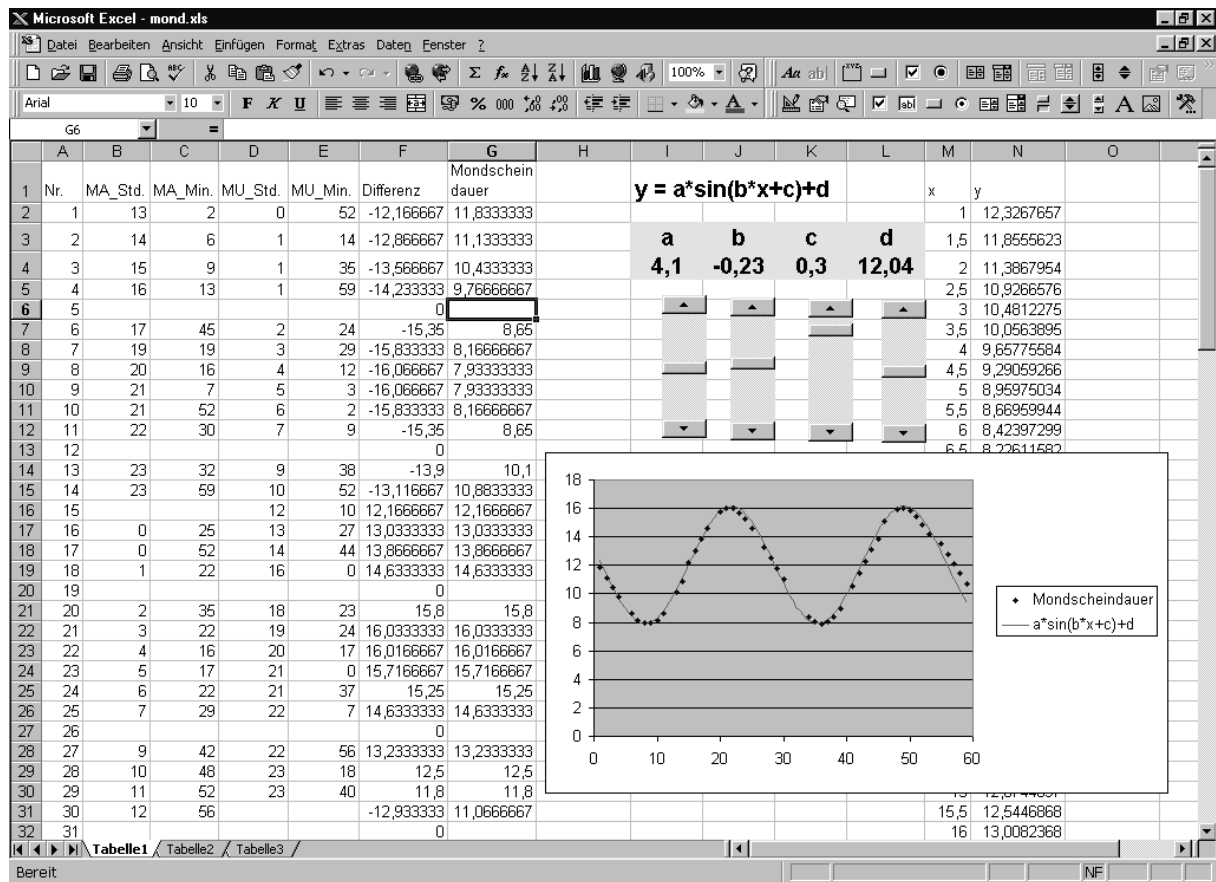
LinkedCell I9

Locked True

Max 400

Min 0

Die grafische Veranschaulichung im Diagramm und die Wertetabelle in den Spalten N und M spiegeln die sich dynamisch ändernden Einstellungen für die Parameter wider.



#### Bildnachweis:

- 1) NASA-Aufnahme eines Astronauten auf der Mondoberfläche, J. Orear, Physik, München 1982, S. 87.
- 2) Greenwich-Observatory. 300 Years of astronomy, ed. C. Roman, Times Newspapers 1975, S. 14 / Geschichte der Naturwissenschaften Leipzig 1987, S. 249.

#### Literaturtipp:

- 1) W. Herget, E. Malitte, K. Richter [2002]: Der Mond ist aufgegangen ... In: W. Herget, E. Lehmann (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83 / -89 / -92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel Verlag.