Sind Münzen fair?

Andreas Pallack

Münzen sind keine genormten Metallscheiben: Sie weichen von der Zylinderform ab. Kann man das zu seinem Vorteil nutzen wenn es darum, geht per Münze etwas zu entscheiden? Oder anders: Ist es bei einer 2 € Münze günstiger Kopf oder Zahl zu wählen? *Wie kann man herausfinden, ob eine Münze fair ist oder eben nicht?*

Ein erster Zugang: Münzenwerfen

Schülerinnen und Schüler, die noch keine vertieften Kenntnisse im Bereich der Stochastik haben, beantworten diese Frage häufig so: „Wenn die Münze fair ist, dann sollte Kopf und Zahl gleich oft fallen.“ Das kann man ausprobieren: Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler eine Münze aussuchen (evtl. bietet man ihnen auch eine Unterlegscheibe an, die man mit Z und K beschriftet), die aus ihrer Sicht fair ist. Damit dieser Versuch nicht ausartet, sollte man sich auf eine angemessene Anzahl von Würfen einigen, z. B. 50. In Gruppen sollen die Lernenden nun zählen, wie oft „Zahl“ insgesamt fällt. Das Ergebnis von vier Gruppen (a, b, c, d) könnte z. B. so aussehen:

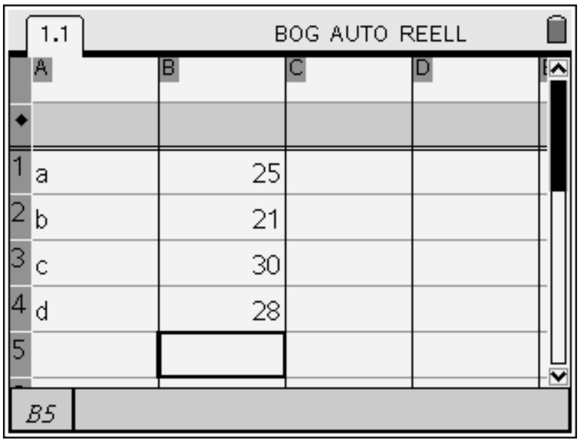

Abb.1

Tatsächlich wurde in einem Fall „Zahl“ genauso oft wie „Kopf“ geworfen. Sind die Münzen der anderen Gruppen deswegen aber nicht fair? Überspitzt kann man die oben vorgestellte Schüleraussage auch auf den Fall N = 2 übertragen: Eine Münze ist fair, wenn beim zweimaligen Wurf einmal Kopf und einmal Zahl auftritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist schnell berechnet: Diese Gleichverteilung kann nur in 50 % der Fälle erwartet werden. Alle Zahlen des o. g. Experiments sind durchaus plausibel aber es fällt mir schwer daraus abzulesen, ob die verwendeten Münzen tatsächlich fair sind. Bedeutet das, dass man überhaupt nicht entscheiden kann, ob eine Münze fair ist oder nicht?

Der Computer würfelt mit

Mit Hilfe von TI-Nspire™ kann man Münzwürfe simulieren. Der Befehl randint(0,1) gibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % die 0 und entsprechend auch mit 50 % die 1 zurück. Ergänzt man noch einen dritten Parameter, nämlich die Anzahl der Würfe, so wird eine Liste mit Nullen und Einsen erstellt, in diesem Fall eine Liste der Länge 50.

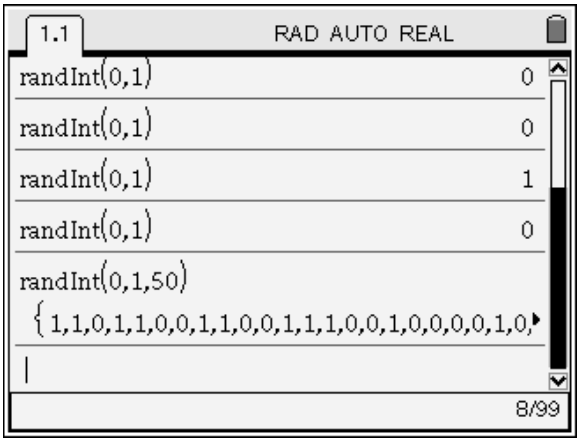

Abb.2

Diese Liste in Abb.2 kann z. B. wie folgt gelesen werden: Im ersten Fall wurde Zahl (=1) geworfen, im zweiten Zahl (=1), im Dritten Kopf (=0) ... . Interessiert man sich nun dafür wie oft Zahl gefallen ist, so müssen lediglich die Elemente der Liste aufaddiert werden:

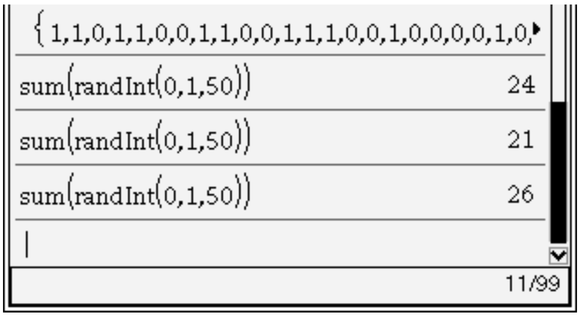

Abb. 3

Damit lässt sich der Versuch eine faire Münze 50mal zu werfen beliebig oft wiederholen.

Eine Entscheidungsregel finden

Beim 50-maligen Werfen einer fairen Münze und dem Zählens des Auftretens von „Zahl“ kann jedes Ergebnis von 0 bis 50 auftreten. Manche Ergebnisse sind eben nur wahrscheinlicher als andere. Um überhaupt etwas aussagen zu können, benötigt man also eine Entscheidungsregel ab welcher oder bis zu welcher Anzahl von geworfenen „Zahl“ man nicht mehr von einer fairen Münze sprechen möchte. Diese Festlegung ist immer ein wenig willkürlich. Eine mögliche Entscheidungsregel wäre: Die faire Münze wird von jeder Gruppe nicht 50-mal, sondern jeweils 40-mal 50-mal geworfen. Alle Ergebnisse die auftreten werden als „realistischer Ausgang“ dieses Experiments akzeptiert. Eine Münze ist entsprechend nicht fair, wenn die Anzahl der geworfenen „Zahl“ über oder unter denen der fairen Münze liegt.

Eine größere Versuchsreihe

Wir führen das Experiment hier mit dem Rechner durch. Im ersten Schritt wird der Befehl =sum(randint(0,1,50)) in die ersten 160 Zeilen der Spalte B geschrieben. Anschließend werden die Gruppenbezeichnungen a, b, c, d ebenfalls kopiert. Die Spalten werden mit „gruppe“ bzw. „anzahl“ bezeichnet.

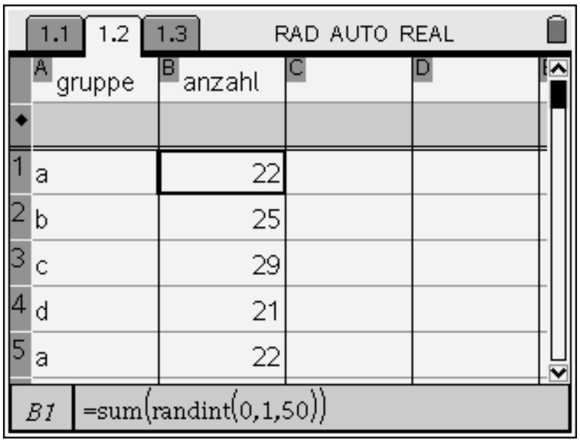

Abb. 4

Diese Tabelle kann wie folgt gelesen werden: Gruppe a hat im ersten Durchgang insgesamt 22-mal „Zahl“ geworfen, im zweiten ebenfalls. Gruppe b hat im ersten Durchgang 25, …

Mit der Applikation Data & Statistics kann man sich einen Überblick über diese Daten verschaffen:

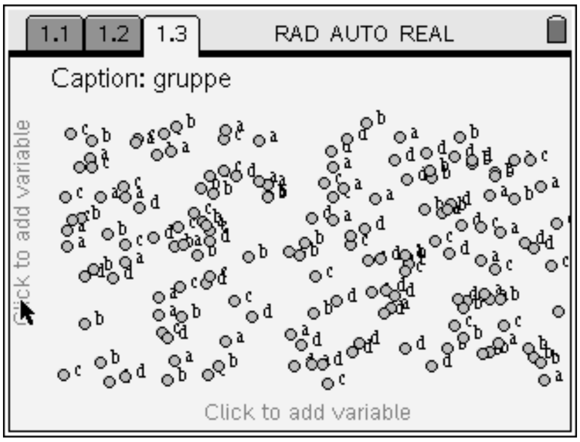

Abb. 5

Zieht man diese noch ungeordneten Daten an eine der Bildschirmseiten, so kann man sich im ersten Schritt überzeugen, dass tatsächlich jede Gruppe gleichhäufig gewürfelt hat:

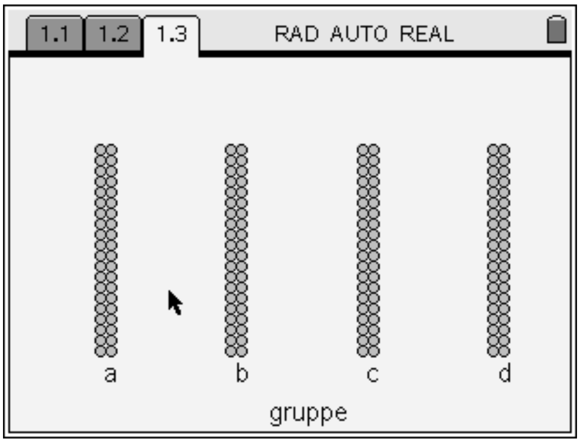

Abb. 6

Interessanter sind natürlich die erzielten Ergebnisse des Experiments. Hierzu wird schlicht die Variable „anzahl“ an der Vertikalen angegeben.

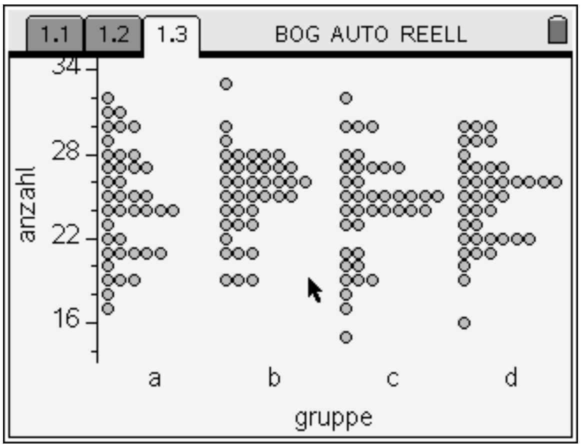

Abb. 7

Jeder Punkt repräsentiert einen Versuchsausfall. Einen noch besseren Überblick liefern Boxplots:

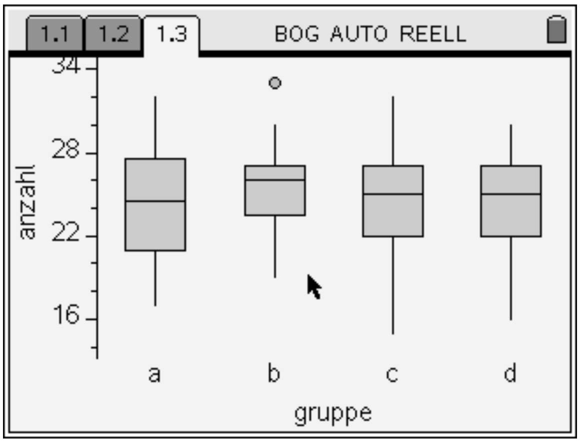

Abb. 8

Oberhalb und unterhalb der Boxen (das sind die Rechtecke) liegen jeweils 25 % der Werte. Der Strich in der Box gibt den Median an. Die Graphik zeigt: Die Gruppen kämen zu unterschiedlichsten Entscheidungsregeln: Gruppe a würde das Intervall [17, 32], Gruppe b [19, 33], Gruppe c [15, 32] und Gruppe d [16, 30] akzeptieren. Die Simulation zeigt: Dieses Experiment würde auch zu keinem befriedigendem Ergebnis führen. Auf dieser Basis müsste man alle Anzahlen von 15 bis einschließlich 33 zulassen. Dieses Ergebnis entspricht aber noch nicht einmal der Symmetrie der Situation: Das Entscheidungsintervall sollte ja zum, Erwartungswert 25 symmetrisch liegen. Entsprechend ist es gut, dass man sich nur der Simulation gewidmet hat, die Durchführung des Experiments hätte wohl unnötig Zeit verschlungen.

Die Fallzahl nochmals erhöhen

Wir erhöhen die Fallzahl nochmals, um einen besseren Überblick über den Ausfall unseres Experiments (des 50-fachen Wurfs einer fairen Münze) zu bekommen und führen das Experiment nun 1 000-mal durch.

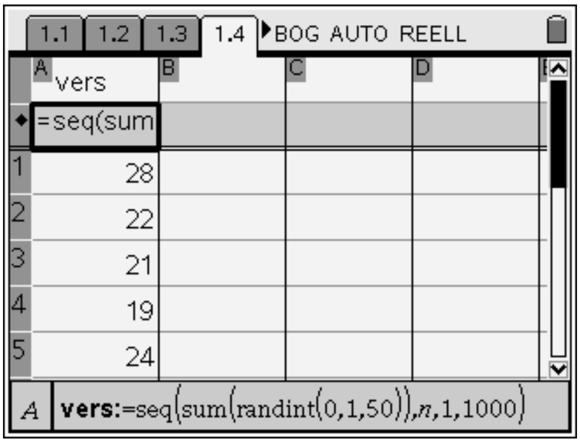

Abb. 9

Die Visualisierung der Daten in Form eines Häufigkeitsdiagramms ergibt:

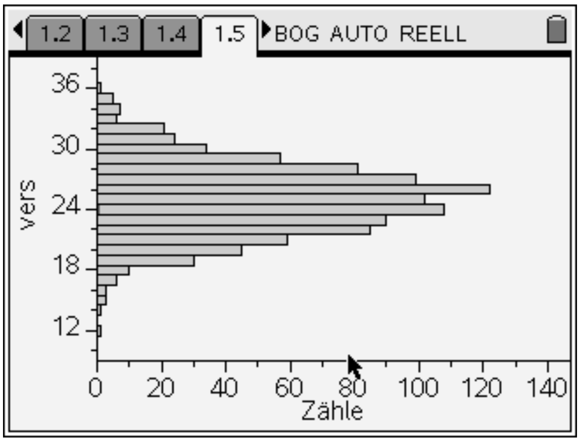

Abb. 10

Die Werte streuen von 12 bis 36. Auffällig hier: 12 scheint ein Ausreisser zu sein; die Anzahl 13 taucht überhaupt nicht auf. Das legt nahe, extreme Werte auszuschließen. Eine mögliche Konvention wäre 1 % der extremsten Werte (also die 5 niedrigsten und die 5 höhsten) zu streichen. Wie viele Punkte sich in den einzelnen Säulen befinden kann man mit Hilfe des Zeigers abfragen.

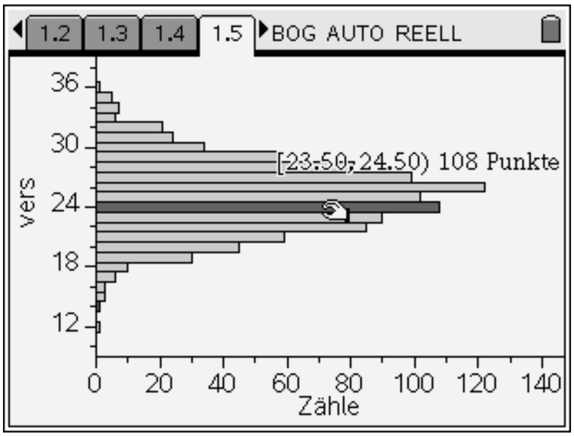

Abb. 11

Hieraus ergäbe sich, dass Werte von 16 bis 35 akzeptiert würden. Auch dieses Experiment (nur zur Erinnerung: es handelt sich um den 1 000-fachen 50-fachen Wurf einer Münze, also insgesamt um die Simulation von 50 000 Würfen) kann man wiederholen. Es ergab sich das Intervall [15, 34]. Weitere Wiederholungen zeigen: Dieses Ergebnis ist recht stabil, der untere Wert fällt nie unter 15 und der obere nie über 35.

Folgerung

Wenn man eine Münze 50-mal wirft und „Zahl" 15 bis 35-mal fällt, so liegt es nicht nahe, dass es sich um eine nicht faire Münze handelt. Fällt „Zahl" hingegen weniger oft oder häufiger liegt der Verdacht nahe, dass diese Münze nicht fair ist, denn nur in 1 % der Fälle tritt ein solches Ergebnis beim Wurf mit einer fairen Münze auf.

Vergleich mit der Theorie

Theoretischer Hintergrund ist die Binomialverteilung, da die Wahrscheinlichkeit für jeden Wurf gleich ist und die Würfe jeweils stochastisch unabhängig voneinander sind. Nachrechnen ergibt, dass das Ergebnis des 50-fachen Wurfes einer fairen Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % im Intervall [16,34] liegt.

Didaktischer Kommentar

Das hier vorgestellte Vorgehen ist zwar etwas holzschnittartig, jedoch bekommen Schülerinnen und Schüler so ein Gefühl dafür was es bedeutet, bei Zufallsexperimente Grenzen zu ziehen und Entscheidungen zu treffen. Es wird deutlich, an welcher Stelle Entscheidungen getroffen werden mussten, die nicht vollends rational begründbar sind.

Die hier simulierte Situation (es wird nur eine begrenzte Anzahl von Einzelversuchen – hier 50 – durchgeführt) entspricht in vielerlei Hinsicht der Realität: Es kann z. B. immer nur eine begrenzte Anzahl Personen befragt werden. Trotzdem liegt es – vor allem wenn Schülerinnen und Schüler bereits das Gesetz der großen Zahlen kennengelernt haben – nahe, dass unmittelbar vorgeschlagen wird die Anzahl der Würfe drastisch zu erhöhen. An dieser Stelle bietet es sich an das Experiment zu durchdenken und bereits zu einem frühen Zeitpunkt zu überlegen, ob die Erhöhung der Anzahl der Versuche im Einzelexperiment (es wird z. B. nur einmal 1 000-mal gewürfelt) tatsächlich einen Beitrag zur Entscheidungsfindung liefert.

Das Beispiel kann sowohl zum Ende der Sekundarstufe I, aber auch in der Sekundarstufe II zum Einstieg in die beurteilende Statistik eingesetzt werden.

Autor:
Dr. Andreas Pallack, Soest (D)
andreas@pallack.de