Materialien für TI-Nspire™ CAS Handheld,
TI-Nspire™ CAS Software

Benno Frei, René Hugelshofer, Robert Märki

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Dynamisch und CAS-gerecht

- Für Gymnasien (9./10. Schuljahr) und höhere Berufsschulen
- Reichhaltige Auswahl von Aufgaben und Anwendungsbeispielen, kurze Theorie
- Transformationen von Funktionen, Umgang mit Parametern
- Extremwertaufgaben

Texas Instruments

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

Benno Frei
René Hugelshofer
Robert Märki

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Dynamisch und CAS-gerecht

Bildnachweis:
S. 11 Kornhausbrücke (R. Marki); S. 13 Flugschau (R. Hugelshofer);
S 15 Francois Viete (Public Domain); S 27 Motorradfahrer (Keystone, Tom Luthi);
S. 28 Basketball (R. Hugelshofer); S. 30 Golfspieler (R. Hugelshofer);
S. 54 Pierre Fermat (Public Domain).

Vorwort

Die vorliegende Unterrichtssequenz „Quadratische Funktionen und Gleichungen“ vermittelt eine CAS-gerechte Behandlung dieses Themas (CAS=Computer Algebra System). Diese Publikation enthält nebst kurzen theoretischen Einschüben vor allem eine reiche Auswahl von Aufgaben von verschiedenem Schwierigkeitsgrad so wie viele Anwendungen aus verschiedenen Gebieten. Die Unterrichtssequenz eignet sich deshalb für verschiedene Ausbildungstypen und Leistungsniveaus wie auch für einen differenzierten Unterricht. Die Lehrperson kann gemäss Lehrplan und Interesse der Studierenden die geeigneten Themen und Aufgaben auswählen.
In Mathematik und Naturwissenschaften spielen Parameter eine wichtige Rolle. Die Variation von Parametern führt zu einer dynamischen Betrachtungsweise der Mathematik. Der Wechsel zwischen graphischer Veranschaulichung mit Hilfe von Geometriewerkzeugen und der konkreten Lösung mit CAS erweist sich dabei als sehr motivierend und effizient für den Lernprozess.
Quadratische Gleichungen und Funktionen eignen sich vom didaktischen Standpunkt aus besonders gut für einen CAS-gerechten Unterricht. Sie erlauben eine exakte algebraische Lösung, welche es ermöglicht, den Einfluss der Parameter algebraisch und nicht nur numerisch und graphisch zu studieren. Dies ist bei Gleichungen höheren Grades nicht oder nur höchst unübersichtlich, eingeschränkt und kompliziert möglich. Darüber hinaus haben quadratische Funktionen und Gleichungen ein sehr breites und vielfältiges Anwendungsspektrum, welches erfahrungsgemäss die Studierenden besonders gut anspricht und sich stark motivationsfördernd auswirkt. Die genannten Gründe rechtfertigen es, dass dieses Thema sehr ausführlich und gründlich behandelt wird.

In Kapitel 1 liegt der Schwerpunkt auf den Transformationen im Koordinatensystem. Hier verhelfen geometrische Werkzeuge wie z.B. Schieberegler zu einer schnellen Veranschaulichung und dank CAS können die Rechnungen auf ein vernünftiges Mass reduziert werden.
In Kapitel 2 werden zunächst Symmetrie, Nullstellen, allgemeine Lösung und Scheitelpunkt von Hand und mit Rechnermethoden behandelt. Letztere Methoden werden dann verallgemeinert zur „Tangentenmethode“, mit der viele Berührungsprobleme elementar (und oft einfacher als mit Differentialrechnung) gelöst werden können.
In Kapitel 3 werden die Transformationen auf implizite Funktionen ausgedehnt. Hier kann die Symmetrie der verschiedenen Transformationen (Verschiebung und Streckung in Richtung beider Achsen) besonders schön gezeigt werden.
In Kapitel 4 werden Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen mit verschiedenen Methoden gelöst. Auch Beispiele, welche auf diesem Schulniveau nur mit grafischen Methoden gelöst werden können, wurden eingefügt, besonders auch für berufsorientierte Ausbildungstypen, bei denen oft keine Differentialrechnung unterrichtet wird.

Alle Aufgaben und Lösungen sind als TI-Nspire™ Dateien verfügbar. Die Aufgabendateien ermöglichen das individuelle Arbeiten mit elektronischen Arbeitsblättern. Die Lösungsdateien zeigen wie die Aufgaben CAS-gerecht gelöst werden können.
Diese Dateien finden Sie auf der **TI-Materialdatenbank** unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Inhaltsverzeichnis

1 Die quadratische Funktion, Parabeln

1.1 Die Quadratfunktion und ihre Vielfachen

Definition:

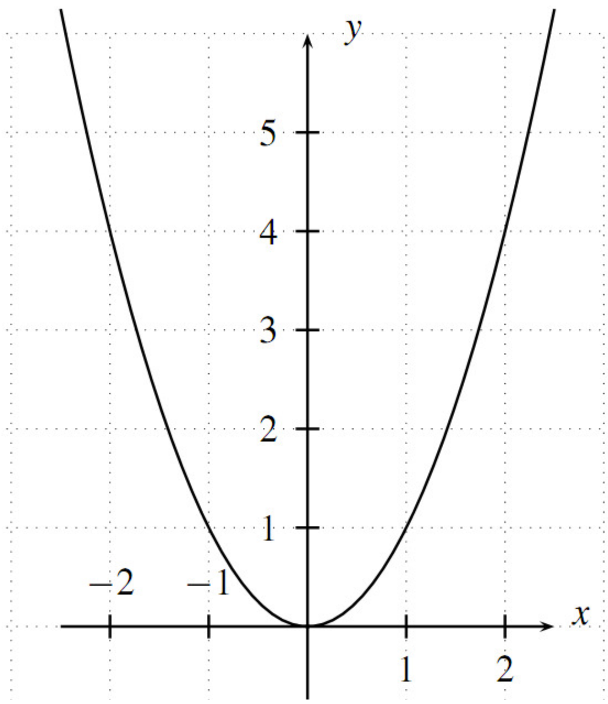
Wird jedem Wert aus einem Definitionsbereich eindeutig sein Quadrat $y = x^2$ zugeordnet, dann heisst diese Zuordnung *Quadratfunktion*.
Schreibweise: $x \mapsto y = x^2$ oder $x \mapsto f(x) = x^2$.

Oft spricht man nur kurz von der Funktion $f(x) = x^2$ oder der Kurve mit der Gleichung $y = x^2$.

Stellt man die Quadratfunktion $x \mapsto y = x^2$ numerisch und graphisch dar, dann erhält man:
Wertetabelle:

x	-2	-1.5	-1	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	1	1.5	2
$y = x^2$	4	2.25	1	0.36	0.16	0.04	0	0.04	0.16	0.36	1	2.25	4

Graph:



Graph der Funktion $x \mapsto y = x^2$

Der Scheitelpunkt

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit dem Graphen heisst *Scheitelpunkt* oder kurz *Scheitel* der Parabel.
Der Graph von $x \mapsto y = x^2$ heisst *Normalparabel* mit dem Scheitel $S(0 \mid 0)$.

Aufgabe 1.1

Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto y = x^2$. Liegen die Punkte $P(3.5 \mid 12.5)$ und $Q(2.5 \mid 6.25)$ auf dem Graphen? Prüfe durch Rechnung. Wie gross ist t, wenn der Punkt $R(3.1 \mid t)$ auf dem Graphen liegt?

Aufgabe 1.2

a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto y = x^2$ fett (Normalparabel). Zeichne sodann die Graphen der Funktionen $x \mapsto y = ax^2$ in dasselbe Koordinatensystem für $a = 2; 4; -2; -4$. Vergleiche die Graphen dieser Funktionen mit der Normalparabel und notiere die Beobachtung.

b) Zeichne auch die Graphen der Funktionen $x \mapsto y = ax^2$ mit $a = \frac{1}{4}$ und $a = -\frac{1}{4}$.
Beschreibe nun allgemein, wie der Faktor a die Form der Parabel beeinflusst.

c) Mit TI-Nspire™: Fahre mit dem Zeiger auf die Normalparabel $y = x^2$ (nicht in der Nähe des Scheitelpunkts). Der Zeiger verwandelt sich in einen schiefen Doppelpfeil. Packe die Kurve und bewege den Zeiger. Die Kurve verändert sich und gleichzeitig auch die Funktionsgleichung. So kann die Normalparabel z.B. in die Graphen aus b) transformiert werden.

Die gewonnenen Erkenntnisse fassen wir zusammen (ergänze die Lücken im Text!):

SATZ:

Der Graph der Funktion $x \mapsto y = ax^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto y = x^2$ durch Strecken in ...... -Richtung mit dem Faktor .... Für $|a| >$ ...... wird die Parabel schlanker, für ...... breiter als die Normalparabel. Für $a > 0$ ist sie nach .... geöffnet, für $a < 0$ nach............ .

1.2 Scheitelpunktsform der allgemeinen quadratischen Funktion

Aufgabe 1.3

a) Zeichne die Funktionen $x \mapsto y = 0.5x^2 + v$ für $v = 0$ (fett); $2 \,;\, 4 \,;\, -2 \,;\, -4$.
Notiere die Beobachtungen. Wo liegt jeweils der Scheitelpunkt?

b) Mit TI-Nspire™: Fahre mit dem Zeiger zum Scheitelpunkt der Parabel mit $v = 0$ (der Zeiger wird zu einem achsenparallelen Vierfachpfeil). Verschiebe diese Parabel in senkrechter Richtung und beobachte die Veränderung der Funktionsgleichung. Wie ändert sich die Gleichung, wenn man die Parabel horizontal verschiebt? Notiere die Beobachtungen. Zeichne die Parabel mit $v = 0$ wieder ein.

c) Füge eine Funktionstabelle ein und betrachte die vertikalen Abstände der einzelnen Kurven zur Kurve $y = 0.5x^2$ bei verschiedenen x-Werten. Formuliere das Ergebnis.

Aufgabe 1.4

a) Zeichne $y = 0.5(x - u)^2$ für $u = 0$ (fett); 3 ; -3. Wie entstehen die Parabeln aus der Parabel mit $u = 0$? Notiere die Beobachtungen. Wo liegt jeweils der Scheitelpunkt?

b) Zeichne auch die Kurven

$y = 0.5(x - 3)^2 + 2$

$y = 0.5(x - 3)^2 - 2$

$y = -0.5(x - 3)^2 + 2$

$y = -0.5(x - 3)^2 - 2$

c) Erstelle eine allgemeine Regel für den Einfluss der Parameter a, u, v auf die Form und Lage der Parabel $y = a(x - u)^2 + v$.

Die gewonnen Erkenntnisse fassen wir zusammen (ergänze die Lücken im Text!):

SATZ:

Der Graph der Funktion $x \mapsto y = a(x - u)^2 + v$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto y = ax^2$ durch Verschieben in x-Richtung um ...... und in y-Richtung um ...... Einheiten. Er ist also eine Parabel, welche kongruent ist zur Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$. Der Scheitelpunkt ist $S(\text{......} \mid \text{......})$.

Die Parabelgleichung in der Form $y = a(x - u)^2 + v$ heisst *Scheitelpunktsform*.

Aufgabe 1.5

Füge Schieberegler für die Parameter a, u und v ein. Verändere damit die Kurve mit der Gleichung $y = a(x - u)^2 + v$ und veranschauliche dadurch den obigen Satz.

Aufgabe 1.6

Skizziere die folgenden Parabeln von Hand (kontrolliere falls nötig mit dem Rechner):

a) $f1(x) = -\frac{5}{2}x^2$

b) $f2(x) = \frac{x^2}{2} - 3$

c) $f3(x) = -(x + 3)^2$

d) $f4(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^2$

e) $f5(x) = 2(x+6)^2 - 1$ f) $f6(x) = -(x-5)^2 - 2$

g) $f7(x) = x^2 - 6x + 9$

Aufgabe 1.7

Partnerarbeit: Jede(r) Partner(in) zeichnet 5 Parabeln auf seinem Rechner (Gitternetz einschalten). Parabelgleichungen verstecken oder nur $f1, \ldots, f5$ anzeigen. Der/Die Partner(in) bestimmt die Gleichungen der Parabeln ohne die Definitionsgleichungen beizuziehen.

Aufgabe 1.8

Gib jeweils die Gleichung der resultierenden Parabel an:

a) Strecke die Normalparabel in Richtung y-Achse mit Faktor 2

Verschiebe die Normalparabel

b) um 5 nach oben

c) um 4 nach links

d) Führe die obigen Schritte hintereinander aus in der Reihenfolge

I) a), b), c)

II) c), a), b)

III) c), b), a)

Gib die Gleichung der resultierenden Parabel an.
Kontrolliere durch Aufzeichnen.

1.3 Polynomform der allgemeinen quadratischen Funktion

Die Polynomform der allgemeinen quadratischen Funktion ist:

$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$

Eine quadratische Funktion in der *Scheitelpunktsform*, beispielsweise $x \mapsto y = 3(x+2)^2 + 5$ kann durch Ausmultiplizieren auf die *Polynomform* $x \mapsto y = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$ gebracht werden.

Zur Untersuchung der *allgemeinen quadratischen Funktion* in der *Polynomform* $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ formt man diese in die *Scheitelpunktsform* um.

Die Bestimmung des Scheitelpunkts wird in Kapitel 2 behandelt.

Aufgabe 1.9

Die Graphen der folgenden Funktionen entstehen aus der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ durch Parallelverschiebung. Fülle die Tabelle aus:

Scheitelpunkt	Scheitelpunktsform	Polynomform
$S(2 \mid 3)$		
	$y = (x - 3)^2 + 5$	
$S(-1 \mid 5)$		
	$y = (x + 0.3)^2$	

Aufgabe 1.10

Die Graphen der folgenden Funktionen entstehen aus der Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ durch eine Parallelverschiebung. Fülle die Tabelle aus:

a	Scheitelpunkt	Scheitelpunktsform	Polynomform	Funktionswert
3	$S(2 \mid 3)$			$y(3) =$
	$S(4 \mid -3)$			$y(3) = 2$
-1	$S(2 \mid 1)$			$y(\quad) = 0$
		$y = 0.5(x + 5)^2 - 2$		$y(3) =$
		$y = a(x + 2)^2 - 6$		$y(-1) = -1$

Aufgabe 1.11

a) Lege eine möglichst gute Parabel durch die Punkte $A(0 \mid -2), B(4 \mid 7), C(6 \mid 1)$ Löse die Aufgabe zuerst grafisch (drag and move) und dann rechnerisch (Gleichung der Parabel in der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$).

Tipp: Speichere die x - und y -Koordinaten der Punkte in einer Tabelle oder je in einer Liste und zeichne die Punkte als Scatterplot.

b) Wähle die x - Koordinate des Punktes B variabel: $B(x_B \mid 7)$. Bestimme rechnerisch die Gleichung der Parabel durch die 3 Punkte in Abhängigkeit von x_B. Für welche Werte von x_B gibt es keine Parabel? Weshalb?

c) Variiere x_B mit Hilfe eines Schiebereglers und beobachte die Öffnung der Parabel. Was geschieht bei den besonderen Werten von x_B?

Aufgabe 1.12

Partnerarbeit: Gebt in Zweiergruppen gegenseitig drei Punkte vor. Der Partner/ die Partnerin muss die Parabel durch die drei Punkte finden.

Aufgabe 1.13

Der Graph einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) hat den Scheitelpunkt $S(-2 \mid -4)$ und geht durch den Punkt $P(4 \mid 8)$

b) hat die Nullstellen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = -6$ und der y -Wert des Scheitelpunkts ist $y_S = 2$

c) hat den Scheitelpunkt auf der y -Achse und geht durch $A(2 \mid 1)$ und $B(-3 \mid -9)$

d) berührt die x -Achse in $P(2 \mid 0)$ und geht durch $A(5 \mid 2)$

e) hat den Scheitelpunkt auf der Geraden $y = 0.5x + 1$ und geht durch die Punkte $P(4 \mid 2)$ und $Q(6 \mid -2)$.

Bestimme die Funktion und, falls nicht schon bekannt, den Scheitelpunkt.

Aufgabe 1.14

a) Wähle sechs beliebige Punkte. Finde grafisch eine Parabel, welche am besten durch die 6 Punkte geht.
Tipp: Die x - und y -Koordinaten der Punkte in einer Tabelle oder je in einer Liste speichern.

b) Mit "Quadratischer Regression" kann man eine möglichst gute Parabel durch die gegebenen Punkte legen. Vergleiche die so gefundene Funktion mit der von Aufgabe a).

Aufgabe 1.15

CO_2 - Gehalt und Treibhauseffekt
Seit einiger Zeit wird der Treibhauseffekt analysiert, als dessen Hauptursache der Anstieg des CO_2 - Gehaltes in der Luft gilt.
Die Messwerte in der Einheit parts per million (ppm) lauten dazu:

Jahr	1960	1964	1968	1972	1976	1980
CO_2 - Anteil in ppm	316	319	322	327	331	337

Wissenschaftler prognostizieren, dass es zu einer Klimakatastrophe kommt, wenn sich der CO_2 - Gehalt von 1960 verdoppelt haben wird.

a) Berechne diesen Zeitpunkt mit einer linearen Ausgleichsfunktion (Bestmögliche Gerade durch die Messpunkte, "Lineare Regression").

b) Welcher Zeitpunkt ergibt sich, wenn eine quadratische Funktion zugrunde gelegt wird ("Quadratische Regression")?

c) Passe die Messwerte einem exponentiellen Verlauf an. Berechne den Zeitpunkt mit diesem Modell ("Exponentielle Regression").

d) Vergleiche die Modelle mit früheren und späteren Werten: z.B.
1750: 280 ppm
1990: 352 ppm

Interpretiere die Modelle bezüglich der Extrapolation auf zukünftige Werte.

1.4 Einfache Transformationen bei anderen Funktionen

Aufgabe 1.16

Führe die Transformationen von Aufgabe 1.8 für die Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = x^3$ durch.

Aufgabe 1.17

Analoge Transformationen für andere Funktionen. Zeichne die Kurven zur Kontrolle

a) Zeichne die Funktion $x \mapsto y = x^3 - 4x^2 + 5$.

b) Gib die Gleichung der um 3 nach oben verschobene Kurve an.

c) Gib die Gleichung der um 4 nach rechts verschobene Kurve an.
Tipp: Bei der Parabel müsste man x durch $x - 4$ ersetzen.

d) Gib die Gleichung der in Richtung y-Achse mit Faktor –2 gestreckten Kurve an.

e) Führe alle Transformationen hintereinander aus in der Reihenfolge a), b) c) und gib die Gleichung der resultierenden Kurve an.

Aufgabe 1.18

Bemerkung: Wird eine beliebige Funktion $x \mapsto y = f(x)$ mit Faktor a in y-Richtung gestreckt, dann um u in Richtung x-Achse verschoben und schliesslich um v in Richtung y-Achse verschoben, so heisst die neue Funktionsgleichung
$y = a \cdot f(x - u) + v$ (mit CAS $f1(x) := f(x)$, $f2(x) := a \cdot f1(x - u) + v$).

Verändere die Funktion $f(x)$ und beobachte die Änderung von $f1(x)$.
Beispiel:

$$f1(x) := x^3 - 4x^2 + \sqrt{x}$$

$$f2(x) := -2 \cdot f1(x + 5) - 3$$

Zusammenfassung der wichtigsten Transformationsregeln

Gegeben sei eine Funktion f durch die Funktionsgleichung $y = f(x)$. Von Bedeutung sind die folgenden Transformationen (die transformierten Funktionen werden mit $g1, g2, \ldots$ bezeichnet):

Transformation	Neue Funktionsgleichung
1) Streckung in y-Richtung mit Faktor a Spezialfall $a = -1$: Spiegelung an der x-Achse	$g1(x) = a \cdot f(x)$
2) Verschiebung in y-Richtung um v	$g2(x) = f(x) + v$
3) Verschiebung in x-Richtung um u	$g3(x) = f(x - u)$
4) Spiegelung an der y-Achse	$g4(x) = f(-x)$

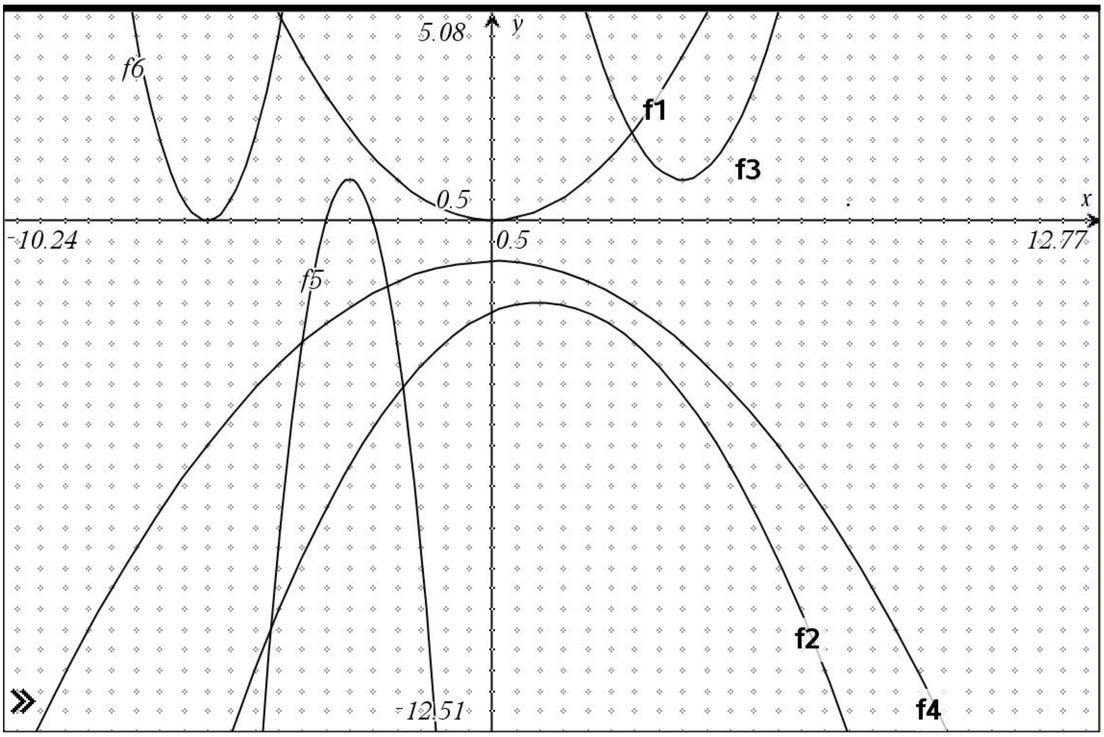
Begründungen vgl. Kap. 3.2

Aufgabe 1.19

Der Graph der Funktion $x \mapsto y = x^3$ wird in x-Richtung um 2, anschliessend in y-Richtung um 3 Einheiten verschoben und dann noch an der x-Achse gespiegelt. Bestimme die Gleichung der resultierenden Kurve.

Aufgabe 1.20

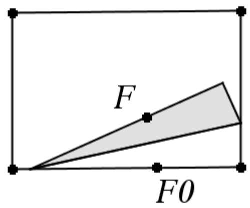
Bestimme die Gleichungen der sechs dargestellten Parabeln f1, f2,…,f6.



1.5 Brennpunkteigenschaften

Die quadratischen Parabeln haben einen sogenannten *Brennpunkt*. Dieser spielt in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle. In den folgenden Aufgaben werden wichtige Eigenschaften des Brennpunkts erkundet.

Aufgabe 1.21



Nimm ein A4-Blatt quer und zeichne einen beliebigen Punkt *F* einige cm vom unteren Rand entfernt etwa in der Mitte zwischen rechtem und linkem Rand. Falte das Papier auf verschieden Arten so, dass der untere Rand durch den Punkt *F* geht. Wiederhole solche Faltungen bis eine Kurve ersichtlich wird. Konstruiere die Geradenschar (als Spur der Faltgeraden). Benutze dazu den an der Faltgeraden gespiegelten Punkt F0 als variablen Punkt.

Aufgabe 1.22

Gegeben ist der Punkt $\mathrm{F}\left(0 \mid 2\right)$.

a) Bestimme denjenigen Punkt $\mathrm{P}\left(3 \mid \mathrm{y}\right)$, welcher von der x-Achse und vom Punkt F denselben Abstand hat.
Anleitung für die konstruktive Lösung: Weil der Punkt P die bekannte x-Koordinate 3 hat, liegt er auf der Parallelen zur y-Achse durch $\mathrm{P}_0\left(3 \mid 0\right)$. Der Abstand von P zur x-Achse ist nun gleich dem Abstand von P zu P_0. Demnach suchen wir auf der Parallelen zur y-Achse durch P_0 denjenigen Punkt, welcher zu F und zu P_0 denselben Abstand aufweist. Wo liegen nun alle Punkte, welche denselben Abstand von F und P_0 haben?

b) Wähle nun einen variablen Punkt P_0 auf der x-Achse und zeichne die Parallele zur y-Achse durch P_0. Konstruiere auf dieser Parallelen nun den Punkt P, welcher von F und von P_0 und damit auch von der x-Achse denselben Abstand hat.

c) Verschiebe P_0 auf der x-Achse und bestimme den geometrischen Ort von P.

d) Bestimme die Gleichung der gefundenen Ortslinie von P durch Probieren.

e) Leite die Gleichung der Ortslinie aus der geometrischen Bedingung her.

Bemerkung:
Der Punkt F aus der vorangehenden Aufgabe heisst *Brennpunkt*, die x-Achse *Leitlinie*. Es gilt der

SATZ
Die Menge aller Punkte, welche von einem festen Punkt F und einer festen Linie l denselben Abstand haben, ist eine Parabel. F heisst *Brennpunkt*, l *Leitlinie*.

Aufgabe 1.23

Lichtstrahlen fallen parallel zur y-Achse auf einen Parabolspiegel dessen Querschnitt eine Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ $(a > 0)$ ist. Wähle zunächst $a = \frac{1}{4}$ und einen Lichtstrahl.

a) Spiegle den Lichtstrahl an der Parabel (d.h. an der Tangente oder Normalen im Reflexionspunkt R). Bestimme den Schnittpunkt F des gespiegelten Lichtstrahls mit der y-Achse.

b) Was passiert mit F, wenn der Lichtstrahl, d.h. der Punkt R bewegt wird? Benutze auch die Ortslinienfunktion um einige Lichtstrahlen gleichzeitig anzuzeigen. Was passiert mit F, wenn sich a verändert (benutze einen Schieberegler).

c) Messe den Abstand $\left|OF\right|$. Weise den Wert einer Variablen f zu. Finde einen Zusammenhang zwischen a und f.

d) Stelle f und a in einer Tabelle dar und bestätige die in c) aufgestellte Vermutung. (In TI-Nspire™ können die Werte für f und a bei Änderung von a mit dem Schieberegler mit dem Befehl «Automatische Datenerfassung» in die Tabelle übernommen werden.)

e) Spiegle den Punkt F am Ursprung und benenne den Punkt F'. Zeichne eine Gerade l parallel zur x-Achse durch F'. Fälle das Lot von R auf l, Schnittpunkt L. Zeige: $\left|RF\right| = \left|RL\right|$ geometrisch und durch Rechnung (Leitlinieneigenschaft der Parabel).

f) Konstruiere die Parabel aus einer beliebig gewählten Leitlinie l und dem Brennpunkt F.

g) Erweiterung der Aufgabe: Wähle als Leitlinie l die y-Achse und als Brennpunkt den Punkt $F\left(1 \mid 0\right)$. Untersuche die Menge aller Punkte R der x-y-Ebene, deren Abstandsverhältnis k vom Punkt F und der Geraden l konstant ist. Die Gleichung, welche die Koordinaten von R erfüllen müssen, kann nach y aufgelöst werden (zwei Lösungen) und so kann die Kurve gezeichnet werden. Verwende einen Schieberegler für k. Beschreibe die Kurven in Abhängigkeit von k.

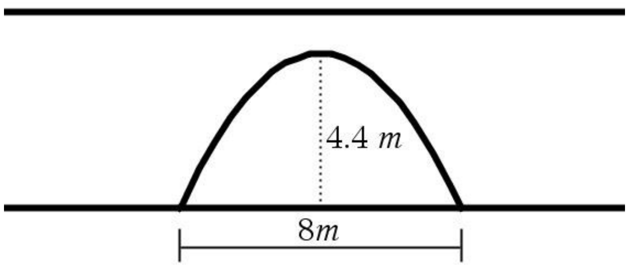
1.6 Vermischte Aufgaben

Aufgabe 1.24

Bei der abgebildeten Brücke (Kornhausbrücke in Bern) haben die hervorgehobenen senkrechten Streben einen horizontalen Abstand von 10 m voneinander, die erste ist ebenfalls horizontal 10 m vom höchsten Punkt des Brückenbogens entfernt. Wie lange sind die Streben?

Aufgabe 1.25

Bei der abgebildeten Eisenbahnbrücke mit einem parabolischen Brückenbogen liegt der höchste Punkt des Bogens 4.4 m über der Strasse, der Brückenbogen ist auf Strassenhöhe 8 m breit. Ein Lastwagen mit rechteckigem Querschnitt ist 2.6 m breit und 4 m hoch.



a) Kann der Lastwagen unter der Brücke hindurch fahren?

b) Man geht davon aus, dass ein Fahrer nicht genau in der Mitte durchfährt sondern nach rechts oder links etwas davon abweicht. Aus diesem Grunde wurde die maximale Durchfahrtshöhe für 2.6 m breite Lastwagen mit 3.75 m angegeben. Von welcher maximalen Abweichung ist man bei der Berechnung dieser Durchfahrtshöhe ausgegangen?

Aufgabe 1.26

Der Benzinverbrauch eines Autos, gemessen in Anzahl Liter pro 100 km, ist für Geschwindigkeiten über 50 km/h näherungsweise eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit. Dabei werden für eine Strecke von 100 km folgende Benzinmengen verbraucht: Bei 60 km/h 4.75 Liter, bei 100 km/h 6.6 Liter und bei 130 km/h 9.25 Liter.

a) Bestimme die Funktion, mit welcher man den Benzinverbrauch in Abhängigkeit der Geschwindigkeit berechnen kann.

b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch 20% geringer als bei 130 km/h?

c) Im Tank befinden sich noch 3 Liter, die nächste Tankstelle ist 40 km entfernt. Wie schnell darf man höchstens fahren, wenn man die Tankstelle noch erreichen will?

Aufgabe 1.27

Für den Anhalteweg y eines Autos gilt näherungsweise die Faustformel

$y = 0.3x + 0.01x^2$.

Dabei ist x die Geschwindigkeit in km/h und y der Anhalteweg in m.

a) Um wie viel wächst der Anhalteweg, wenn man die Geschwindigkeit von 30 km/h auf 50 km/h erhöht?

b) Ein Auto fährt mit 30 km/h, der Fahrer sieht plötzlich ein Hindernis und kann sein Auto gerade unmittelbar vor dem Hindernis zum stehen bringen. Mit welcher Geschwindigkeit wäre er auf das Hindernis geprallt, wenn er mit 50 km/h gefahren wäre?

Aufgabe 1.28

An einer Flugshow startet die Flugstaffel in 1000 m Höhe zum Sturzflug. Sie ist zu diesem Zeitpunkt 1500 m von der Zuschauertribüne entfernt (Horizontaldistanz). Die Staffel darf nicht tiefer fliegen als 50 m (wir betrachten die Staffel als Punkt, z.B. die Spitze des ersten Flugzeugs der Staffel).

a) Der tiefste Punkt wird aus Sicherheitsgründen 200 m von der Tribüne entfernt angesetzt. Wie hoch fliegt die Staffel über die Tribüne? Gib die Gleichung der Flugkurve an.

b) Die Flughöhe direkt über der Tribüne muss aus Sicherheitsgründen mindestens 100 m betragen. Wie weit entfernt vor der Tribüne muss die Staffel in diesem Fall den tiefsten Punkt erreichen? Gib die Gleichung(en) der möglichen Flugkurve(n) an.

c) Variiere die Distanz des tiefsten Punktes zur Tribüne. Gib die Flughöhe über der Tribüne als Funktion der Entfernung t des tiefsten Punktes der Flugkurve zur Tribüne an. Zeichne die Kurve und beschreibe die Bedeutung an verschiedenen Stellen.

d) Variiere den Startpunkt $\left(s \mid 1000\right)$. Der tiefste Punkt ist wieder $\left(200 \mid 50\right)$ und die Höhe vor der Tribüne 100 m. Bestimme die Flugparabel.

e) Variiere auch die Entfernung des tiefsten Punktes $\left(t \mid 50\right)$.
Finde eine Bedingung zwischen s und t. Zeichne die Kurve(n) mit Hilfe eines Schiebereglers für t.

2 Nullstellen, Tangente, Scheitelpunkt

2.1 Symmetrie, Nullstellen

Die Parabel ist symmetrisch zur Gerade $x = u$ durch den Scheitelpunkt $S = (u \mid v)$.

Ist eine Funktion f symmetrisch zur y-Achse, so gilt für alle x : $f(x) = f(-x)$. Eine solche Funktion wird auch gerade Funktion genannt.

Aufgabe 2.1

a) Zeige, dass die Parabel $f(x) = a \cdot x^2$, sowie alle Funktionen $f(x) = a \cdot x^n$ für gerade Exponenten n gerade sind (daher der Name gerade Funktion). Definiere analog den Begriff ungerade Funktion und gib die entsprechende Eigenschaft an.

b) Formuliere die Symmetrieeigenschaft für eine beliebige Funktion, welche symmetrisch zur Geraden $x = u$ ist. Beweise damit die Symmetrieeigenschaft der Parabel $f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$.

c) Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade, weder gerade noch ungerade:

I) $f1(x) = \dfrac{1}{x^5}$ II) $f2(x) = 5 \cdot x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}$

III) $f3(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ IV) $f4(x) = \dfrac{x^5 - 2 \cdot x^3}{2x - 1}$

Die Symmetrieeigenschaft der Parabel kann genutzt werden um den Scheitelpunkt zu bestimmen.

Aufgabe 2.2

a) Rechts steht die Wertetabelle für die Parabeln $f1, f2, f3$ und $f4$. Bestimme mit Hilfe dieser Tabelle die x - und die y -Koordinate des Scheitelpunkts der Parabeln.

b) Berechne den Streckungsfaktor a für alle Parabeln.

c) Zeichne die Parabel und die Punkte, welche zur Bestimmung der Parabel benutzt wurden.

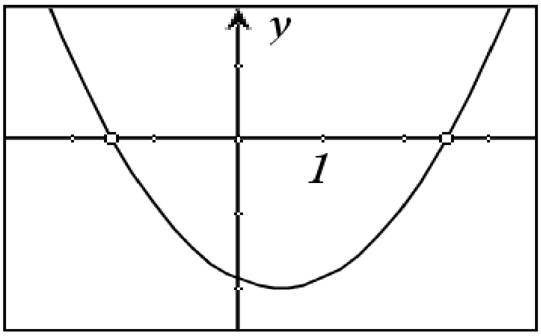
d) Bei welchen Parabeln kann von den Schnittpunkten der Parabel mit der x -Achse (Eigenschaft $f(x) = 0$) auf den Scheitelpunkt geschlossen werden? Begründe warum bei den andern nicht.

x	f1(x)	f2(x)	f3(x)	f4(x)
-3	6	4.125	3.25	33.125
-2.5	2.5	2.5	1.75	25.125
-2	0	1.125	1.25	18.125
-1.5	-1.5	0	1.75	12.125
-1	-2	-0.875	3.25	7.125
-0.5	-1.5	-1.5	5.75	3.125
0	0	-1.875	9.25	0.125
0.5	2.5	-2	13.75	-1.875
1	6	-1.875	19.25	-2.875
1.5	10.5	-1.5	25.75	-2.875
2	16	-0.875	33.25	-1.875
2.5	22.5	0	41.75	0.125
3	30	1.125	51.25	3.125

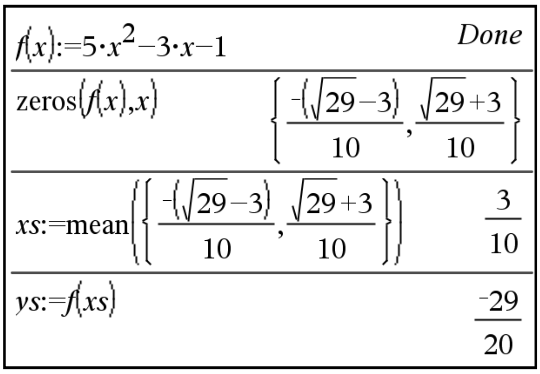
Definition:

x_0 heisst Nullstelle einer Funktion f, wenn $f(x_0) = 0$.

Graphisch erkennt man die Nullstellen als Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.



Für die Berechnung der Nullstellen einer Funktion benutzt CAS den Befehl *zeros* (siehe Bild rechts).



$f(x):=5\cdot x^2-3\cdot x-1$	*Done*
$\text{zeros}(f(x),x)$	$\left\{\frac{-(\sqrt{29}-3)}{10},\frac{\sqrt{29}+3}{10}\right\}$
$xs:=\text{mean}\left(\left\{\frac{-(\sqrt{29}-3)}{10},\frac{\sqrt{29}+3}{10}\right\}\right)$	$\frac{3}{10}$
$ys:=f(xs)$	$\frac{-29}{20}$

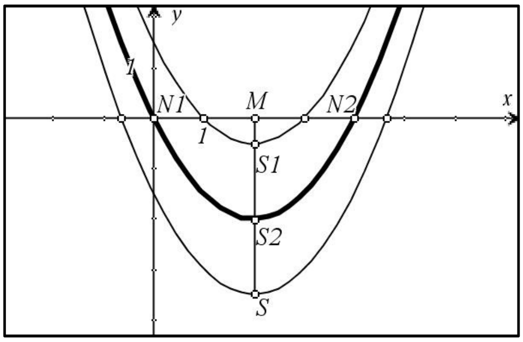
Hat eine Parabel Nullstellen x_1 und x_2, so liegt die x-Koordinate des Scheitelpunkts aus Symmetriegründen in der Mitte der beiden Nullstellen, ist also das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen:

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_S = f(x_S)$.

Dieser Mittelwert kann mit *mean* berechnet werden.

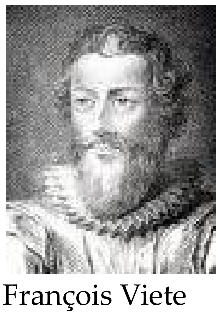
Bemerkung:

Die Konstante c *hat keinen Einfluss auf die Symmetrie der Parabel, deshalb ist die* x*-Koordinate des Scheitelpunkts von* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ *dieselbe wie von* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$. *Diese Erkenntnis vereinfacht vor allem die Berechnung des Scheitelpunkts von Hand.*



Der französische Mathematiker François Viete 1540 – 1603 (lateinisch Vieta, lateinische Namen galten damals als schick) fand folgenden Zusammenhang:

Hat eine quadratische Funktion $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ zwei Nullstellen x_1 und x_2 so gilt $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (Zerlegung in Linearfaktoren) und es besteht der Zusammenhang $c = x_1 \cdot x_2$ und $b = -(x_1 + x_2)$.



François Viete

Aufgabe 2.3

a) Begründe den Satz von Vieta.

b) Verallgemeinere den Satz auf ein Polynom 3. Grades mit 3 Nullstellen (3 Linearfaktoren).

Aufgabe 2.4

Bestimme I) von Hand II) mit dem Rechner den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln:

a) $f1(x) = x^2 - 4x$ b) $f2(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f3(x) = x^2 + 9x + 20$ d) $f4(x) = x^2 - 29x + 210$

e) $f5(x) = a \cdot x^2 - b \cdot x$ f) $f6(x) = x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x - 3$

g) $f7(x) = a \cdot x^2 - a^2 \cdot b \cdot x - a \cdot b \cdot x + a^2 \cdot b^2$

Aufgabe 2.5

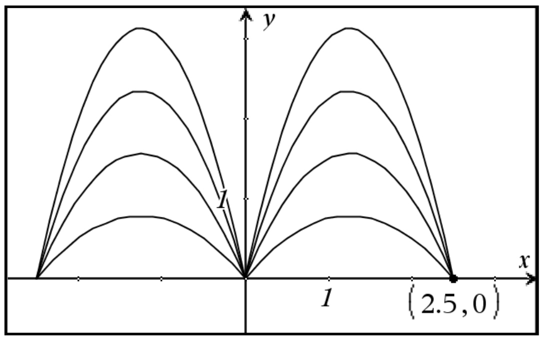
Ein Stein, der bei $x = 0$ weggeworfen wird, beschreibt die Parabel
$f(x) = -0.04x^2 + 2.48x + 1.56$

a) In welcher Höhe wird der Stein weggeworfen?

b) Wo trifft der Stein auf dem Boden auf?

c) In welchem Punkt erreicht der Stein die maximale Höhe?

Aufgabe 2.6



Ein Springbrunnen hat ein kreisrundes Becken mit einem Durchmesser von 6 m. Die Düse ist in der Mitte des Beckens angebracht (Ursprung des Koordinatensystems). Der parabelförmige Strahl kann so gesteuert werden, dass Strahlstärke und Winkel eingestellt werden können.
Der Strahl soll so gewählt werden, dass der Strahl immer 50 cm vom Rand des Beckens aufs Wasser auftritt.

a) Finde eine Parabel, welche diese Eigenschaft erfüllt (Parabel(n) des Querschnitts betrachten).

b) Finde alle Parabeln mit dieser Eigenschaft (Parameter $a > 0$). Stelle die Parabeln mit einem Schieberegler für a graphisch dar.

c) Gib die Höhe der Parabel in Abhängigkeit des Parameters a an.

d) Schneide die Parabel mit einer beliebigen Geraden durch den Ursprung. Verändere die Gerade mit einem Schieberegler. Was erhält man im Grenzfall, wenn die beiden Punkte zusammenfallen? Für welche x-Koordinate fallen die beiden Punkte zusammen?

e) Berechne die Gleichung der Tangente und den Winkel des Strahls zur Horizontalen in Abhängigkeit von a.
Tipp: Schneide die Parabel (a als fix betrachtet) mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt. Wenn die beiden Schnittpunkte zusammenfallen (für $x = 0$) erhält man die Tangente an die Parabel im Nullpunkt, deren Steigung und damit den Austrittswinkel α des Strahls zur Horizontalen.

f) Löse a), b) und c) wenn der Strahl 20 cm über dem Wasser austritt.

2.2 Allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ können auch als Lösung der Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ aufgefasst werden.

Beispiel

Löse die quadratische Gleichung $5 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$ mit CAS und von Hand.

Die Lösung mit CAS ist im Bild rechts dargestellt.

$$\text{solve}\left(5\cdot x^2-3\cdot x-1=0,x\right)$$
$$x=\frac{-\left(\sqrt{29}-3\right)}{10} \text{ or } x=\frac{\sqrt{29}+3}{10}$$

Von Hand geht man wie folgt vor:

$5 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 1$	Konstante auf rechte Seite
$x^2 - \frac{3}{5} \cdot x = \frac{1}{5}$	durch 5 dividieren (Normalform)
$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{9}{100} = \frac{29}{100}$	linke Seite quadratisch ergänzen, rechte Seite anpassen
$x - \frac{3}{10} = \pm\sqrt{\frac{29}{100}}$	Wurzel ziehen (2 Lösungen!)
$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$	zwei zu $x_S = \frac{3}{10}$ symmetrische Lösungen

Aufgabe 2.7

Löse von Hand und kontrolliere mit dem Rechner:

a) $x^2 - 5x - 84 = 0$ b) $x^2 - 2x - 5 = 0$ c) $x^2 - 14x + 49 = 0$

d) $5x^2 - 11x = 0$ e) $3x^2 - 5x + 11 = 0$ f) $x^2 - a^2x - a \cdot x + a^3 = 0$

Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4a \cdot c}{4a}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

Dies war eine formale Auflösung der Gleichung. Lösungen gibt es nur wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, d.h. wenn die sog. Diskriminante $D = b^2 - 4a \cdot c \geq 0$ ist (lateinisch: discriminare = einen Unterschied machen).

Mit der Diskriminante unterscheidet man die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung.

Satz
Eine quadratische Gleichung
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \;\; (a \neq 0)$ hat

I) zwei Lösungen

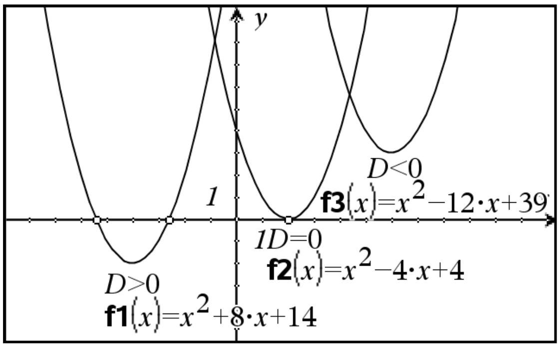
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

falls $D = b^2 - 4a \cdot c > 0$

II) eine Lösung (Doppellösung) $x = \dfrac{-b}{2a}$

falls $D = b^2 - 4a \cdot c = 0$

III) keine Lösung, falls
$D = b^2 - 4a \cdot c < 0$



Aufgabe 2.8

Löse von Hand mit der Lösungsformel und überprüfe das Resultat mit dem Rechner:

a) $3x^2 + 8x + 5 = 0$ b) $x^2 - 6x + 4 = 0$ c) $5x^2 + 8x + 5 = 0$

Aufgabe 2.9

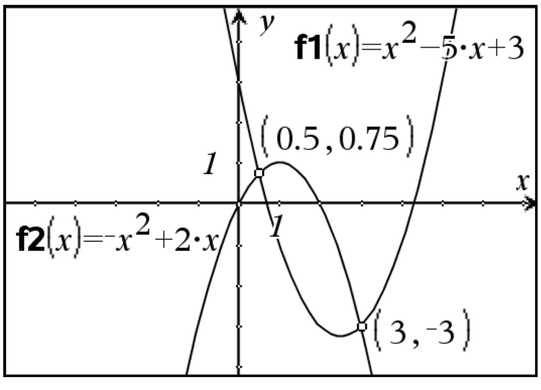
Löse mit CAS und untersuche, für welche Werte des Parameters c die Gleichung
I) eine (Lösung angeben) II) keine III) mehrere Lösungen
hat:

a) $x^2 - 4x - c = 0$ b) $x^2 - 4x - c^2 = 0$
c) $x^2 - 4x + c^2 = 0$ d) $x^2 - 4c \cdot x + c^2 = 0$
e) $x^2 - 4c \cdot x + c = 0$ f) $c \cdot x^2 - c \cdot x + c = 0$
g) $c \cdot x^2 - (c+2) \cdot x - 4 = 0$ h) $x^2 - c^2 \cdot x + c = 0$
i) $x^3 - 5x^2 - c \cdot x + 4x + c = 0$ k) $x^4 - 4x^2 + c = 0$
l) $x^2 - c \cdot x + c^2 = 0$ (unerwartetes Resultat)
m) Stellt euch in Zweiergruppen selber quadratische Gleichungen mit Parametern und löst diese gemeinsam.

Die Schnittpunkte zweier Graphen können mit CAS direkt mit *solve* bestimmt werden.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y = x^2 - 5 \cdot x + 3 \\ y = -x^2 + 2 \cdot x \end{cases}, x, y\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ and } y = \frac{3}{4} \text{ or } x = 3 \text{ and } y = -3$$



Aufgabe 2.10

Bestimme die Schnittpunkte folgender Kurven und veranschauliche die Lösung durch aufzeichnen der Funktionsgraphen:

a) $y = x^2 + 4x + 10$ und $y = -2x + 1$

b) $y = -2x^2 + 8x + 3$ und $y = 3x - 2$

c) Ändere in b) die 2. Gleichung ab in $y = 3x - c$. Für welche Werte von c hat das Gleichungssystem genau eine, zwei oder keine Lösung? Deute den Fall mit genau einer Lösung geometrisch.

d) $y = x^2 - 5x + 3$ und $y = -x^2 + 2x + c$ für $c = -4$.
Für welche Werte von c gibt es einen, zwei oder keinen Schnittpunkt? Deute den Fall mit einer Lösung geometrisch.

Aufgabe 2.11

Die Flugkurve eines Schlagballs hat folgende Flugbahn $h(x) = -0.01x^2 + 0.8x + 2$.

a) In welcher Höhe wurde der Ball abgeschlagen.

b) Berechne für ebenes Gelände die Weite und die maximale Flughöhe des Balls.

c) Berechne die Weite (auf dem Gelände gemessen), wenn das Gelände in Flugrichtung eine gleichmässige Steigung von 10% hat.

Aufgabe 2.12

Eine Gerade mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x + q$ schneidet die y-Achse im Punkt $S(0 \mid q)$ und die Normalparabel $y = x^2$ in den beiden Punkten $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$. Zeige, dass $x_1 \cdot x_2 = -q$ ist.

a) Begründe die Eigenschaft für die beiden Spezialfälle $y = q$ und $y = m \cdot x$.

b) Zeige die Eigenschaft für die Geraden $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$ und $y = 4 \cdot x - 3$.

c) Betrachte auch den Spezialfall $y = 2 \cdot x - 1$.

d) Zeige die Eigenschaft allgemein für die Gerade $y = m \cdot x + q$.

e) Stelle die Situation grafisch dar, mit Hilfe von Schiebereglern für m und q.

Aufgabe 2.13

Ein Unternehmer stellt zwei Artikel A und B her. Beobachtungen ergaben für die Abhängigkeit der Absatzmengen y_A, bzw. y_B von der Zeit x (in Tagen) die Funktionen:

Für Artikel A: $y_A = 2x + 9$

Für Artikel B: $y_B = -x^2 + 8x + 4$

a) Nach wie vielen Tagen sind die beiden Absatzmengen gleich

b) Nach wie vielen Tagen erreicht die Absatzmenge y_B ihr Maximum

Aufgabe 2.14

Angebotspreis pA und Nachfragepreis pN für ein Produkt in Abhängigkeit der Menge x/pro Tag sind gegeben durch

$\mathrm{pA}(x) = 2x + 3$

$\mathrm{pN}(x) = -x^2 - 6x + 13443$

a) Bestimme den ökonomisch sinnvollen Definitions- und Wertebereich von pA und pN.

b) Ermittle den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge (Menge, bei der Angebots- und Nachfragepreis gleich sind), sowie den Umsatz im Gleichgewichtspunkt.

Aufgabe 2.15

Schreibe ein Programm, welches bei Eingabe von $a \neq 0, b, c$ die Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ berechnet oder den Kommentar „Keine Lösung" ausgibt.

2.3 Lösungsformel und Scheitelpunkt

Die quadratische Ergänzung (siehe Kap. 2.2) liefert auch eine Methode zur Umwandlung einer allgemeinen quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform von Hand.

Beispiel

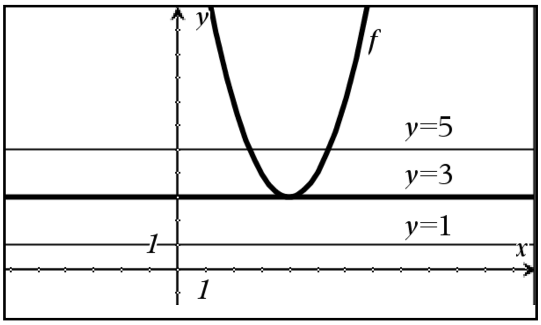
$f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

$$\frac{f(x)}{5} = x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{5} - \frac{9}{100} = \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{100}$$

$$f(x) = 5 \cdot \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}$$

Scheitelpunkt: $S\left(\frac{3}{10} \mid \frac{11}{20}\right)$

Mit dem Rechner kann der Scheitelpunkt einfacher mit der Methode der Nullstellenberechnung bestimmt werden: Der Mittelwert der Nullstellen ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts. Diese Methode führt nur zum Erfolg, wenn die Parabel Nullstellen hat. Lässt man aber die Konstante in der Funktion weg, so erhält man immer die x-Koordinate des Scheitelpunkts (siehe Kapitel 2.1).
Wir wollen im Folgenden nun eine allgemeine CAS-gerechte Methode zur Bestimmung des Scheitelpunkts kennen lernen, die auch auf viele andere Probleme anwendbar ist.



Die Nullstellen einer Parabel sind auch die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden $y = 0$. Mit dieser Betrachtungsweise kann man die Parabel auch mit einer Geraden $y = 5$ oder allgemeiner $y = v$ schneiden, wobei v so gewählt werden kann, dass die Gerade die Parabel berührt. Der Berührungspunkt ist gleich dem Scheitelpunkt.

Damit ergibt sich eine einfache Methode zur Bestimmung des Scheitelpunkts einer Parabel (siehe Bild rechts):

$g1 := y = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 \qquad y = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1$

$g2 := y = v \qquad y = v$

solve$(g1 \text{ and } g2, x, y)$

$x = \dfrac{\sqrt{20 \cdot v + 29} + 3}{10} \text{ and } y = v \text{ or } x = \dfrac{-(\sqrt{20 \cdot v + 29} - 3)}{10} \text{ and } y = v$

solve$(g1 \text{ and } g2, x, y) | v = \dfrac{-29}{20} \qquad x = \dfrac{3}{10} \text{ and } y = \dfrac{-29}{20}$

a) Definiere die Gleichungen
$g1 := y = 5x^2 - 3x - 1$
$g2 := y = v$

b) Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems $g1, g2$.

c) Bestimme den Parameter v für die Doppellösung.

d) Setze den Parameter in die Gleichung ein. Dies liefert die Koordinaten des Scheitelpunkts.

Aufgabe 2.16

Berechne den Scheitelpunkt von Hand (Scheitelpunktsform!) und mit CAS:

a) $y = x^2 - 5x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = x^2 + 2x - 3$

d) $y = -3x^2 + 12x$ e) $y = -3x^2 - 2x - \dfrac{1}{3}$ f) $x^2 - 2(x + y) = 0$

g) Erzeuge mit $y = \text{Randpoly}(x, 2)$ eine zufällige quadratische Funktion und bestimme den Scheitelpunkt.

Aufgabe 2.17

Bestimme den maximalen und minimalen Wert der Funktion

a) $f(x) = x^2 - 8x + 17$ für $x \in D$ b) $f(x) = x^2 - 8x + c$ für $x \in D$

für den Definitionsbereich I) $D = [2\,;6]$ II) $D = [1\,;3]$

Aufgabe 2.18

a) Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel $y = 2x^2 + 5x + 3$

b) Ersetze 3 durch c. Auf welcher Kurve bewegt sich der Scheitelpunkt?

c) Dasselbe für b anstelle von 5

d) Dasselbe für a anstelle von 2

e) Zeichne für b) bis d) die Scheitelpunktskurve und verifiziere das die Scheitelpunkte der Parabelschar auf dieser Kurve liegen (mit einem Schieberegler).

Aufgabe 2.19

Ein Fallschirmspringer möchte auf einer Wiese landen. Er befindet sich in $200\ \mathrm{m}$ Höhe und sinkt mit einer Geschwindigkeit von $5\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gleichzeitig schiessen Kinder auf der Wiese ein Geschoss ab (Geschwindigkeit $\mathrm{v} = 60\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$).

Formel für den senkrechten Wurf: $\mathrm{h(t)} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{t} - \dfrac{\mathrm{g}}{2}\mathrm{t}^2,\ \mathrm{g} = 9.81\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

a) Welche maximale Höhe erreicht das Geschoss und nach welcher Zeit landet es wieder am Boden?

b) Kann der Fallschirmspringer vom Geschoss getroffen werden?

c) Ab welcher Geschossgeschwindigkeit wird der Fallschirm vom Geschoss getroffen?

Aufgabe 2.20

Mike Powel hat an der WM in Tokio mit einem Weitsprung von 8.95 m den legendären Weltrekord von Bob Beamon von 8.90 m nach 23 Jahren gebrochen. Die Kurve des Körperschwerpunkts kann durch die Kurve $\mathrm{y} = -0.056 \cdot \mathrm{x}^2 + 0.38 \cdot \mathrm{x} + 1.13$ gut beschrieben werden (der Balken befindet sich bei $\mathrm{x} = 0$).

a) Wo liegt der höchste Punkt der Kurve?

b) Wann befand sich der Körperschwerpunkt wieder auf gleicher Höhe wie beim Absprung?

c) Wo träfe der Körperschwerpunkt auf dem Boden auf? (Vergleiche auch mit der gesprungenen Weite)

d) Wie weit käme ein Weitspringer, der 30 cm grösser (kleiner) ist und dadurch den Körperschwerpunkt 15 cm höher (tiefer) hat, wenn die Sprungeigenschaften sonst genau gleich sind (Auftreffpunkt des Körperschwerpunkts betrachten)?

e) Stelle für deinen Hoch- oder Weitsprung an Hand von möglichst wenigen Messpunkten der Kurve deine persönliche Parabel auf und analysiere, wie der Sprung im Vergleich mit Powel's Sprung verbessert werden kann.

Aufgabe 2.21

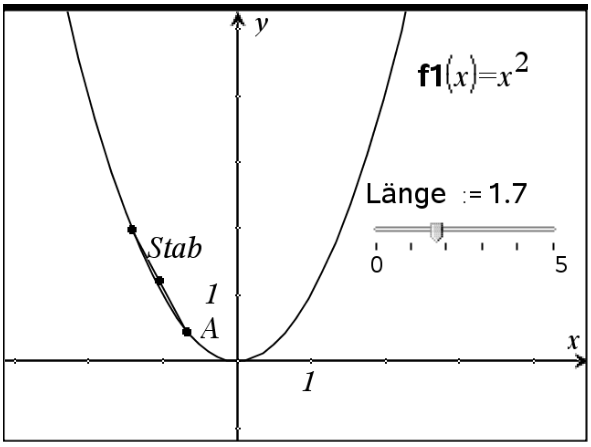
Ein Baseballspieler schlägt den Ball in einer Höhe von 1 m ab. Er möchte über den 4 m hohen Begrenzungszaun des Spielfeldes schlagen, welcher sich in 110 m Entfernung vom Abschlag befindet (parabelförmige Bahn, Luftwiderstand nicht berücksichtigt).

a) Der Ball erreicht eine maximale Höhe von 30 m in einer Entfernung von 62 m vom Abschlag. Wird das Vorhaben gelingen?

b) Der höchste Punkt wird horizontal verschoben (max. Höhe bleibt 30m). In welchem Bereich kann sich der höchste Punkt bewegen, damit der Zaun überspielt werden kann.

c) Der höchste Punkt wird so gewählt, so dass die Oberkante des Zauns gerade getroffen wird. Bestimme die Kurve, auf der sich der höchste Punkt bewegt. Zeichne die Funktion auf und untersuche, welche Punkte der Kurve die Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 2.22, ein CAS-Projekt



Gegeben ist eine Schale in Form eines Rotationsparaboloids, d.h. die Schale entsteht, wenn man die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ um die y-Achse rotiert. In diese Schale wird ein homogener Stab der Länge l gelegt.
In welchen Lagen befindet er sich in einem stabilen Gleichgewicht?
Hinweis: Es genügt einen Querschnitt, welcher die y-Achse enthält, zu betrachten.
Ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist erreicht, wenn der Schwerpunkt, d.h. der Mittelpunkt des Stabes, möglichst tief liegt. Untersuche also die Lage des Mittelpunkts des Stabs, wenn man die Lage des Stabes verändert.

a) Fasse den Stab am Angriffspunkt A und bewege ihn durch die Schale. Beobachte die Kurve, auf der sich der Mittelpunkt M bewegt.
Hinweis: Zeichne die Spur des Punktes M. Suche die Lage des Stabes so, dass der Mittelpunkt M möglichst tief liegt.

b) Verändere mit Hilfe eines Schiebereglers die Länge des Stabes. Notiere die Beobachtungen. Bei welchen Stablängen liegt die tiefste Lage von M auf der y-Achse?

c) Nun soll die Kurve, auf der sich der Punkt M bewegt, berechnet werden. Zuerst wählen wir die Stablänge $l = 2$.
Hinweise zum Vorgehen:

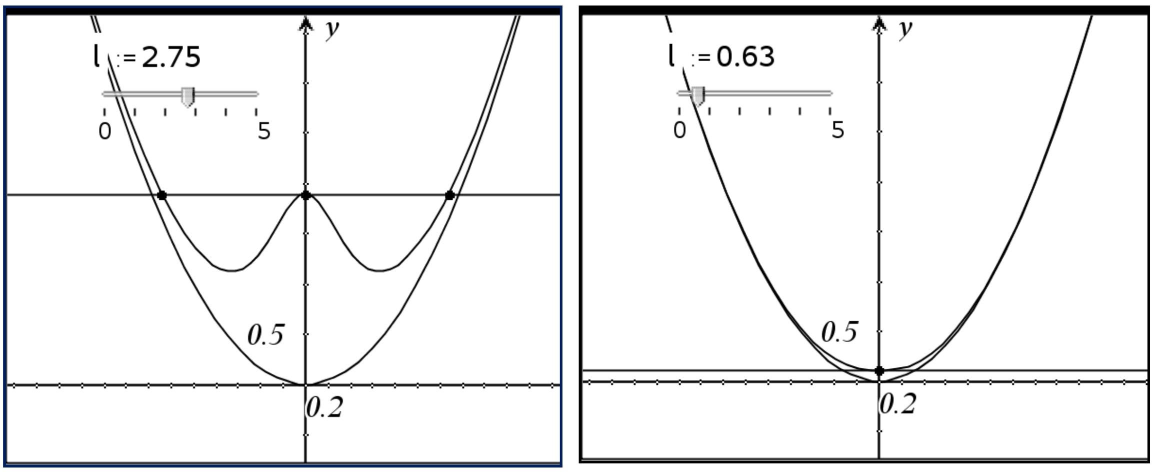
- Schneide die Parabel mit einer allgemeinen Geraden mit der Gleichung $y = mx + b$ und bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Diese enthalten die Parameter m und b.
- Setze den Abstand der beiden Schnittpunkte $= 2$ (Stablänge) und löse diese Gleichung nach b auf.
- Setze den für b erhaltenen Ausdruck in der Geradengleichung ein, diese enthält damit nur noch den Parameter m, und beschreibt also alle Geraden, welche aus der Parabel eine Strecke der Länge $l = 2$ ausschneiden.
- Bestimme die x-Koordinate des Mittelpunkts in Abhängigkeit von m und setze diese in die Gleichung der Geraden ein. Damit erhält man auch die y-Koordinate des Mittelpunktes in Abhängigkeit von m, also die Koordinaten

des Mittelpunktes in Abhängigkeit des Parameters m, d.h. zu jedem Wert von m gibt es genau einen Punkt (sogenannte Parameterdarstellung).

- Löse nun die Gleichung für die x-Koordinate des Mittelpunkts nach m auf und setze das Resultat in die Gleichung für die y-Koordinate ein, dann erhalten wir die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form $y = y(x)$. Zeichne sie auf!
- Schneide die erhaltene Kurve mit einer horizontalen Geraden $y = c$. Bestimme die Schnittpunkte algebraisch. Aus den Lösungen lässt sich ermitteln, für welchen Wert von c die Kurve einen minimalen y-Wert aufweist (zwei Doppellösungen).

d) Verändere nun noch die Stablänge, d.h. ersetze die Zahl 2 in der vorangehenden Lösung durch die Variable l (Stablänge). Dies ergibt die Kurve des Mittelpunktes in Abhängigkeit von der Stablänge.

e) Für welche Stablängen liegt nun die tiefste Lage des Mittelpunktes auf der y-Achse?
Hinweis: Schneide die Kurve mit einer horizontalen Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse verläuft und verändere sodann die Stablänge. Algebraisch lässt sich exakt ermitteln, wann die drei Schnittpunkte zusammenfallen.



f) Erweiterung der Aufgabe: Von einer bestimmten Stablänge an lässt sich dieser nicht mehr stetig durch die Schale bewegen, d.h. es gibt dann Stellen, wo eine kleinste Veränderung der Lage des Punktes A zu einer plötzlichen grossen Veränderung der Lage des Stabes führt. Untersuche dieses Verhalten geometrisch. Ab welcher Stablänge tritt dies ein? Wo liegt dann der Punkt A? Wie ist dieses Verhalten zu erklären?
Bemerkung: Eine exakte Lösung erfordert Differenzialrechnung.

Aufgabe 2.23

Ein Hersteller verkauft Stereokopfhörer für 20 € und hat 1000 Stück pro Woche bei diesem Preis verkauft. Er schätzt, dass er bei jeder Preisreduktion um 1 € jeweils 100 Stück mehr verkaufen kann. Mit welchem Preis kann er maximale Einnahmen erzeugen?

Aufgabe 2.24

Bei einem kurzlebigen Lifestyle-Produkt verläuft die Absatzmenge gemäss einer quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, abhängig vom Tag x nach der Markteinführung. Es wurden folgende Absatzmengen beobachtet:

1.Tag: 500 Stück 5. Tag: 1500 Stück 10. Tag: 2500 Stück

a) Bestimme die Absatzfunktion.

b) Wann erreicht die Absatzmenge das Maximum? Wie gross ist es?

c) Wann ist der Markt gesättigt (Absatzmenge 0)?

Aufgabe 2.25

Die Anzahl verkaufter Artikel hängt vom Preis des Artikels ab. Die folgende Tabelle gibt für einen bestimmten Artikel die verkauften Stückzahlen pro Monat bei verschiedenen Preisen an.

Preis	10	20	25	30	50
Stückzahl	710	670	650	630	550

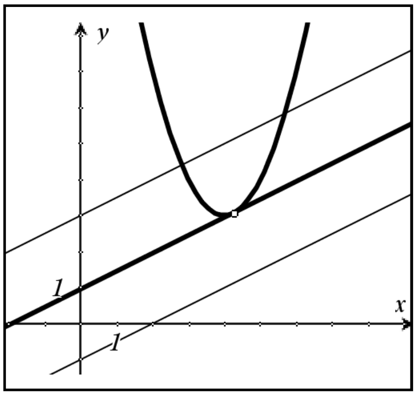
a) Beschreibe den Zusammenhang Stückzahl in Abhängigkeit des Preises und Preis in Abhängigkeit der Stückzahl als Funktion.

b) Beschreibe den Umsatz durch eine Funktion. Für welchen Preis ist der Umsatz maximal?

c) Pro Stück fallen Produktionskosten von € 4.50/Stück an. Dazu unabhängig von der produzierten Stückzahl € 8000.- fixe Kosten. Berechne den maximalen Gewinn.

2.4 Berührungsprobleme

Die CAS-gerechte Methode zur Bestimmung des Scheitelpunkts ist die Suche nach der horizontalen Berührungstangente. Auf dieselbe Weise kann auch die Tangente an eine Parabel parallel zu einer beliebigen Geraden (und andere Berührungsprobleme) berechnet werden. Die Tangente ist diejenige Gerade, welche nur einen Schnittpunkt mit der Parabel hat, also die Doppellösung in der quadratischen Gleichung (siehe nächste Aufgabe).



Aufgabe 2.26

Gegeben: $y = x^2 - 3x + 3$ und die Geradenschar $y = x + c$.

a) Zeichne die Parabel und die Geradenschar für einige Werte des Parameters c. Wie viele Schnittpunkte mit der Parabel sind möglich?

b) Verschiebe die Gerade $y = x$ (am Schnittpunkt mit der y-Achse packen) und beobachte die Anzahl Lösungen in Abhängigkeit des y-Achsenabschnitts c. Verschiebe die Gerade auch mit Hilfe eines Schiebereglers für c.

c) Berechne den Parameter c für den die Gerade $y = x + c$ die Parabel berührt (Gerade ist Tangente). Zeichne die Tangente.

Aufgabe 2.27

a) Zeichne die Parabel $y = x^2 - 6x + 11$ und die Gerade $y = a \cdot x - 1$ für $a = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

b) Drehe die Gerade $y = x - 1$ um den y-Achsenschnittpunkt (an einem Punkt ungleich Achsenschnittpunkt packen) und beobachte die Anzahl Lösungen in Abhängigkeit der Steigung a. Verändere a auch mit Hilfe eines Schiebereglers.

c) Berechne den Parameter a, für den die Gerade $y = a \cdot x - 1$ Tangente ist, sowie den Berührungspunkt.

d) Führe in der Geradengleichung einen weiteren Parameter b ein $y = a \cdot x + b$. Suche eine Bedingung für a und b damit die Gerade die Parabel berührt. Ersetze mit Hilfe dieser Bedingung b durch a in der Geradengleichung. Verschiebe die Gerade mit Hilfe eines Schiebereglers für a. Deute das Resultat.

Aufgabe 2.28

Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y = 2x^2 - 5x - 11$

a) durch den Nullpunkt des Koordinatensystems

b) durch $\left(0 \mid -15\right)$.

c) Für welche Punkte auf der y-Achse sind Tangenten möglich.

d) Bestimme die Tangenten in den Nullstellen.

Aufgabe 2.29

a) Bestimme die Tangente im Punkt $T\left(2 \mid ?\right)$ der Parabel $y = x^2$.

b) Bestimme die Tangente im Punkt $T\left(k \mid ?\right)$ der Parabel $y = x^2$.

c) Bestimme die Tangente im Punkt $T\left(2 \mid ?\right)$ der Kurve $y = \frac{1}{x}$.

d) Bestimme die Tangente im Punkt $T\left(k \mid ?\right)$ der Kurve $y = \frac{1}{x}$.

Aufgabe 2.30

a) Bestimme die Schnittpunkte der Parabeln $y_1(x) = 4 - x^2$ und $y_2(x) = (x-1)^2$.

b) Verallgemeinere die zweite Funktion zu $y_3(x) = (x-a)^2$. Für welche Parameter a berühren sich die beiden Kurven y_1 und y_3?

c) Verallgemeinere zusätzlich die erste Kurve zu $y_4(x) = b - x^2$. Welches ist die Bedingung für a und b, damit sich die beiden Parabeln y_3 und y_4 berühren? Ersetze b in y_4 mit Hilfe dieser Bedingung durch a. Verschiebe die beiden Parabeln mit Hilfe eines Schiebereglers für a. Beobachtung?

d) Auf welcher Kurve bewegen sich die möglichen Berührungspunkte der Parabeln in c)?

Aufgabe 2.31

Gegeben: $y_1(x) = 4 - x^2$ und $y_2(x) = \left|x-3\right| - 2$

a) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven graphisch und rechnerisch.

b) Verallgemeinere die erste Kurve zu $y_3(x) = a - x^2$. Schneide die Kurven y_2 und y_3 und deute das Resultat.

Aufgabe 2.32

a) Ein Motorradfahrer fährt von links nach rechts und rutscht in der parabelförmigen Haarnadelkurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{5}x^2 + 50$ aus.
Welches ist der kritische Punkt für einen Sturz, wenn in $(5 \mid 0)$ ein Befestigungspfosten steht? Zeichne zuerst die Situation und berechne dann den kritischen Punkt.

b) Die Kurve wird mit 180 km/h durchfahren. Das Sandbeet bremst den Fahrer um 18 km/h pro 10 m ab. Um sich nicht schwer zu verletzen muss er mit weniger als 30 km/h auf den gepolsterten Pfosten auftreffen. Muss die Sicherheit verbessert werden?

c) Der Pfosten wird (auf der x-Achse) versetzt. In welchem Bereich darf er platziert werden, damit die Fahrer sich nicht verletzen können?

Aufgabe 2.33

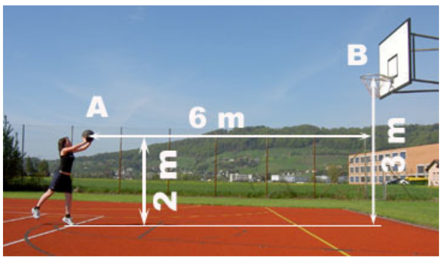
Ein Kampfjet sticht in einer parabolischen Kurve auf ein Ziel Z in $(0 \mid 0)$ zu. Der Jet befindet sich bei $(-300 \mid 800)$ und darf nicht tiefer fliegen als $200\ \mathrm{m}$. Diesen Punkt erreicht er bei $x = 200$.

a) In welchem Punkt muss das Geschoss abgefeuert werden, um das Ziel zu treffen (geradlinige Bahn angenommen). Löse die Aufgabe graphisch und rechnerisch.

b) Der Jet von Aufgabe a) möchte das Geschoss in $250\ \mathrm{m}$ Höhe abfeuern. Anfangspunkt und minimale Flughöhe wie in Aufgabe a). Bestimme die Flugparabel und den Abschusspunkt.

Aufgabe 2.34

Eine Basketballspielerin wirft einen Ball vom Punkt A auf $2\ \mathrm{m}$ Höhe vom Boden weg. Der Ball (Mittelpunkt des Balls betrachten) erreicht die Mitte des Korbes B, welcher sich $6\ \mathrm{m}$ entfernt in $3\ \mathrm{m}$ Höhe befindet.



a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und gib die Gleichung einer möglichen Parabel an, welche durch A und B geht (Wurf für einen Treffer). Zeichne diese Parabel mit den Punkten A und B. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts dieser Parabel.

b) Bestimme eine beliebige Gerade g durch den Punkt A (verwende die Steigung a als Parameter). Schneide g mit der Parabel von Aufgabe a). Experimentiere mit verschiedenen Parametern a. In welchem Fall (x-Koordinaten der Schnittpunkte betrachten) wird die Sekante (zwei Schnittpunkte) zur Tangente (ein Schnittpunkt). Berechne auch den Steigungswert der Tangente im Abwurfpunkt und daraus den Abwurfwinkel in A.

c) Bestimme alle möglichen Parabeln von A nach B, d.h. die Bahnen für mögliche Treffer. Setze dazu die Parabel in der Scheitelpunktsform $f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$ an. Verwende die gegebenen Randbedingungen und drücke $f(x)$ durch einen einzigen Parameter aus (wähle die x-Koordinate u des Scheitelpunkts als Parameter). Zeichne die Kurvenschar mit Hilfe eines Schiebereglers für u. Beschreibe die Beobachtungen.

d) Auf welcher Kurve liegen die möglichen Scheitelpunkte? Zeichne die Scheitelpunktskurve und prüfe mit der Kurvenschar von Aufgabe c).

Aufgabe 2.35

Gegeben ist die Kurve $y = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6)$.

a) Welche Nullstellen hat die Kurve?

b) Schneide die Kurve mit der Geraden $y = x + 2$ (geht durch die Nullstelle bei $x = -2$).

c) Lege eine beliebige Gerade durch die Nullstelle $x = -2$. Zeichne einige der möglichen Geraden und überlege, wie viele Schnittpunkte möglich sind.

d) Bestimme diejenige Gerade, welche Tangente an die Kurve ist und zeige, dass die x-Koordinate des Berührungspunkts der Mittelwert der beiden andern Nullstellen ist.

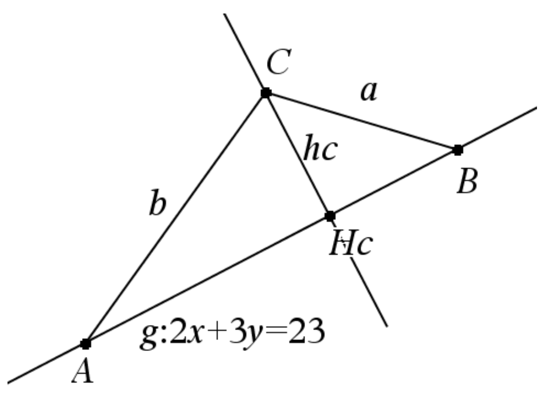
e) Gilt dieser Satz auch für eine beliebige Kurve der Form
$y = k \cdot (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ mit gegebenen Nullstellen a, b, c?

Aufgabe 2.36

Gegeben: Gerade $g: 2x + 3y = 23$ und ein Punkt $C\left(2 \mid 6\right)$.

a) Bestimme ein Dreieck ABC mit A und B auf g und Seitenlängen $a = 5$ und $b = 7$.

b) Berechne die Höhe h_c und den Höhenfusspunkt H_c.



Aufgabe 2.37

Gegeben: $A(0 \mid 0), B(9 \mid 12)$ eines Dreiecks ABC und dessen Inkreismittelpunkt $I(2 \mid 11)$.

a) Bestimme den Radius des Inkreises und dessen Berührungspunkt mit der Seite $\overline{AB}$.

b) Bestimme die Berührungspunkte des Inkreises mit den andern beiden Seiten.

c) Bestimme die Ecke C des Dreiecks.

Aufgabe 2.38

Eine Gerade mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x + q$ schneidet die y-Achse im Punkt $S(0 \mid q)$ und die Normalparabel $y = x^2$ in den beiden Punkten $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.

Zeige, dass $x_1 \cdot x_2 = -q$ ist.

a) Begründe die Eigenschaft für die beiden Spezialfälle $y = q$ und $y = m \cdot x$ (ohne Rechner).

b) Zeige die Eigenschaft für die Geraden $y = \frac{1}{2}x + 3$ und $y = 4x - 3$.

c) Betrachte auch den Spezialfall $y = 2x - 1$.

d) Zeige die Eigenschaft allgemein für die Gerade $y = m \cdot x + q$.

e) Stelle die Situation grafisch dar, mit Hilfe von Schiebereglern für m und q.

f) Die Eigenschaft hat eine Ähnlichkeit mit dem Satz von Vieta. Stelle die Verbindung her. Stelle auch die zweite Eigenschaft $x_1 + x_2 = ?$ auf.

Senkrechter und schiefer Wurf

Senkrechter Wurf: Höhe $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Schiefer Wurf: $x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$; $y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Aufgabe 2.39

Ein Stein wird am Rand einer $30\ \mathrm{m}$ hohen Klippe senkrecht nach oben geworfen mit einer Geschwindigkeit von 14 m/s.

a) Bestimme die Höhe $h(t)$ des Steins in Abhängigkeit der Zeit t.

b) Wann erreicht der Stein die maximale Höhe?

c) Wann trifft der Stein auf den Boden unter der Klippe?

Aufgabe 2.40

Ein Ball wird horizontal aus einem Fenster eines Hochhauses geworfen mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h. Er trifft $3.5\ \mathrm{s}$ später auf dem Boden auf.

a) Wie hoch über dem Boden wurde der Ball weggeworfen und wie weit entfernt vom Gebäude trifft der Ball auf dem Boden auf.

b) Dasselbe, wenn man den Aufschlag des Balles nach $3.5\ \mathrm{s}$ hört und zwar

I) unten II) oben am Gebäude.

Aufgabe 2.41

Auf ebenem Gelände schiesst ein Golfspieler den Ball unter einem Abschlagwinkel α zur Horizontalen auf $140\ \mathrm{m}$ (Luftwiderstand nicht berücksichtigt).

a) Wie gross ist die Geschwindigkeit des Balls $|\vec{v}| = v$ bei $\alpha = 30^0$.

b) Zeichne die Kurve des Golfballs für verschiedene Abschlagwinkel, wobei die Abschlaggeschwindigkeit v immer dieselbe wie in a) ist.

c) Zeichne die Weite x in Abhängigkeit des Abschlagwinkels und finde den bestmöglichen Abschlagwinkel.

d) Wie viel weiter kommt der Golfspieler beim Schlag von a) auf abfallendem Gelände mit Neigung 15^0 (auf dem Gelände gemessen)?

e) Beweise: Der optimale Abschlagwinkel in Aufgabe d) (gemessen zum abfallenden Gelände) beträgt $(90^0 + 15^0) / 2$.

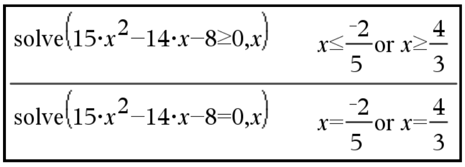
2.5 Ungleichungen, Ungleichungssysteme

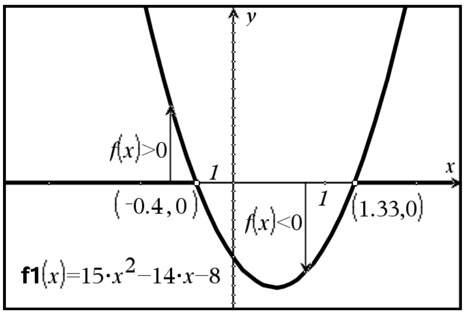
Quadratische Ungleichungen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$ (analog mit $\leq, <, >$) haben in der Regel unendlich viele Lösungen, welche mit Intervallen beschrieben werden können. Die Intervallgrenzen bestimmen wir mit Hilfe der Grenzgleichung
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Wir fassen die linke Seite der Ungleichung als Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ auf. Der Bereich auf der x-Achse bei dem der Graph oberhalb der x-Achse liegt, erfüllt die Ungleichung.

Beispiel

$15x^2 - 14x - 8 \geq 0$. Solche Ungleichungen können mit CAS gelöst werden (siehe Bild).
Wie kommt man aber selber auf diese Lösung?
Die Grenzgleichung $15x^2 - 14x - 8 = 0$ hat die Lösungen $x = -\frac{2}{5}$ und $x = \frac{4}{3}$.
Fasst man die linke Seite der Ungleichung als Funktion $f(x) = 15x^2 - 14x - 8$ auf, so lautet die Frage: Für welche x-Werte ist der Funktionswert $f(x) \geq 0$? Da $a = 15$ ist die Parabel nach oben geöffnet, d.h. die Lösungsmenge der Ungleichung ist $L = \left]-\infty\,; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}\,; \infty\right[$.





Aufgabe 2.42

Löse die Ungleichungen und veranschauliche die Lösungsmenge durch Aufzeichnen der Parabel (linke Seite der Ungleichung):

a) $x^2 + 2x - 15 < 0$ b) $-x^2 + 2x + 3 < 0$ c) $x^2 - 3x + 9 \leq 0$

d) $x^2 - x + 1 > 0$ e) $x^2 \leq 2x - 1$ f) $5x^2 - 8x - 9 \geq 0$

g) $x \cdot (x^2 - 4) > 0$ h) $x^2 - a \cdot x - 5x + 5a \leq 0$

Aufgabe 2.43

Schraffiere die Lösungsmenge folgender Ungleichungen, bzw. Ungleichungssysteme in einem Koordinatensystem:

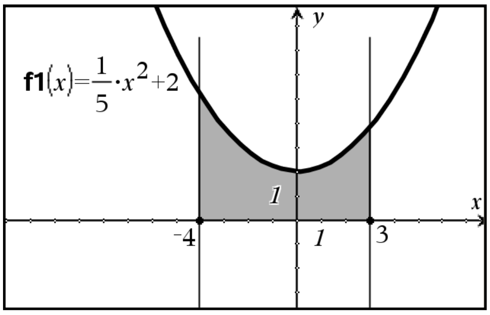
a) $y \leq x^2 - 4x + 3$ b) $y \geq x^2 - 6x + 9$ c) $y \geq \left|x^2 + 2x - 15\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 12 \\ y \leq -x^2 + 5 \end{array}\right|$ e) $\left|\begin{array}{l} y \leq -2(x-2)^2 + 2 \\ y \geq (x-1)^2 - 1 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{l} y \leq \frac{1}{|x|} \\ y \leq 4 - x^2 \end{array}\right|$ g) $\left|\begin{array}{l} x - y \geq 3 \\ 2x + y + 1 \geq 0 \\ y \leq x^2 - 2x + 2 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array}\right|$

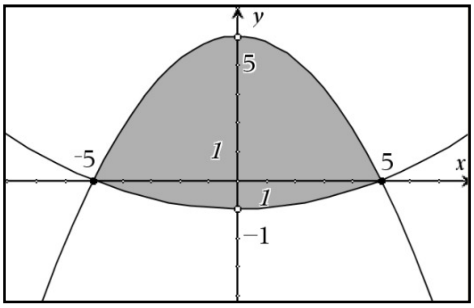
Aufgabe 2.44

Beschreibe den schraffierten Bereich durch Ungleichungen. Die Begrenzungskurven sind Parabeln oder Geraden (Tipp: wenn nötig Definitionsbereich einschränken):

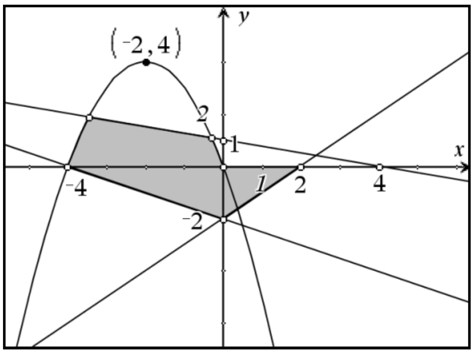
a)



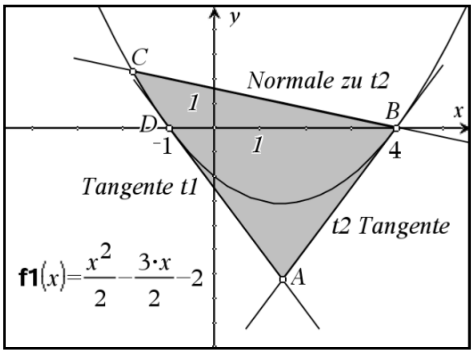
b)



c)



d)



Aufgabe 2.45

Eine Firma stellt Spielzeuge her, welche im Wesentlichen aus einer Spiralfeder der Federkonstanten k und einer schwingenden Masse m bestehen. Für die Schwingfrequenz f des Spielzeugs gilt der Zusammenhang (bei geeigneter Skalierung):

$$k = m \cdot f^2$$

Anhand der Produktionsbedingungen des Spielzeugs kann davon ausgegangen werden, dass die Federkonstante zwischen 0.7 und 2 liegt und die Masse zwischen

a) $\frac{1}{3}$ und 1

b) $\frac{1}{2}$ und 1

Die Produktionskosten z können durch folgende Beziehung berechnet werden:

$$z = 1000 + 3k - 4f$$

Welche Federkonstante, Frequenz und Masse weisen die optimalen Spielzeuge mit den niedrigsten Produktionskosten auf (graphische und rechnerische Lösung)?
Hinweis: Zeichne die Planungsfläche in einem f-k-Koordinatensystem (f-Achse horizontal).

3 Transformationen bei impliziten Funktionen

3.1 Transformationsgleichungen

Die im 1. Kapitel durchgeführten Transformationen werden hier genau begründet und erweitert auf sogenannte implizite Funktionen.
Eine Gleichung in den zwei Variablen x und y beschreibt stets eine Kurve in der x-y-Ebene.

Beispiele:

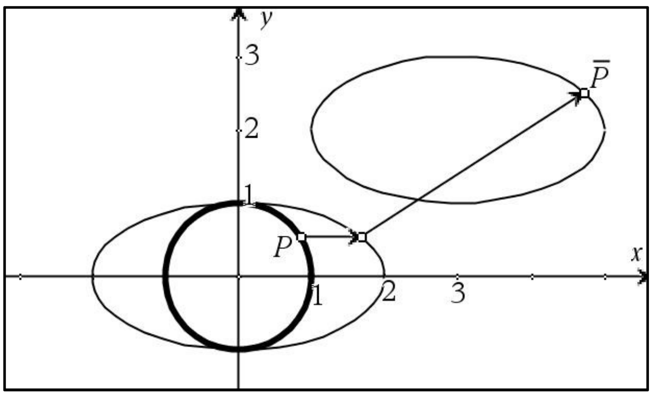
$y - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$ Parabel

$xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ Hyperbel

$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$ Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0 \mid 0)$

Steht die Gleichung in der ersten Form wie in den Beispielen (sogenannte Implizite Form), dann schreibt man allgemein $g(x, y) = 0$, d. h. ein Term in den zwei Variablen x und y wird gleich Null gesetzt.
Lässt sich die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y auflösen, dann erhält man eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x)$ (sogenannte explizite Form), und die Kurve kann als Graph dieser Funktion gezeichnet werden.
Eine durch eine Gleichung $g(x, y) = 0$ definierte Kurve kann nun verschoben, gestreckt oder gedreht werden. Wie lautet dann die Gleichung der transformierten Kurve?

Als Beispiel betrachten wir Folgendes: Der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ werde zuerst in x-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt und anschliessend um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben.



Jedem Punkt $P(x \mid y)$ der ursprünglichen Kurve wird nun eindeutig ein Punkt $\overline{P}(\overline{x} \mid \overline{y})$ der transformierten Kurve zugeordnet.

Die Gleichungen mit denen man $\overline{x}$ und $\overline{y}$ aus x und y berechnet, heissen *Transformationsgleichungen*. Im betrachteten Beispiel gilt offensichtlich:

$$\overline{x} = 2x + 3$$
$$\overline{y} = y + 2$$

Man löst nach x und y auf und erhält die *Transformationsgleichungen* in der Form:

$$x = \frac{\overline{x} - 3}{2}$$
$$y = \overline{y} - 2$$

Ein *Gleichheitszeichen* ist immer auch ein *Substitutionszeichen* (Ersetzungszeichen) resp. eine Substitutionserlaubnis, d. h. was links des Gleichheitszeichens steht, kann durch das was rechts davon steht ersetzt werden.
Ersetzt man nun in der Gleichung der Kurve entsprechend den Transformationsgleichungen x durch $\frac{\overline{x} - 3}{2}$ und y durch $\overline{y} - 2$, dann erhält man die Gleichung der transformierten Kurve:

$$\left(\frac{\overline{x} - 3}{2}\right)^2 + \left(\overline{y} - 2\right)^2 = 1$$

Die Querstriche können schlussendlich wieder weggelassen werden, da sie nur zur Unterscheidung zwischen den ursprünglichen und den transformierten Koordinaten eingeführt wurden. Man erhält dann die Gleichung der transformierten Kurve:

$$\left(\frac{x - 3}{2}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = 1$$

Wird das Verfahren für die elementaren Transformationen durchgeführt, können daraus die Transformationsegeln oder «Transformationsrezepte» abgeleitet werden.

Transformation	Transformations-gleichungen	Umgeformte Gleichungen	Regel (Rezept
Verschiebung in x-Richtung um u	$\overline{x} = x + u$ $\overline{y} = y$	$x = \overline{x} - u$ $y = \overline{y}$	Ersetze x durch $x - u$
Verschiebung in y-Richtung um v	$\overline{x} = x$ $\overline{y} = y + v$	$x = \overline{x}$ $y = \overline{y} - v$	Ersetze y durch $y - v$
Streckung in x-Richtung mit Faktor k	$\overline{x} = k \cdot x$ $\overline{y} = y$	$x = \frac{\overline{x}}{k}$ $y = \overline{y}$	Ersetze x durch $\frac{x}{k}$
Streckung in y-Richtung mit Faktor a	$\overline{x} = x$ $\overline{y} = a \cdot y$	$x = \overline{x}$ $y = \frac{\overline{y}}{a}$	Ersetze y durch $\frac{y}{a}$

Diese Transformationen können auch hintereinander ausgeführt werden, dabei spielt jedoch die Reihenfolge in der Regel eine Rolle.

3.2 Aufgaben zu Translationen und Streckungen

Translationen

Beispiel

Der Kreis mit Radius 1 (Einheitskreis) $x^2 + y^2 = 1$ wird um den Vektor

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben.

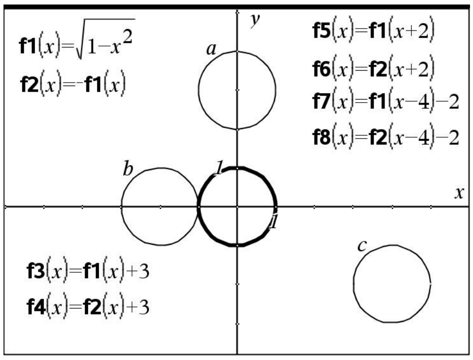
Die Gleichungen der verschobenen Kreise sind:

a) $x^2 + (y-3)^2 = 1$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 1$

c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$

Die verschobenen Kreise sind im Bild rechts dargestellt. Wenn kein Befehl für das Zeichnen von impliziten Funktionen vorhanden ist und wie hier die Ausgangsgleichung nach der Variablen y aufgelöst werden kann, wird der Grundkreis mit zwei Funktionen für die beiden Halbkreise gezeichnet. Bei den verschobenen Funktionen benutzt man diese zwei Grundfunktionen und die Translationsregeln.



Die obige Grundfunktion $x^2 + y^2 = 1$ kann mit CAS auch mit $\text{zeros}\left(x^2 + y^2 - 1, y\right)$ gezeichnet werden (Liste der beiden Halbkreise).

Aufgabe 3.1

Eine Gerade mit Steigung 3 geht durch den Punkt $P\left(4 \mid -2\right)$. Gib die Gleichung der Geraden an (Transformation der Geraden $y = x$).

Aufgabe 3.2

Zeichne die Kurven

a) $x + |y| = 1$ (Grundkurve) b) $(x+2) + |y-3| = 1$ c) $|y+2| = 5 - x$

Aufgabe 3.3

Zeichne die Kurven

a) $|x| + |y| = 1$ (Grundkurve) b) $|x-3| + |y| = 1$

c) $|x+3| + |y-2| = 1$ d) $|x+3| + |y-2| = 4$

e) Die Grundkurve von a) wird in x-Richtung verschoben, bis sie durch den Punkt $\left(3 \mid 0.5\right)$ geht. Bestimme die Gleichung der Bildkurve.

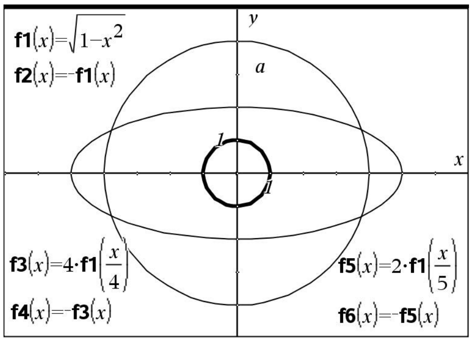
Aufgabe 3.4

Die Kurve $y^3 + 3 \cdot x^2 - \sqrt{x-5} = 0$ wird um den Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben.

Gib die Gleichung der verschobenen Kurve an.

Streckung in x - und y -Richtung (Affinität)

Eine Streckung in Richtung x -, bzw. y -Achse mit dem Faktor a nennt man auch normale p-Affinität zur x -, bzw. y -Achse.



Beispiel

Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ wird in x -, bzw. y -Richtung um den Faktor a , bzw. b gestreckt.

a) $a = 4,\ b = 4$ b) $a = 5, b = 2$

Im ersten Fall erhält man einen Kreis mit Radius 4, Gleichung $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ oder $x^2 + y^2 = 16$.

Im zweiten Fall eine Ellipse mit Halbachsen 5 und 2, Gleichung $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

Aufgabe 3.5

Die Grundkurve $|x| + |y| = 1$ wird

a) in x -, bzw. y -Richtung um 3, bzw. 5 gestreckt

b) zusätzlich zu a) in x -Richtung um 2 verschoben

c) zusätzlich zu a) in x -Richtung um –2 und in y -Richtung um –4 verschoben

d) in x - und y -Richtung um den gleichen Faktor c gestreckt bis sie durch den Punkt $(6 \mid 2)$ geht.

Bestimme die Gleichung der transformierten Kurve und skizziere sie.

e) Skizziere die Kurve $|2x - 8| + \left|\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right| = 3$

Aufgabe 3.6

Die Kurve $y^2 - 2y + 2x^2 - 3 = 0$ wird der Reihe nach

a) in x -Richtung mit Faktor 2 gestreckt

b) in y -Richtung um 3 verschoben

c) in y -Richtung mit Faktor 5 gestreckt

d) in x -Richtung um –1 verschoben

Gib die Gleichung der transformierten Kurve an.

Aufgabe 3.7

Gib die Transformationsgleichungen für die zentrische Streckung an.

Aufgabe 3.8

a) Begründe: Streckt man die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ in y-Richtung um den Faktor 2, so erhält man die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$.

b) Die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ kann man auch durch Streckung der Normalparabel in x-Richtung erhalten. Um welchen Faktor muss in x-Richtung gestreckt werden?

c) Die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ kann man nun auch noch durch eine zentrische Streckung der Normalparabel vom Ursprung aus erhalten. Um welchen Faktor muss zentrisch gestreckt werden?

d) Verallgemeinerung. Begründe: Alle Parabeln sind zueinander ähnlich. Mit welchem Faktor muss die Normalparabel zentrisch gestreckt werden, damit man die Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ erhält?

Aufgabe 3.9

Gegeben ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $\left(0 \mid 0\right)$ und Halbachsen 5 und 3 auf den Koordinatenachsen.

a) Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden $y = 2x + 1$.

b) Für welche Werte von c ist $y = 2x + c$ Tangente an die Ellipse?

c) Für welche Werte von c ist $y = c \cdot x + 1$ Tangente an die Ellipse?

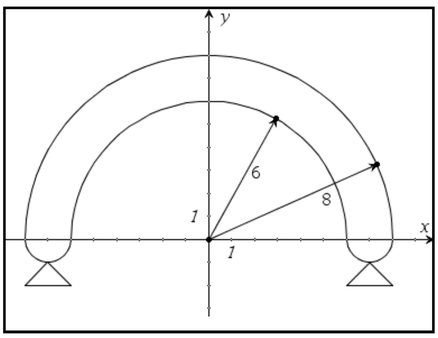
d) Bestimme eine Ellipse mit Achsenverhältnis 3:1 welche die Gerade $y = 2x + 1$ berührt.

e) Für welche Werte von c schneidet die Gerade $y = c \cdot x + 1$ eine Strecke der Länge 8 aus der gegebenen Ellipse?

Es können auch Gleichungen mit Wurzelfunktionen, Hyperbelfunktionen, trigonometrischen Funktionen transformiert werden, sofern diese Funktionen bekannt sind.

Aufgabe 3.10

Es geht um die Wurst!



a) Zeichne die nebenstehende Wurst mit Hilfe von Halbkreisen und stückweise definierten Geraden.

b) Oft ist die Wurst flacher. Strecke die Wurst in y-Richtung mit einem Faktor 0.5 und damit der Inhalt gleich bleibt in x-Richtung um 30% mehr. Warum befriedigt die Form nicht. Korrigiere die Wurst.

Aufgabe 3.11

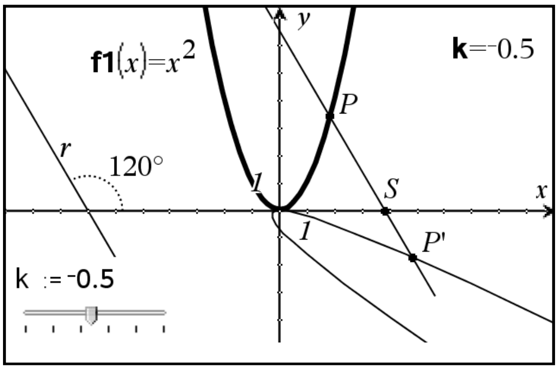
a) Eine Kugel mit Radius 2 fällt in Richtung y-Achse auf eine parabelförmige Vase (Querschnitt $y = x^2$).
Wo trifft die Kugel auf die Vase (Mittelpunkt und Berührungspunkte)?
Betrachte den Querschnitt (Kreis mit Mittelpunkt $M(0 \mid v)$, Radius 2).
Bestimme die Berührungspunkte und den Mittelpunkt des Kreises mit der obigen Parabel zuerst graphisch (Schieberegler für v) und dann rechnerisch.

b) Der Kreis mit Radius 2 rollt die Parabel $y = x^2$ hinunter. Bestimme graphisch die Kurve, die der Mittelpunkt dabei beschreibt.

c) Der Kreis mit Radius 2 gleitet aussen an der Parabel nach oben (z.B. ein kreisrunder Ballon). Bestimme graphisch die Kurve, die der Mittelpunkt dabei beschreibt.

Aufgabe 3.12

Gegeben: Parabel $p : y = x^2$, Gerade r und Faktor k (ungefähr wie in der Figur). Bei einer Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse, r als Affinitätsrichtung und Streckfaktor k wird ein Punkt P an der x-Achse so gespiegelt, dass für den Bildpunkt P' gilt $\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$



a) Konstruiere zu einem beliebigen Punkt $P \in p$ den Bildpunkt P' und zeichne die Ortslinie der Bildkurve der Parabel p.

b) Verändere den Streckfaktor k mit Hilfe eines Schiebereglers.

c) Ersetze die Parabel durch eine andere Funktion.

d) Gib die Transformationsgleichungen für die Situation im Bild an (Winkel zur x-Achse 120°, Streckfaktor –0.5), sowie die Gleichung der Bildkurve von p.

e) Gib die Transformationsgleichungen für eine beliebige Richtung r und einen beliebigen Streckfaktor k an, sowie die Gleichung der Bildkurve von p.

f) Ein Kreis wird durch Affinität an einer beliebigen Affinitätsachse mit veränderbarer Richtung und Streckfaktor abgebildet. Konstruiere das Bild.

4 Extremwertaufgaben, Optimierungsaufgaben

„Optimierungsprobleme haben von alters her auch in der Mathematik eine bedeutende Rolle gespielt und tun es heute noch. Eines der ältesten ist das Problem der Dido, einer phönizischen Prinzessin, die nach der griechischen Mythologie die Stadt Karthago in Nordafrika gegründet hat. Als Dido, um 900 vor Christus nach Tunis kam, erwarb sie vom König so viel Land, „wie sie mit einem Ochsenfell umspannen könne“. Dido machte aus dem Vertrag das Beste. Sie zerschnitt das Ochsenfell in möglichst schmale Streifen und verband diese zu einem möglichst langen Band. Denkt man sich dieses Problem im Inneren des Landes und nicht an der Küste gestellt, so haben wir das folgende Problem: In der Ebene soll eine geschlossene Linie von gegebener Länge L ein Gebiet von möglichst grossem Flächeninhalt A (die sog. Zielfunktion) umgrenzen.
Eine derartige Maximumaufgabe (auch Variationsproblem) genannt, bei der eine Grösse fixiert wird, nannten die Griechen isoperimetrisches Problem und sie kannten auch die leicht zu erratende Lösung: den Kreis.

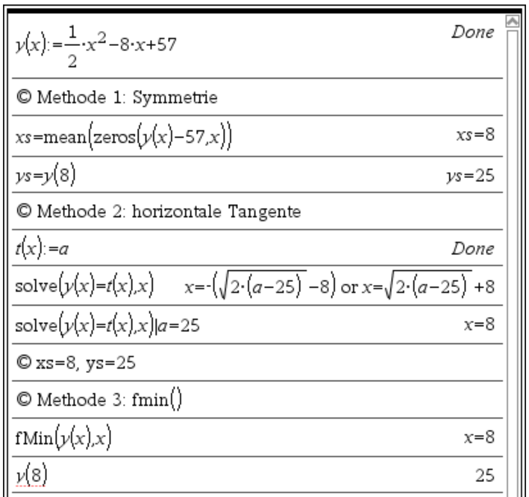
Beim Aufgabenlösen mit Hilfe eines CAS geht es nicht nur darum, den Computer als reines Rechen- oder Zeichenhilfsmittel zu benutzen, sondern der Einsatz des CAS dient zu allererst dem Ziel, das mathematische Tun zu unterstützen. Das CAS ermöglicht Vermutungen zu überprüfen, Problemstellungen experimentell zu analysieren und schnell zwischen den verschiedenen Darstellungsformen (algebraisch, graphisch, numerisch) zu wechseln.

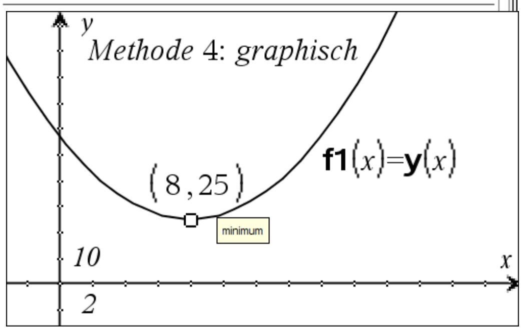
4.1 Quadratische Zielfunktionen

Bei einer Zielfunktion ist das „Ziel“, den grössten oder kleinsten (extremalen) Funktionswert zu finden. Eine quadratische Zielfunktion ist eine Parabel, dessen Scheitelpunkt jeweils der gesuchte Extremalpunkt ist. Eine nach oben geöffnete Parabel hat ein Minimum, eine nach unten geöffnete Parabel ein Maximum.

Beispiel: $y = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 57$

Bestimmung des Scheitelpunktes mit CAS (4 Methoden):
1. Symmetrie (Mittelwert der Nullstellen)
2. Horizontale Tangente
3. Funktionen: fMax() bzw. fMin()
4. Graphisch





Bestimmung des Scheitelpunkts von Hand mit quadratischer Ergänzung:

$$y = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2 - 16x + 114\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(x-8\right)^2 - 64 + 114\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x-8\right)^2 + 25 \quad \rightarrow \quad S\left(8 \mid 25\right)$$

Aufgabe 4.1

Zeige, dass für den Term $T(x) = -x^2 + 6x + 40$ die folgenden Aussagen gelten:

1) Es gibt einen Wert x_M, so dass der Wert des Terms T maximal wird $T(x_M) = T_{Maximum}$.
2) Es gibt genau zwei Werte x_1 und x_2, für die der Term Null wird $T(x_1) = 0$ und $T(x_2) = 0$ (Nullstellen des Terms).

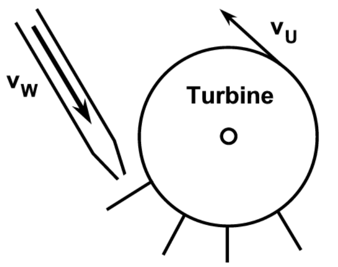
a) Analysiere: Gibt es einen Zusammenhang zwischen x_M, x_1 und x_2? Berechne x_M aus x_1 und x_2 für den obigen Term.

b) Wie kann x_M berechnet werden, wenn es keine Nullstellen x_1 und x_2 gibt? Berechne x_M für den Term $T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 34$.

Beachte:

Viele der folgenden Aufgaben können durch überlegen von Grenzfällen (Nullstellen der Zielfunktion) gelöst werden. Dadurch lassen sich die Extremalwerte als Mittelwert der Nullstellen berechnen (gilt nur bei quadratischen Zielfunktionen!). Es muss aber in diesen Fällen rechnerisch bestätigt werden, dass eine quadratische Zielfunktion vorliegt).

Beispiel 1: Maximaler Wirkungsgrad einer Turbine



In einer Turbinenzentrale eines Wasserkraftwerkes strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit $v_W = 200\ ms^{-1}$ aus der Düse auf die Turbinenschaufeln. Der Wirkungsgrad einer Turbine ist definiert durch:

$$W = \frac{\text{vom Wasser auf die Turbine übertragene Energie}}{\text{totale Energie des Wassers}}$$

Beim Betrieb der Turbine wird die Umfangsgeschwindigkeit v_U der Schaufeln konstant gehalten. W in Abhängigkeit von v_U lässt sich durch die quadratische Funktion $W(v_u) = -\frac{4}{v_W^2} \cdot v_u^2 + \frac{4}{v_W} \cdot v_u$ beschreiben. Für welche Umfangsgeschwindigkeit v_U hat die Turbine den maximalen Wirkungsgrad?

Lösung durch überlegen der Grenzfälle: $v_U = 0$ und $v_U = v_W \quad \rightarrow v_U = \frac{0+v_W}{2} = \frac{v_W}{2}$

Steht die Turbine still ($v_U = 0$), so wird keine Energie übertragen (W = 0). Bewegt sich die Turbinenschaufel gleich schnell wie das Wasser ($v_U = v_W$), so kann keine Energie übertragen werden. Somit haben wir die beiden Nullstellen von W und wir können mit der Kenntnis, dass W eine quadratische Funktion ist die Umfangsgeschwindigkeit für den maximalen Wirkungsgrad berechnen.

$w(vu):=\frac{-4}{vw^2}\cdot vu^2+\frac{4}{vw}\cdot vu$	*Done*
fMax$(w(vu),vu)$	$vu=\frac{vw}{2}$
zeros$(w(vu),vu)$	$\{vw,0\}$
mean$(\{vw,0\})$	$\frac{vw}{2}$

Lösungsschema für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Bei Extremwertaufgaben gibt es immer eine Zielfunktion, deren Wert maximiert / minimiert werden soll und eine (oder mehrere) Nebenbedingungen, welche die Wahl der Variablen in der Zielfunktion beschränkt. Hier eine Strategie zum Lösen von Extremwertproblemen mit Nebenbedingungen:

1) Stelle die Aufgabensituation - wenn möglich - in einer Skizze dar.
2) Schreibe auf, was gegeben und was gesucht ist. Gib den Ausgangsgrössen und Unbekannten passende Namen.
3) Erkenne die Zielfunktion und formuliere sie als mathematische Funktion in Abhängigkeit von den Ausgangsgrössen und Unbekannten.
4) Erkenne die Nebenbedingungen. Die Wahl der zu bestimmenden Grössen muss durch die Aufgabe in irgendeiner Weise eingeschränkt sein. Formuliere die Nebenbedingungen als Gleichungen.
5) Haben wir die Zielfunktion, die aus zwei (oder mehreren) voneinander unabhängigen Variablen besteht und die Nebenbedingung(en), welche die voneinander unabhängigen Variablen zueinander in Beziehung setzen, formuliert, dann können wir die Abhängigkeit der Zielfunktion auf eine Variable reduzieren.
6) Drücke mit Hilfe der Nebenbedingungen alle Variablen durch eine fest gewählte Variable aus.
7) Setze die Nebenbedingungen in die Zielfunktion so ein, dass eine äquivalente Zielfunktion für den zu optimierenden Wert in Abhängigkeit von nur einer Variablen entsteht.
8) Bestimme Maximum oder Minimum der Zielfunktion. Beachte dabei den durch die Aufgabenstellung eingeschränkten Definitionsbereich (z.B. ist eine negative Länge sinnlos) und die Ränder des Definitionsbereichs. Es sind Situationen denkbar, in denen zwar im Definitionsbereich ein lokales Extremum vorliegt, aber die Zielfunktion ihr absolutes Extremum am Rand des Definitionsbereichs annimmt.

Internetseite: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/koelnproj5/ erstellt im Rahmen des Modellversuchs SelMa 1999-2003. Diese Seite enthält eine Einführung und viele Übungsaufgaben zum Thema Extremwertaufgaben. Die Lösungen können geführt schrittweise nach dem Lösungsschema durchgearbeitet werden.

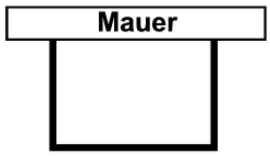
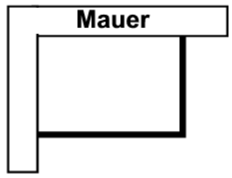
Aufgabe 4.2

a) Für welches Zahlenpaar $\left(x, y\right)$, das die Bedingung $2x + 3y = 5$ erfüllt, ist das Produkt $P = x \cdot y$ maximal?
b) Für welches Zahlenpaar $\left(x, y\right)$, das die Bedingung $x - y = 4$ erfüllt, ist die Summe der Quadrate $S = x^2 + y^2$ minimal?

Beispiel 2: Maximale Rechteckfläche bei vorgegebenem Umfang

Variation des antiken Optimierungsproblems der phönizischen Prinzessin Dido.

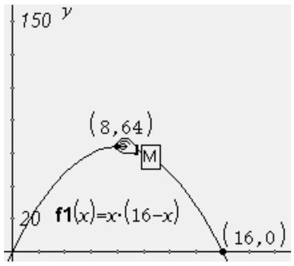
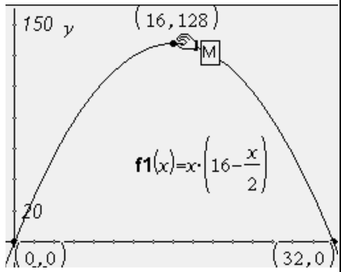
Partnerarbeit: Eine rechteckige Weidefläche soll mit einem 32 m langen Zaun eingezäunt werden. Gibt es einen maximalen Flächeninhalt, den wir einzäunen können? Wie gross ist dieser Flächeninhalt? Diskutiere die Lösungsschritte bei den Varianten A und B und löse dann die Variante C. Erkunde die Zusammenhänge des Problems!

Optimierung: Maximale Weidefläche mit einer begrenzten Zaunlänge U = 32m.	**Variante A** 	**Variante B** 	**Variante C** 

1. Überlege, dass mit jeder Wahl der Länge L eine bestimmte Breite und damit auch ein bestimmter Flächeninhalt für die Weidefläche festgelegt werden.
2. Welche „unsinnigen" Weideflächen - Formen ergeben sich als Grenzfälle?
3. Von welchem Funktionstyp könnte die Flächenfunktion sein?
4. Liegt die maximale Fläche in der Mitte zwischen diesen Grenzlagen?
5. Stelle Formeln für die Zielgrösse (Weidefläche A) und die Nebenbedingungen auf. Zielfunktion: Zuordnung Länge $\mapsto$ Weidefläche
6. Bestimme das Maximum rechnerisch.

Lösungen für Variante A und B

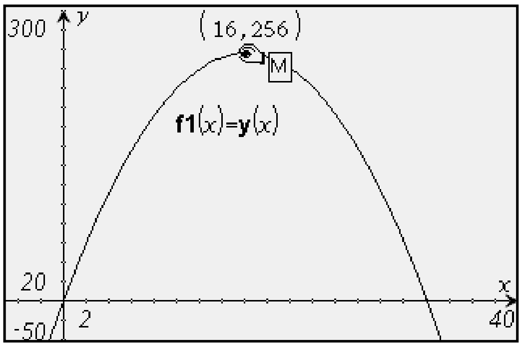
Schritte	Variante A	Variante B	Variante C
Zielfunktion	$A(L,B) = L \cdot B$	$A(L,B) = L \cdot B$	
Nebenbedingung	$U = 32 = 2L + 2B$	$U = 32 = L + 2B$	
Unbekannte	Länge L: x	Länge L: x	
2. Unbekannte durch x ausdrücken	$32 = 2x + 2B$ $B = 16 - x$	$32 = x + 2B$ $B = 16 - \frac{x}{2}$	
Zielfunktion mit x ausgedrückt (Weidefläche)	$y = x \cdot (16 - x)$ Quad. Funktion	$y = x \cdot \left(16 - \frac{x}{2}\right)$ Quad. Funktion	
Nullstellen Grenzfälle (A = 0)	$x_1 = 0,\ x_2 = 16$	$x_1 = 0,\ x_2 = 32$	
Symmetrie x_{max} liefert die maximale Fläche	$x_{max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 8$ $L = 8\ ;\quad B = 8$	$x_{max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 16$ $L = 16\ ;\quad B = 8$	
Maximale Fläche	Quadrat A = 64	Rechteck A = 128	

quadratische Funktion, nach unten geöff-nete Parabel Scheitelpunkt graphisch	$y = -x^2 + 16x$  	$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 16x$  	

Lösung der Variante C mit dem Taschenrechner:

© Zielfunktion y= l*b, Unbekannte x=l Nebenbedingung nach b auflösen	
solve(x+b=32,b)	b=32−x
y(x):=x·(32−x)	*Done*
© Methode1: Maximum mit Symmetrie	
mean(zeros(y(x),x))	16
max_fläche=y(16)	*max_fläche*=256
© Methode2: horizontale Tangente	
solve(y(x)=a,x)	$x=-(\sqrt{256-a}-16)$ or $x=\sqrt{256-a}+16$
solve(y(x)=a,x)|a=256	x=16
© Methode3: Maximum mit fmax()	
fMax(y(x),x)	x=16

Graphische Lösung



Variante A liefert unter der Bedingung, dass die Weidefläche ein Rechteck sein muss, das Quadrat als optimale Figur. Ohne diese Bedingung wäre der Kreis die optimale Figur. Der Umfang der Figur betrage $U = 4\,\mathrm{m}$, somit hat das Quadrat die Fläche $A = 1\,\mathrm{m}^2$.

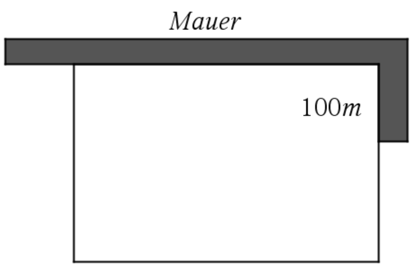
Ein Kreis mit $U = 4\,\mathrm{m}$ hat einen Radius $r = 0.6366\,\mathrm{m}$ und eine Fläche $A = 1.2732\,\mathrm{m}^2$.

Vergleiche mit anderen Figuren z.B. einem regelmässigem n-Eck $(n = 6, 8, 10, \ldots)$.

Berechne die Flächen einiger n-Ecke, die einen Umfang $U = 4\,\mathrm{m}$ haben und verglei-che mit der Fläche des Kreises.

Aufgabe 4.3

Gemäss der Skizze soll der Flächeninhalt eines rechteckigen Grundstücks maximal werden. Berechne den Flächeninhalt unter folgender Bedingung: Der Zaun des Rechtecks (ohne die beiden Mauerteile) misst 700 Meter, der kleine Mauerteil 100 Meter.



Beispiel 3: Maximale rechteckige Marmorplatte aus einer dreieckigen Restplatte

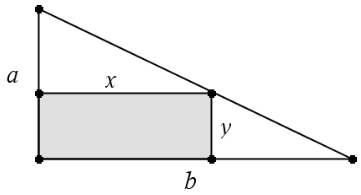
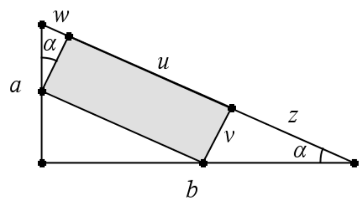
Aus einer dreieckförmigen Marmorplatte soll eine rechteckförmige Platte heraus gesägt werden. Gegeben sind die Längen der Katheten a und b.

a) Wie müssen wir die Länge und Breite wählen, damit wir die rechteckige Platte mit dem grössten Flächeninhalt bekommen?

b) Wie gross ist die maximale Fläche?

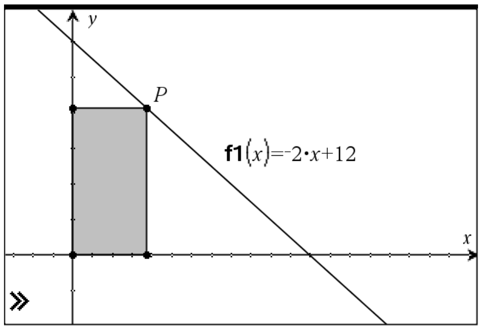
c) Vergleiche die beiden Möglichkeiten. Welche liefert die grössere Fläche?

d) Zahlenbeispiel: $a = 50\ \mathrm{cm}$, $b = 70\ \mathrm{cm}$.

Variante 1	Variante 2
 	
Lösung durch überlegen der Grenzfälle:	
$x = 0$ und $x = b$ Länge x für die maximale Rechteckfläche: $x_{max} = \frac{0 + b}{2} = \frac{b}{2}$	$u = 0$ und $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ Länge u für die maximale Rechteckfläche: $u_{max} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$
© Zielfunktion A(x,y)=x*y © Nebenbedingung: Ecke des Rechtecks auf der Hypotenuse (Ansatz für Hypotenuse) $y(x):=m\cdot x+q$ — Done $\text{solve}\left(\begin{cases}y(0)=a\\y(b)=0\end{cases},m,q\right)$ — $m=\frac{-a}{b}$ and $q=a$ $y(x)\mid m=\frac{-a}{b}$ and $q=a$ — $a-\frac{a\cdot x}{b}$ © Zielfunktion Rechtecksfläche f(x) $f(x):=x\cdot\left(a-\frac{a\cdot x}{b}\right)$ — Done © Methode 1: Symmetrie $\text{mean}(\text{zeros}(f(x),x))$ — $\frac{b}{2}$ © Methode 3: fmax() $\text{fMax}(f(x),x)$ — $x=\frac{b}{2}$ © maximale Rechtecksfläche $f\left(\frac{b}{2}\right)$ — $\frac{a\cdot b}{4}$ © Zahlenbeispiel $x=\frac{b}{2}\mid b=70$ — $x=35$ $\frac{a\cdot b}{4}\mid a=50$ and $b=70$ — 875	© Zielfunktion A(u,v)=u*v © Nebenbedingung: Länge des Rechtecks auf der Hypotenuse (Trigonometrie oder Ähnlichkeit) c=z+u+w; $\tan(\alpha)=\frac{a}{b}=\frac{v}{z}=\frac{w}{v}$ $\text{solve}\left(\sqrt{a^2+b^2}=\frac{b}{a}\cdot v+u+\frac{a}{b}\cdot v,v\right)$ $v=\frac{-a\cdot b\cdot\left(u-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+b^2}$ © Zielfunktion Rechtecksfläche f(u) $f(u):=u\cdot\frac{-a\cdot b\cdot\left(u-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+b^2}$ — Done © Methode 1: Symmetrie $\text{mean}(\text{zeros}(f(u),u))$ — $\sqrt{a^2+b^2}$ © Methode 3: fmax() $\text{fMax}(f(u),u)$ — $u=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ © maximale Rechtecksfläche $f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$ — $\frac{a\cdot b}{4}$ © Gleiches Resultat wie Variante 1

Aufgabe 4.4

Gegeben ist die Gerade g: $y = -2x + 12$.



a) Wir betrachten die Rechtecke, welche je eine Seite auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse haben und eine Ecke (Punkt P) auf der Geraden. Bestimme die Lage des Punktes P so, dass die Rechteckfläche maximal wird.

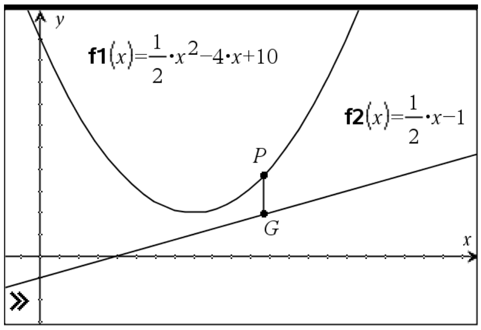
b) Für welche Lage von P wird der Inhalt des Rechtecks 16?

Aufgabe 4.5

Gegeben sind die Gerade g: $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

Und die Parabel p: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4x + 10$.

Eine Parallele zur y-Achse schneidet die Parabel p in P und die Gerade g in G.



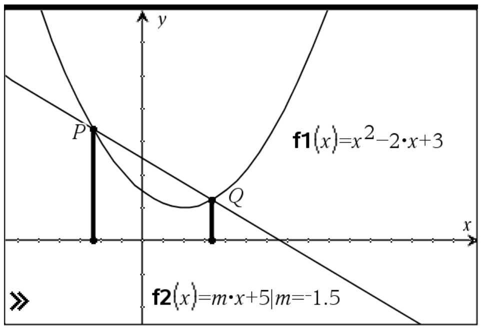
a) Berechne die Länge der Strecke $|PG|$ in Abhängigkeit von der x-Koordinate von P und G.

b) Für welches x wird die Strecke am kürzesten?

c) Für welches x hat die Strecke $|PG|$ die Länge 4?

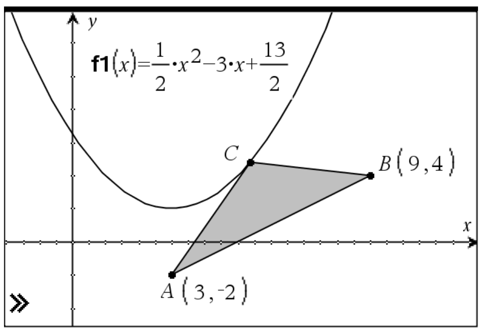
Aufgabe 4.6

Die Parabel $y = x^2 - 2x + 3$ wird von der Geraden $y = m \cdot x + 5$ in den Punkten P und Q geschnitten. Bestimme die Steigung m der Geraden so, dass die Summe der Abstände der beiden Schnittpunkte von der x-Achse möglichst klein ist.



Aufgabe 4.7

Gegeben sind die beiden Punkte $A(3 \mid -2)$, $B(9 \mid 4)$ und die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x + \frac{13}{2}$.

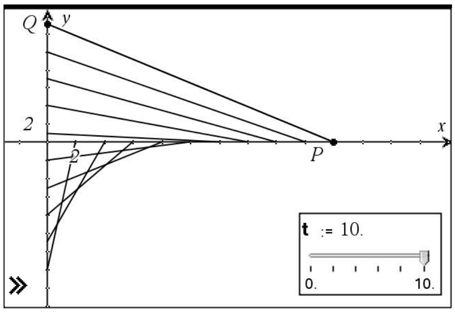


a) Bestimme den Punkt C so, dass die Dreiecksfläche minimal wird.

b) Bestimme den Punkt C so, dass die Dreiecksfläche 30 wird.

Aufgabe 4.8

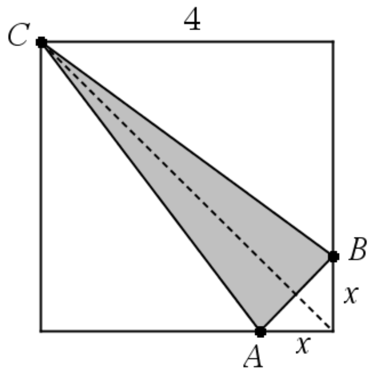
Der Punkt P bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_P = 2\,\mathrm{ms}^{-1}$ auf der x-Achse, der Punkt Q mit $v_Q = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ auf der y-Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich P bei $x = 0$ und Q bei $y = -17$.
Zu welchem Zeitpunkt ist der Abstand $|PQ|$ minimal?



Aufgabe 4.9

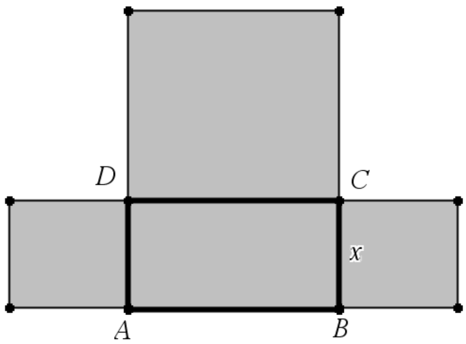
Das gleichschenklige Dreieck ABC liegt in einem Quadrat mit der Seitenlänge $s = 4\,\mathrm{cm}$.

a) Für welchen Wert von x ist der Flächeninhalt maximal?
b) Wie gross ist die maximale Dreiecksfläche?
c) Für welches x wird der Flächeninhalt $A = 6\ \mathrm{cm}^2$?
d) Welche Flächeninhalte A sind möglich?



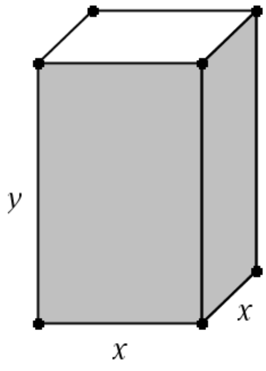
Aufgabe 4.10

Ein Rechteck ABCD hat den Umfang $24\,\mathrm{m}$. An den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ werden Quadrate nach aussen angelegt.
Wie lang muss $x = |BC|$ sein, damit die Fläche der gesamten Figur (Rechteck und Quadrate) minimal wird?



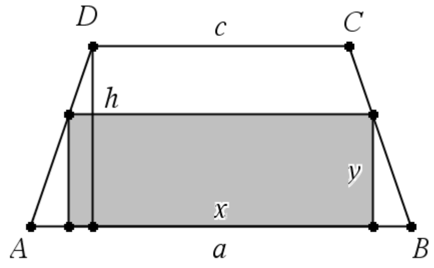
Aufgabe 4.11

Aus einem $L = 48\,\mathrm{cm}$ langen Draht sind die Kanten eines quadratischen Prismas herzustellen. Dabei soll die Mantelfläche, d.h. die Summe aller vier Seitenflächen maximal werden. Wie gross ist die Grundkante x des Prismas zu wählen?



Aufgabe 4.12

Dem gleichschenkligen Trapez $\left|AC\right| = \left|BD\right|$ mit den Abmessungen $a = 10\,\text{cm}$, $h = 3\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$ ist das flächengrösste Rechteck so einzubeschreiben, dass eine Seite auf der Basis a des Trapezes liegt.

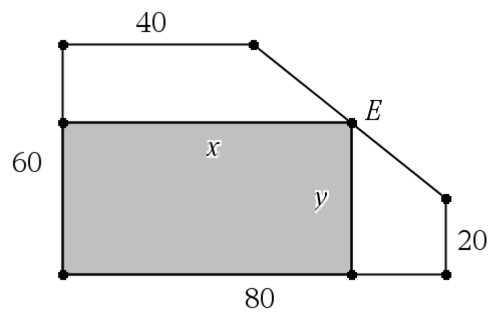


a) Bestimme die Abmessungen und die Fläche des flächengrössten Rechtecks durch Überlegen.

b) Berechne die Zielfunktion $A(x)$ (x = Länge des Rechtecks).

Aufgabe 4.13

Aus der abgebildeten Platte (Masse in cm) soll in der angedeuteten Weise ein Rechteck ausgeschnitten werden (rechte obere Ecke E auf der abgeschrägten Seite).



a) Stelle eine Funktion f: $x \mapsto y$ auf, die der Seitenlänge x die Höhe y des Rechtecks zuordnet.

b) Bestimme damit die Funktion $g : x \mapsto A$, die der Seitenlänge x die Fläche A des Rechtecks zuordnet.

c) Für welche Länge x ist die Fläche maximal?

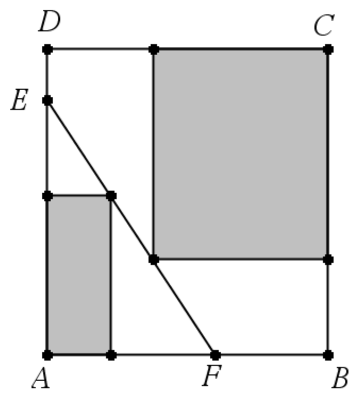
d) Gib einen zur Aufgabenstellung passenden Definitionsbereich der Flächenfunktion g an und zeichne sie in diesem Bereich.

e) Ersetze die Kantenlänge 40 durch 55 und löse die Aufgaben a)-d).

Aufgabe 4.14

Von einer teuren Marmorplatte ist bei der Bearbeitung ein Stück abgebrochen. Die Bruchlinie EF ist ein Geradenstück. Um den Schaden möglichst klein zu halten, schneiden wir aus den beiden Bruchstücken jeweils auf die skizzierte Weise eine rechteckige Platte so aus, dass die Summe der Flächeninhalte möglichst gross wird.

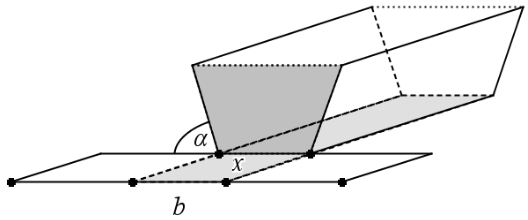
$\left|BC\right| = 160\text{ cm}$; $\left|DC\right| = 100\text{ cm}$
$\left|AE\right| = 120\text{ cm}$; $\left|AF\right| = 60\text{ cm}$



Wie viel Abfall haben wir mindestens?

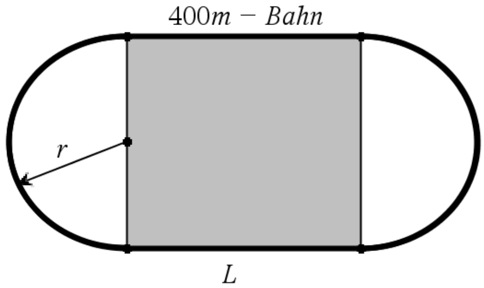
Aufgabe 4.15

Aus einem Blech der Breite b soll eine Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt gefaltet werden. Die Seitenwände werden um den Winkel α zur Horizontalen nach oben gefaltet.
Wie breit muss die Unterseite x der Rinne gemacht werden, damit der Querschnitt maximal wird?
Zahlenbeispiel: $b = 60\text{cm}$, $\alpha = 60^0$



Aufgabe 4.16

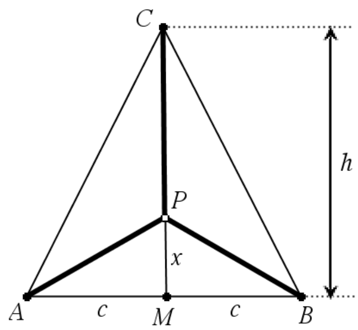
Ein 400 m – Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei Halbkreisen begrenzt, wobei die Halbkreise den Rechteckseiten angesetzt sind (siehe Figur).
Wie gross muss der Kreisradius r sein, und wie lang ein gerades Stück L zwischen den Kurven, wenn das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll? Wie gross ist die maximale Rechteckfläche?



Variante: Wie gross muss der Kreisradius r sein, und wie lang ein gerades Stück L zwischen den Kurven, wenn die ganze Figur maximalen Flächeninhalt haben soll? Wie gross ist die maximale Fläche?

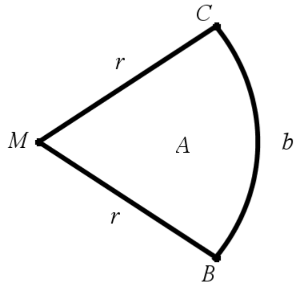
Aufgabe 4.17

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Die Basis ist $2c$ und h die Höhe. P ist ein beweglicher Punkt auf h. In welcher Höhe x über M muss P liegen, damit $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ minimal wird? Um was für einen speziellen Punkt des Dreiecks handelt es sich?

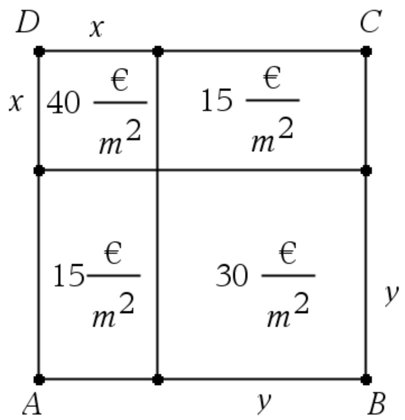


Aufgabe 4.18

Von allen Kreissektoren mit dem Umfang U ist jener mit maximalem Flächeninhalt A gesucht. Wie gross ist dieser Flächeninhalt?



Aufgabe 4.19



Ein quadratförmiger Wandteppich ABCD hat die Seitenlänge 1 m und besteht aus drei Materialien. Das Material für das Quadrat mit der Seitenlänge x kostet 40 € pro Quadratmeter, dasjenige für das Quadrat mit der Seitenlänge y 30 € pro Quadratmeter und die beiden Rechtecke bestehen aus Material das 15 € pro Quadratmeter kostet.

a) Bestimme die Kosten $K(x)$ für den Wandteppich in Abhängigkeit der Quadratseite x.

b) Wie gross sind die Kosten für $x = 0.5\,\mathrm{m}$?

c) Wie gross ist x, wenn der Teppich 30 € kostet?

d) Gibt es einen Teppich, der 20 € kostet? Gibt es einen Teppich, der 45 € kostet?

e) Bestimme x so, dass die Kosten minimal werden.

Ökonomische Funktionen: Kostenfunktion, Umsatzfunktion, Gewinnfunktion

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her. Um x Einheiten des Produkts zu produzieren, entstehen Kosten von $K(x)$ Geldeinheiten. Die Gesamteinnahmen durch den Verkauf von x Einheiten des Produkts nennt man Umsatz $U(x)$ und die Differenz $G(x) = U(x) - K(x)$ heisst Gewinn. Werden x_0 Einheiten eines Produkts hergestellt, so lassen sich die Stückkosten berechnen: $SK(x_0) = \dfrac{K(x_0)}{x_0}$.

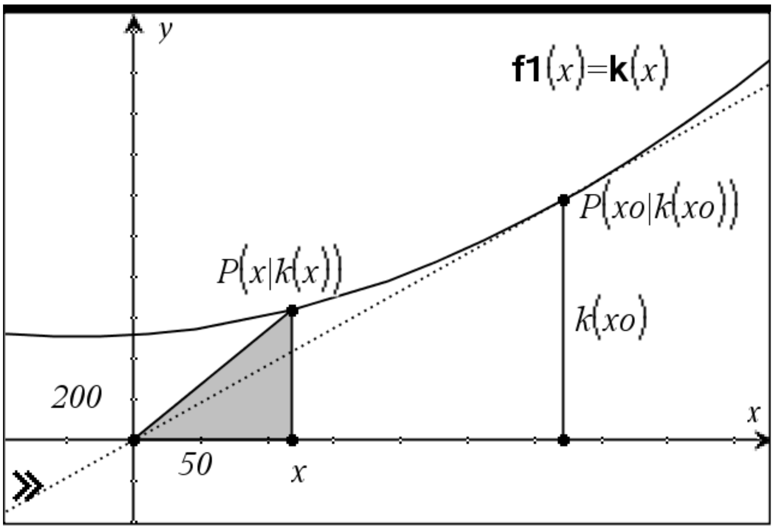
Aufgabe 4.20

Die Gesamtkostenfunktion für die Herstellung eines Produkts ist gegeben durch: $K(x) = 512 + 0.44x + 0.005x^2$. Das Produkt wird zu einem Stückpreis von 4 Geldeinheiten verkauft, d.h. die Umsatzfunktion ist $U(x) = 4x$.

a) Bestimme die Gewinnzone, d.h. alle x für die gilt: $G(x) > 0$.

b) Wie viele Einheiten müssen produziert werden, damit der Gewinn maximal wird? Wie hoch ist der Gewinn dann?

c) Überlege folgende Zusammenhänge: Den Stückkosten $SK(x)$ für eine bestimmte Produktionsmenge x entspricht die Steigung einer Ursprungsgeraden durch den zugehörigen Punkt $P(x \mid K(x))$, der auf dem Graph von $K(x)$ liegt. Die Frage nach den minimalen Stückkosten ist also die Frage nach der Ursprungsgeraden, welche die Kostenfunktion $K(x)$ berührt.

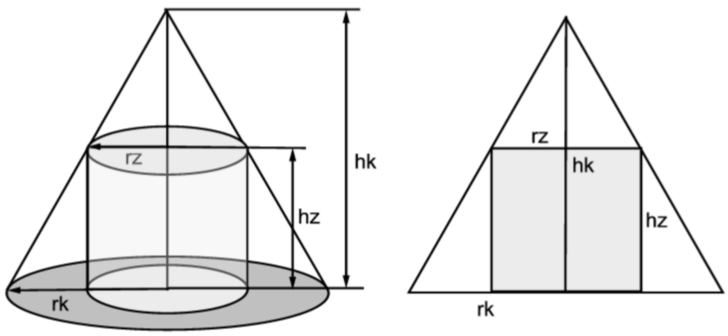


d) Für welche Produktionsmenge x_0 werden die Stückkosten minimal?

e) Überprüfe das Ergebnis. Zeichne $SK(x) = \frac{K(x)}{x}$ mit dem Rechner auf und bestimme das Minimum graphisch.

Beispiel 4: Zylinder im Kegel, maximale Zylinderoberfläche

Einem Kegel mit dem Grundkreisradius rk und der Höhe hk ist ein Zylinder mit dem Zylinderradius rz und der Zylinderhöhe hz einbeschrieben.



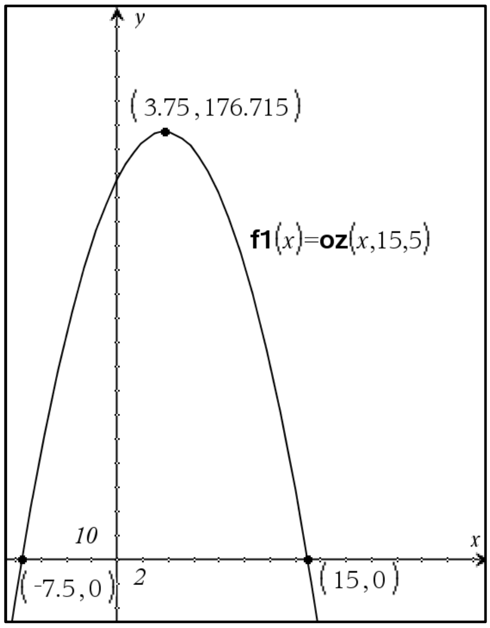
a) Wähle $hk = 15$ und $rk = 5$. Bestimme den Zylinder mit der maximalen Oberfläche.

b) Wähle $rk = 5$ und analysiere die Funktion der Zylinderoberfläche. Untersuche folgende drei Fälle: 1. Fall $hk > rk$, 2. Fall $hk = rk$, 3. Fall $hk < rk$
In welchen Fällen besitzt die Zylinderoberfläche kein Maximum?
Verwende auch einen Schieberegler für c mit $hk = c \cdot rk$.

© Zielfunktion Zylinderoberfläche(hz,rz)	
$o(hz,rz):=2\cdot\pi\cdot rz^2+2\cdot\pi\cdot rz\cdot hz$	*Done*
© Nebenbedingung: Strahlensatz	
$\text{solve}\left(\frac{hk}{rk}=\frac{hk-hz}{rz},rz\right)$	$rz=\frac{(hk-hz)\cdot rk}{hk}$
© Zielfunktion Oberfläche(hz,hk,rk)	
$oz(hz,hk,rk):=o(hz,rz)\vert rz=\frac{(hk-hz)\cdot rk}{hk}$	*Done*
$oz(hz,15,5)$	$-1.3963\cdot(hz-15.)\cdot(hz+7.5)$
© Zylinderhöhe hz für maximale Oberfläche	
© Methode 1: Symmetrie	
$\text{mean}(\text{zeros}(oz(hz,15,5),hz))$	3.75
© Methode 3: fmax()	
$\text{fMax}(oz(hz,15,5),hz)$	$hz=3.75$
© maximale Zylinderoberfläche	
$oz(hz,15,5)\vert hz=3.75$	176.71

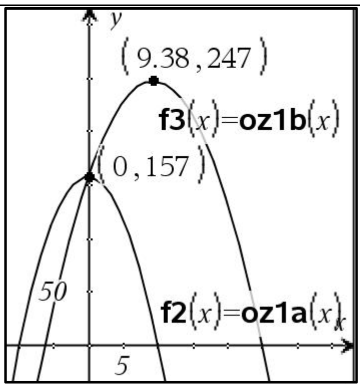
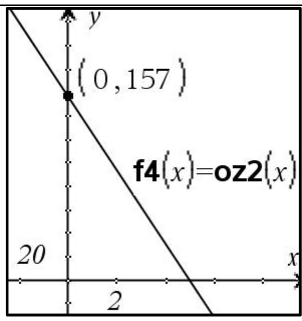
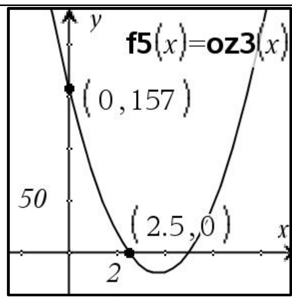
Graphische Lösung

Zylinderoberfläche in Funktion der Zylinderhöhe hz



© Fallunterscheidungen: rk=5 , oz(hz,hk)	
© Fall 1: hk > rk, Beispiele hk=2*rk und hk=5*rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=2\cdot rk$	$-1.5708\cdot(hz-10.)\cdot(hz+10.)$
$oz1a(hz):=-1.57\cdot(hz-10.)\cdot(hz+10.)$	*Done*
$\text{fMax}(oz1a(hz),hz)$	$hz=0$
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=5\cdot rk$	$-1.0053\cdot(hz-25.)\cdot(hz+6.25)$
$\text{fMax}(oz1b(hz),hz)$	$hz=9.375$
© Fall 2: hk = rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=rk$	$-31.416\cdot(hz-5.)$
$oz2(hz):=-31.4\cdot(hz-5.)$	*Done*
$\text{fMax}(oz2(hz),hz)\vert hz\geq 0$	$hz=0$
© Fall 3: hk < rk , Beispiel hk = 0.5*rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=0.5\cdot rk$	$12.566\cdot(hz-5.)\cdot(hz-2.5)$
$oz3(hz):=12.566\cdot(hz-5.)\cdot(hz-2.5)$	*Done*
$\text{fMax}(oz3(hz),hz)\vert 2.5\geq hz\geq 0$	$hz=0$

Definitionsbereich $\mathrm{hz} \in \left[0\,;\,\mathrm{hk}\right]$.

Fall 1: $\mathrm{hk} > \mathrm{rk}$	Fall 2: $\mathrm{hk} = \mathrm{rk}$	Fall 3: $\mathrm{hk} < \mathrm{rk}$
	 $\mathrm{hk} = \mathrm{rk} = 5\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,5\right]$	 $\mathrm{hk} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{rk} = 2.5$ $\mathrm{x} \in \left[0\,;\,2.5\right]$
1a) $\mathrm{hk} = 2\mathrm{rk} = 10\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,10\right]$ 1b) $\mathrm{hk} = 5\mathrm{rk} = 25\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,25\right]$ Nach unten geöffnete Parabeln Für $\mathrm{rk} < \mathrm{hk} < 2\mathrm{rk}$ gibt es nur ein Randmaximum mit $\mathrm{hz} = 0$, also Grund- und Deckkreis (Scheitelpunkt im zweiten Quadranten).	Gerade, die Oberfläche verhält sich linear. Es gibt ein Randmaximum für $\mathrm{hz} = 0$. Die Oberfläche des Zylinders besteht dann aus Grund- und Deckkreis (siehe Fall 1).	Nach oben geöffnete Parabel. Der Scheitelpunkt liegt im vierten Quadranten (Minimum). Auch hier gibt es ein Randmaximum wie im Fall 2 und 1.

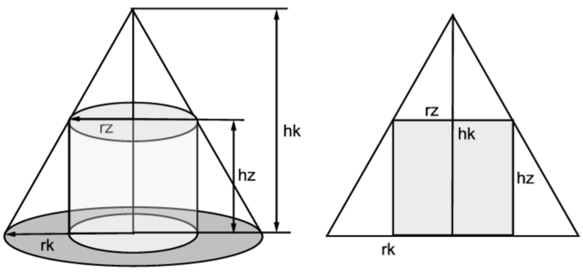
4.2 Nichtquadratische Zielfunktionen

Bestimmung des Maximums / Minimums ohne Differenzialrechnung mit CAS (2 Methoden):

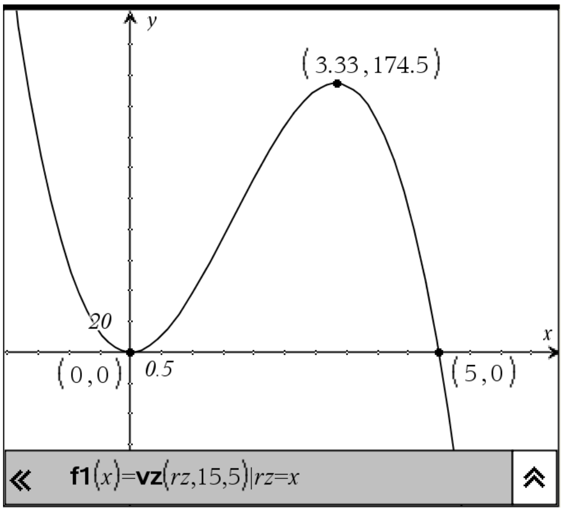
1. Funktionen: fMax() bzw. fMin()
2. Graphisch

Beispiel 5: Zylinder im Kegel, maximales Zylindervolumen

Einem Kegel mit dem Grundkreisradius rk und der Höhe hk ist ein Zylinder mit dem Zylinderradius rz und der Zylinderhöhe hz einbeschrieben. Wähle $\mathrm{hk} = 15$ und $\mathrm{rk} = 5$. Bestimme den Zylinder mit dem maximalen Volumen.



$v(hz,rz):=\pi\cdot rz^2\cdot hz$	*Done*
$\text{solve}\left(\frac{hk}{rk}=\frac{hk-hz}{rz},hz\right)$	$hz=hk\cdot\left(1-\frac{rz}{rk}\right)$
$vz(rz,hk,rk):=v(hz,rz)\mid hz=hk\cdot\left(1-\frac{rz}{rk}\right)$	*Done*
$vz(rz,15,5)$	$-3\cdot rz^2\cdot(rz-5)\cdot\pi$
$\text{fMax}(vz(rz,15,5),rz)$	$rz=-\infty$
$\text{fMax}(vz(rz,15,5),rz)\mid 0\le rz\le 5$	$rz=\frac{10}{3}$
$vz(rz,15,5)\mid rz=\frac{10}{3}$	174.5



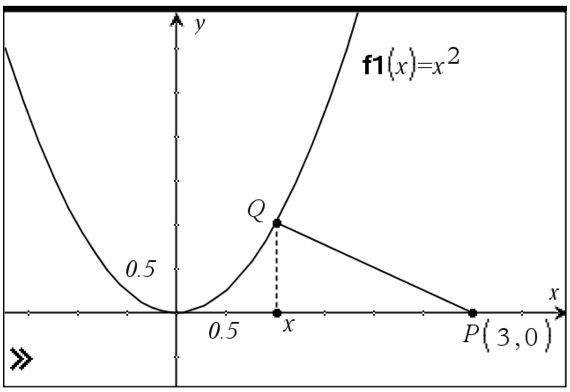
Oben durchgeführte Schritte:

1) Zielfunktion (Zylindervolumen) definieren.
2) Nebenbedingung, Strahlensatz nach hz auflösen, ergibt das Zylindervolumen in Abhängigkeit von rz.
3) Zylindervolumen für $\mathrm{hk}=15$ und $\mathrm{rk}=5$ (Polynom 3. Grades)
4) Da das gesuchte Maximum ein lokales ist, muss der Definitionsbereich beim Anwenden von fMax() eingeschränkt werden $\mathrm{rz}\in[0\,;\mathrm{rk}=5]$
5) Grafische Bestimmung des Maximums und der Nullstellen der Parabel 3. Grades. Beachte: Die Nullstellen liegen nicht symmetrisch zum Maximum!

Aufgabe 4.21

a) Wie gross ist der kleinste Abstand vom Punkt $\mathrm{P}(3\mid 0)$ zur Parabel $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2$?

b) Welcher Punkt der Parabel $\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^2$ hat den kürzesten Abstand zum Punkt $\mathrm{P}(0\mid 4)$?



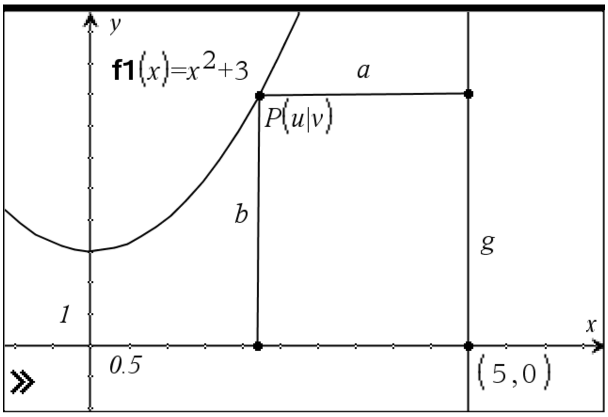
Aufgabe 4.22

Gegeben :

Parabel $p: f1(x) = x^2 + 3$

Gerade $g: x = 5$

Der Punkt $P(u \mid v)$ liegt auf p im 1. Quadranten links von g.



Durch P werden die Parallelen a und b zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Die x-Achse, a, b und g begrenzen ein Rechteck. Wie ist P zu wählen, damit

a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt hat?

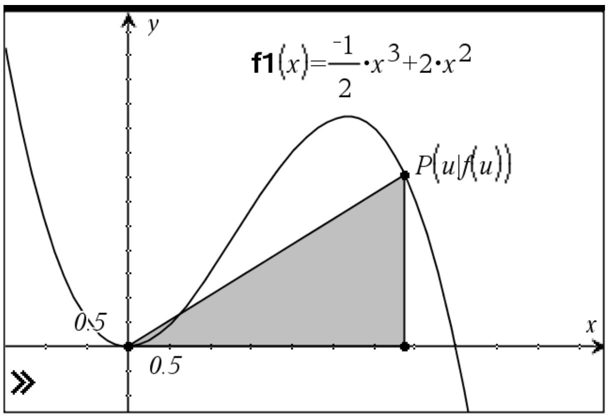
b) das Rechteck - wenn $u < 2$ sein soll - minimalen Flächeninhalt hat?

Aufgabe 4.23

Gegeben ist die Funktion

$f1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

Der Punkt $P(u \mid f(u))$ liegt auf dem Graphen von $f1$.



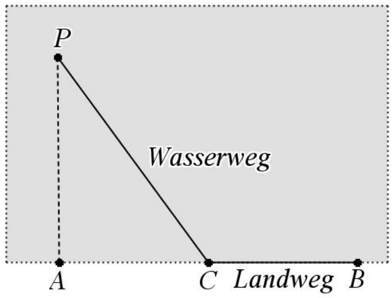
a) Bestimme P so, dass die Dreiecksfläche maximal wird.

b) Das schraffierte Dreieck wird um die x-Achse rotiert. Bestimme P so, dass das entstehende Kegelvolumen maximal wird.

c) Das schraffierte Dreieck wird um die Achse $x = u$ rotiert. Bestimme P so, dass das entstehende Kegelvolumen maximal wird.

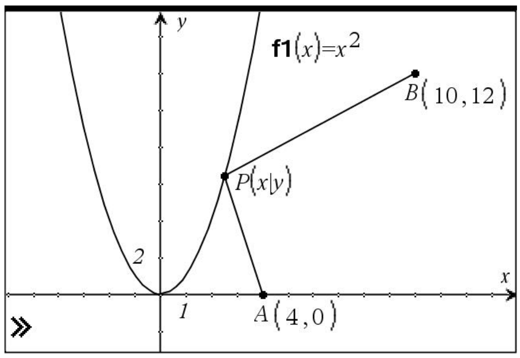
Aufgabe 4.24

Wir sitzen in einem Ruderboot an der Stelle P, welche 5 km vom Ufer entfernt ist ($|PA| = 5\,\mathrm{km}$). Wir wollen zum Punkt B gelangen, welcher durch eine 6 km lange Strasse von A aus erreicht werden kann ($|AB| = 6\,\mathrm{km}$). Wir rudern mit 2 km/h und gehen zu Fuss mit 4 km/h. Bei welchem Punkt C müssen wir landen, damit wir unser Ziel in kürzester Zeit erreichen? Gebe die Länge $|CB|$ an, sowie die minimale Zeit um von P nach B zu gelangen.



Aufgabe 4.25

Kürzester Weg (Streckenzug)
Ein Streckenzug führt von einem Punkt $A(4 \mid 0)$ über einen Punkt $P(x \mid y)$, der auf der Parabel $y = x^2$ liegt, zu einem Punkt $B(10 \mid 12)$. Bestimme den Punkt P auf der Parabel so, dass der Streckenzug $A - P - B$ minimale Länge hat.



Erweiterung: Fermat'sches Prinzip
"Der Lichtstrahl nimmt zwischen zwei Punkten den Weg, zu dessen Zurücklegung er die kürzeste Zeit benötigt." (Pierre de Fermat, 1658). Hieraus leiten sich in der Optik das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz ab.
Für das Reflexionsgesetz gilt: Der kürzeste Weg ist auch der Weg mit der kürzesten Zeit (Lichtgeschwindigkeit konstant). Fasse die Parabel als Spiegel und den Streckenzug $A - P - B$ als Lichtstrahl auf. Zeige, dass für den kürzesten Weg das Reflexionsgesetz gilt. Zeichne in P die Tangente an die Parabel und dann eine Rechtwinklige zur Tangente durch P (Lot).
Wenn L ein Punkt auf dem Lot ist gilt:
$\sphericalangle APL = \sphericalangle BPL$ (Einfallswinkel = Ausfallswinkel)

Pierre de Fermat

Varianten:
P liegt auf einer Geraden: $y = -\frac{4}{5} \cdot x + 20$; $A(20 \mid 0)$, $B(0 \mid 10)$

P liegt auf einer Hyperbel: $y = \dfrac{50}{x - 3}$; $A(15 \mid 0)$, $B(0 \mid 10)$

P liegt auf einer Parabel: $y = 0{,}1 \cdot (x - 15)^2 + 5$; $A(10 \mid 0)$, $B(0 \mid 15)$

Zeige jeweils, dass für den kürzesten Weg das Reflexionsgesetz gilt.

Aufgabe 4.26

Hydraulisch günstige Profile.
Ein Kanal soll einen Querschnitt $A = 1\,\mathrm{m}^2$

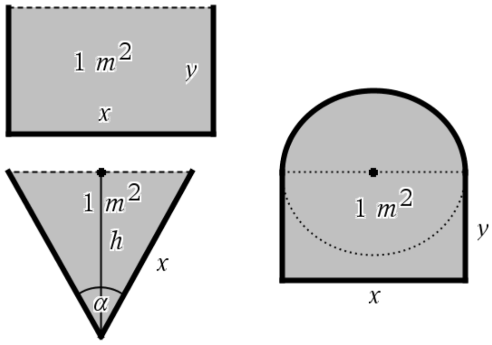
haben. Wegen des Materialaufwandes und aus Reibungsgründen wird der kleinstmögliche benetzte Umfang gefordert. Wie ist der Querschnitt zu dimensionieren, wenn dieser die Form

a) eines oben offenen Rechtecks

b) eines auf der Spitze stehenden oben offenen gleichschenkligen Dreiecks

c) eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis

haben soll.

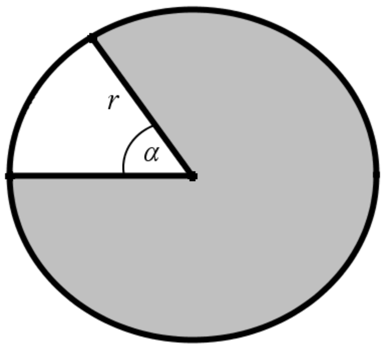


Aufgabe 4.27

Ein kreisförmiges Blechstück mit dem Radius r soll nach Herausschneiden eines Sektors mit dem Winkel α zu einem kegelförmigen Trichter zusammengebogen werden.

a) Berechne das Fassungsvermögen des Trichters als Funktion des Winkels α.

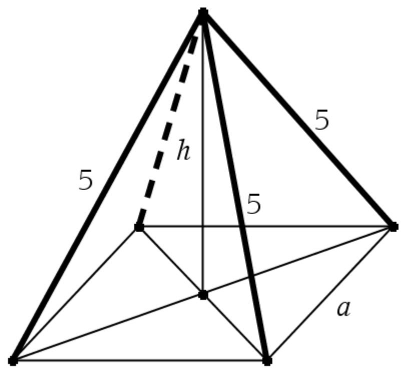
b) Für welchen Winkel α wird das Fassungsvermögen maximal?



Erweiterung:
Aus dem herausgeschnittenen Sektor wird auch ein Kegel geformt. Bestimme den Winkel α so, dass die Summe der beiden Kegelvolumen maximal wird.

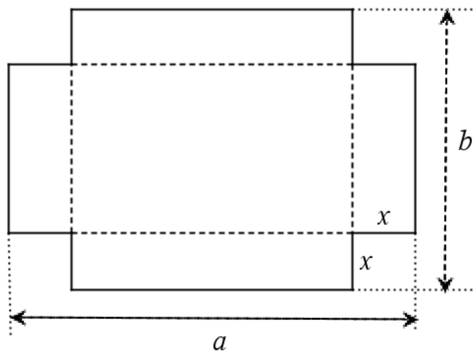
Aufgabe 4.28

Aus vier 5 m langen Stangen soll ein pyramidenförmiges Zelt mit quadratischer Grundfläche errichtet werden. Wie hoch wird es, wenn sein Volumen möglichst gross sein soll?



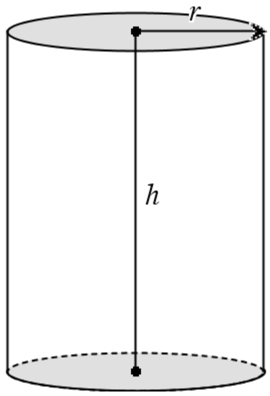
Aufgabe 4.29

Bei einem rechteckigem Karton mit den Seitenlängen a und b wird von den Ecken aus je ein Quadrat der Seitenlänge x abgeschnitten und die restliche Fläche zu einer offenen Schachtel gefaltet. Wie gross muss die Seite x gewählt werden, damit der Inhalt der Schachtel möglichst gross wird?
Zahlenbeispiel: $a = 12\,\mathrm{cm}$ und $b = 8\,\mathrm{cm}$



Aufgabe 4.30

Ein Bierhersteller möchte eine neue Bierdose entwickeln, dessen Volumen $V = 330\,\mathrm{cm}^3$ beträgt. Wir bekommen den Auftrag die Verpackung zu optimieren. Diese hat die Form eines Zylinders, wobei die Deckenflächen aus Metall und die Mantelfläche aus Karton sind. Die Kosten pro cm^2 betragen für Metall 0.05 ct und für Karton 0.03 ct.



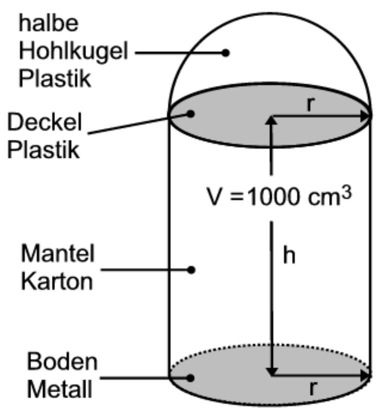
a) Wie müssen der Zylinderradius r und die Zylinderhöhe h gewählt werden, damit die Bierdose möglichst wenig kostet?

b) Wie hoch ist der Preis für eine Dose?

Aufgabe 4.31

Ein Molkedrink Hersteller wollte im Zusammenhang mit der Fussball EM 2008 eine neue Verpackung entwickeln, wobei die Kosten minimiert werden sollten.
Die Verpackung besteht aus einer zylindrischen Büchse, der Mantel soll aus Karton, der Boden aus Metall und der Deckel aus Plastik hergestellt werden. Der Zylinder (Radius r, Höhe h) soll ein Volumen von $1000\,\mathrm{cm}^3$ haben.

Der Büchse wird beim Deckel ein halber Fussball aufgesetzt (hohle Halbkugel aus Plastik).



Die Materialkosten pro cm^2 betragen für das Metall 0.1 ct, für den Plastik 0.08 ct und für den Karton 0.06 ct.

a) Wie müssen r und h gewählt werden, damit die Verpackung möglichst wenig kostet?

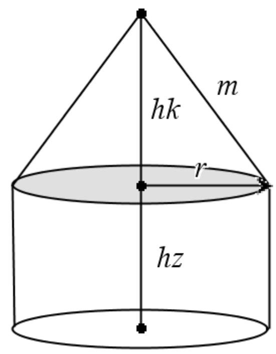
b) Wie gross sind dann die minimalen Kosten für eine Verpackung?

c) Welchen Radius r hat die Verpackung, wenn sie 1 € kostet?

Aufgabe 4.32

Auf einen Zylinder mit dem Radius r und der Höhe $\mathrm{h_Z} = 30\,\mathrm{cm}$ wird ein Kegel mit Radius r, Höhe $\mathrm{h_K}$ und Mantellinie $\mathrm{m} = 90\,\mathrm{cm}$ gesetzt.

Wie müssen Gesamthöhe, bzw. der Radius des Grundkreises sein, damit das Volumen maximal wird?

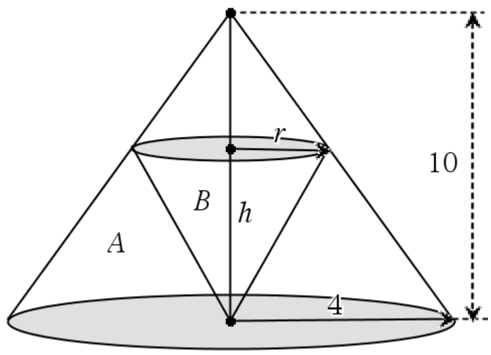


Aufgabe 4.33

Gegeben ist ein Kegel A, dessen Grundfläche den Radius 4 cm hat, und der 10 cm hoch ist. In diesen Kegel A soll ein Kegel B einbeschrieben werden, der mit seiner Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels A steht. Bestimme die Höhe des Kegels B, wenn dieser

a) maximales Volumen hat

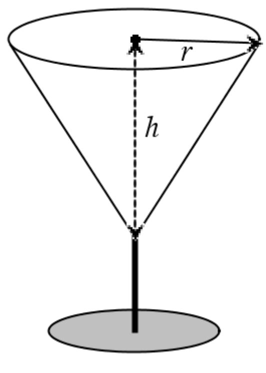
b) maximale Oberfläche hat.



Aufgabe 4.34

Ein kegelförmiges Sektglas mit vorgegebenem Volumen V soll eine minimale Mantelfläche bekommen. Wie sind r und h zu wählen?

Zahlenbeispiel: $\mathrm{V} = 200\,\mathrm{cm}^3$



Quadratische Funktionen und Gleichungen

Dynamisch und CAS-gerecht

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien, der Ausleihe von Rechnern oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Viele weitere Materialien finden Sie z.B. auf unserer umfangreichen Materialdatenbank im Internet. Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

E-Mail: ti-cares@ti.com
Telefonisch von Montag bis Freitag 9.00 – 17.00 Uhr

Deutschland
Telefon: 06196-97 50 15
Telefax: 06196-97 50 44
education.ti.com/deutschland

Österreich
Telefon: 01-50 29 10 007
Telefax: 01-50 29 10 034
education.ti.com/oesterreich

Schweiz
Telefon: 044-27 30 688
Telefax: 022-71 00 036
education.ti.com/schweiz

CL2009NSPIRECASFHM/DACH

XX/SL/1E5/KN