Wie entsteht das Bild des Turms auf dem Bildschirm?

Koordinatensysteme, Projektionen, Licht und Schatten (Teil 1)

Dr. Hubert Weller. Roland Pfleging

Ein reales Objekt wird auf dem Bildschirm dargestellt

Jede Darstellung eines geometrischen Objekts, sei es mit Bleistift und Lineal auf einem Blatt Papier, mit Geodreieck und Kreide an der Tafel oder mit dem Computer auf dem Bildschirm, ist eine Projektion des 3-dimensionalen Raumes in die 2-dimensionale Ebene.

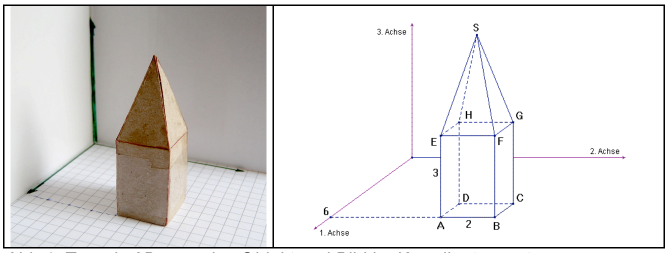


Abb.1: Turm in 3D - reales Objekt und Bild im Koordinatensystem

Um das Schrägbild eines Körpers mit einem Computer darstellen zu können, müssen die Raumkoordinaten geeignet in 2D-Koordinaten transformiert (umgerechnet) werden. Dies ist natürlich abhängig von dem zur Darstellung verwendeten Koordinatensystem.

Welches Koordinatensystem ist sinnvoll? An dieser Stelle werden sicherlich – nicht nur bei gestandenen Lehrkräften – die Ansichten auseinandergehen. Lassen Sie einmal von Schülerinnen und Schülern einen Würfel zeichnen. Mit ein wenig Glück bekommt man dabei schon eine ganze Reihe der Projektionsmöglichkeiten, die man anschließend diskutieren kann. Hier wird zum Einstieg eine Kavalierperspektive, die sich an dem üblicherweise verwendeten Karopapier orientiert (siehe Abb.2, x-Achse 30° mit k=0,5). Dies hat den Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler das von ihnen benutzte Karopapier zum Zeichnen der 3D-Punkte nehmen können.

Die folgenden Aufgaben sind in Unterricht und Workshops eingesetzt worden und dienen dem Heranführen an die Projektion. Anschließend werden einfache Untersuchungen (Schattenkonstruktionen) durchgeführt.

Aufgabe 1

Zeichne den Turm in diesem Koordinatensystem (vgl. Abb.1) und bestimme die räumlichen Koordinaten der Eckpunkte des Turms mit quadratischer Grundfläche (Der Punkt A hat die Koordinaten (6|4|0) und der Punkt S hat als 3. Koordinate z = 6).

Ergänzend zur vorbereitenden Aufgabe 1 geht es nun darum, diesen Turm mit dem TI-Nspire™ darzustellen. Zunächst überlegt man sich an einem bestimmten Punkt, und anschließend allgemein, wie die „Umrechnung" der Koordinaten vorzunehmen ist.

Aufgabe 2

a) Zeichne den Punkt P(5|6|3) in das räumliche Koordinatensystem und lies die Bildkoordinaten in dem 2-dimensionalen Koordinatensystem ab.

b) Bestimme auch für die nachfolgenden Punkte die (2D-) Bildkoordinaten, indem du die Punkte einzeichnest und die entsprechenden Koordinaten abliest: $Q_1(-4|-5|6)$, $Q_2(8|7|1)$ und $Q_3(-2|7|1)$.

c) ***Berechne*** für die folgenden Punkte die (2D-) Bildkoordinaten: $R_1(20|35|70)$ und $R_2(150|-24|160)$

d) Entwickle eine allgemeine Berechnungsformel:
$P_{3D}(x \mid y \mid z) \rightarrow P_{2D}(? \mid ?)$

Lösungshinweise:

Der Zeichnung (vgl. Abb.2) entnimmt man: $P_{2D}(3{,}5|1{,}75)$

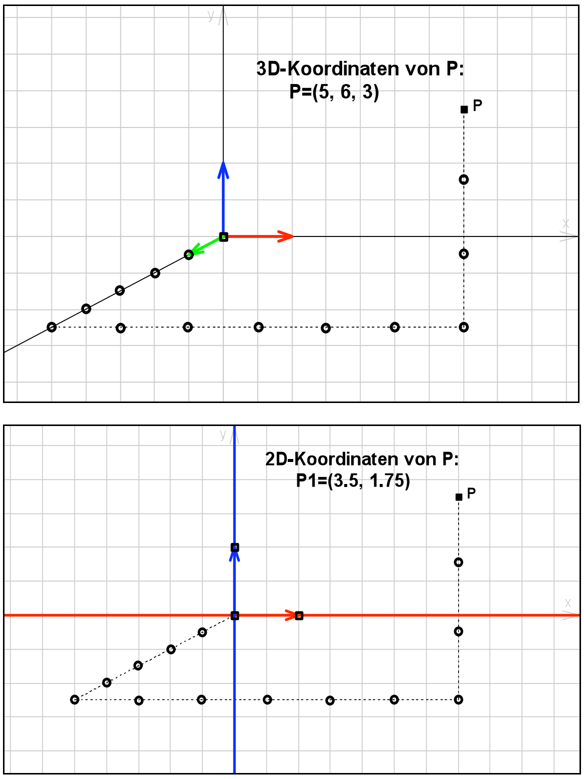


Abb.2a, Abb. 2b: Umwandlung der 3D- in 2D-Koordinaten

Jeder Schritt in Richtung der (räumlichen) x-Achse ist im 2D-Koordinatensystem ein halber Schritt nach links und ein Viertel Schritt nach unten, analog übersetzt man die Schritte in Richtung der (räumlichen) y- und z-Achse und erhält:

$$P_{3D}(x \mid y \mid z) \rightarrow P_{2D}(-0{,}5 \cdot x+y \mid -0{,}25 \cdot x+z)$$

Damit haben wir die Voraussetzung geschaffen, den Turm auf dem Bildschirm darzustellen, dabei nutzen wir die Tabellenapplikation „Lists & Spreadsheet", um die Koordinaten der Punkte einzugeben.

	A p_nam	B px	C py	D pz	E bx	F by	G	H	I	J
◆										
1	a	6	4	0	1.	←0.25·b1				
2	b	6	6	0						
3	c	4	6	0						
4	d	4	4	0						
5	e	6	4	3						
6	f	6	6	3						
7	g	4	6	3						
8	h	4	4	3						
9	s	5	5	6						
10										
11										
12										
13										
14										

F1 =d1−0.25·b1

Abb.3: Tabelle zur Berechnung der Projektion

In der ersten Spalte sind die Namen (p_nam) der Punkte vermerkt, um später Korrekturen vornehmen und ggf. Fehler leichter finden zu können. In den folgenden drei Spalten werden die räumlichen Koordinaten der Punkte (px, py und pz) eingetragen. Für die Berechnung der Projektionskoordinaten bieten sich generell zwei Wege an: Die zellenweise und die spaltenweise Berechnung. Da bei der spaltenweisen Berechnung beim nachträglichen Eintragen von Punkten stets lästige Fehlermeldungen auftreten (es liegen ja die Koordinaten nicht alle gleichzeitig vor) wird hier die zellenweise Berechnung eingesetzt. Hierzu wird in Zelle E1 der Ausdruck „=-0.5*B1+C1“ und in F1 der Ausdruck „=-0.25*B1+D1“ eingegeben, anschließend Kopiert man die Formel (Zellen markieren, an der rechten unteren Ecke bis zum Ende der Punktliste ziehen).

In einem neuen Fenster mit „Graphs“ lässt man sich den Streuplot zu bx und by zeichnen (Menu - 3: Graph Type - 4: Scatter Plot).

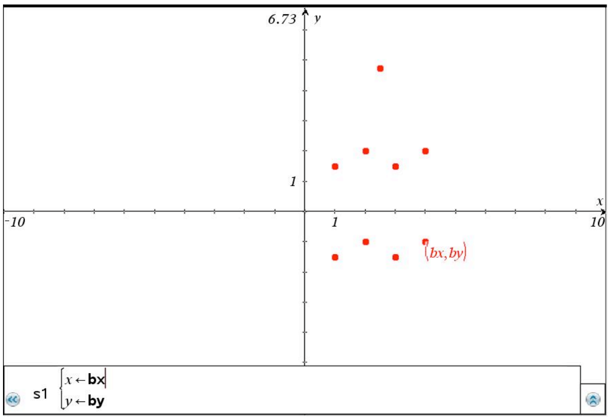


Abb.4: 2D-Streuplot des Turmes

Stimmen die Eingaben und Formeln, sollte der Turm schon zu erkennen sein. Jetzt können die entsprechenden Seiten- und Dachflächen als Polygone (Geometriebefehl im Menu) zusammengefasst werden, deren Flächen auch noch gefärbt werden können. Im folgenden Bild sind zusätzlich die Achsen als Ortsvektoren der Punkte (5|0|0), (0|5|0) und (0|0|5) eingezeichnet und das übliche 2D-Achsenkreuz im Menu ausgeblendet worden. Aber Achtung: Dann lässt sich das Koordinatensystem nicht mehr mit dem Cursor verschieben!

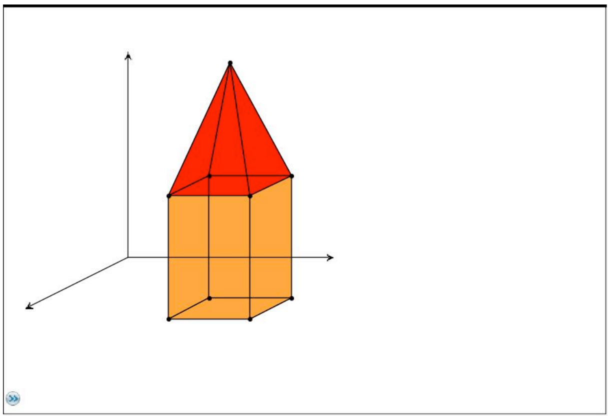


Abb.5: Fertiger Turm mit farbigen Polygonflächen

Für den ersten Einstieg in das Thema reicht es eine Projektion zu betrachten. Will man mehrere verschiedene Projektionen einsetzen, so erhöht sich der Aufwand ein wenig.

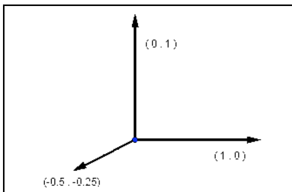
Verschiedene Parallelprojektionen

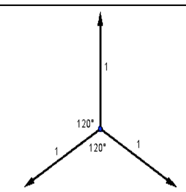
Bisher haben wir die sogenannte **Kavalierprojektion** benutzt. Dieser Begriff stammt aus dem mittelalterlichen Militärwesen. Kavaliere (Reiter) sind Aufbauten auf den Festungsanlagen gewesen, die in dieser Art der Darstellung („von vorne betrachtet“) unverzerrt gezeichnet worden sind.

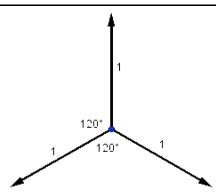
In einer anderen Situation möchte man den Grundriss eines Gebäudes, einer Anlage o.ä. in seinen Abmessungen und Winkeln darstellen. Dabei kommt es darauf an, dass die Achsenvektoren die Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind. Diese **Militärprojektion** wird häufig bei Gebäuden oder anschaulichen Stadtplänen verwendet.

Will man alle Längenverhältnisse unverzerrt darstellen, benutzt man die **Isometrie**. In dieser Darstellung wird der Umriss einer Kugel als Kreis dargestellt. In der Technik wird häufig auch die **Dimetrie** verwendet.

Vereinfacht werden die erforderlichen Umrechnungen, indem man Abbildungsmatrizen verwendet. Die Projektionen werden durch die Bilder der drei räumlichen Basisvektoren bestimmt.

<table>
<tr><td>
</td><td>Kavalierprojektion

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Militärprojektion

$$\begin{pmatrix} -\cos(45°) & \cos(45°) & 0 \\ -\sin(45°) & -\sin(45°) & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Isometrie

$$\begin{pmatrix} -\cos(30°) & \cos(30°) & 0 \\ -\sin(30°) & -\sin(30°) & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

Abbildungen 6: Verschiedene Projektionen

Um diese Projektionen wahlweise benutzen zu können, wird eine „Calculator“-Anwendung mit der Tabelle und dem Grafikfenster verknüpft. Zunächst werden die Abbildungsmatrizen unter entsprechenden Namen abgespeichert.

$kavalier := \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$isometrie := \begin{bmatrix} -\cos(30°) & \cos(30°) & 0 \\ -\sin(30°) & -\sin(30°) & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$militär := \begin{bmatrix} -\cos(45°) & \cos(45°) & 0 \\ -\sin(45°) & -\sin(45°) & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$abb := isometrie$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

4/99

Abb.7: Eingabe der Projektionsmatrizen

Die Matrix *abb* dient zur verallgemeinerten Übergabe der Werte in die Tabelle. Dort müsssen die Spalten E und F durch die folgenden Einträge in eine Matrizennmultiplikation geändert werden:

E1 „=abb[1,1]*B1+abb[1,2]*C1+abb[1,3]*D1“
F1 „=abb[2,1]*B1+abb[2,2]*C1+abb[2,3]*D1“

Die Zahlen in den rechteckigen Klammern selektieren die Matrixelemente. Nach der Eingabe müssen die Formel in E1 und F1 natürlich noch markiert und bis zum Tabelenende kopiert werden, um die Änderung auf alle Punkte anzuwenden.

Wenn man eine andere Perspektive betrachten möchte, so legt man dies z.B. mit abb:=isometrie fest und lässt die Tabelle (z.B. mit CTRL-R) neu berechnen. Danach hat man das neue Bild.

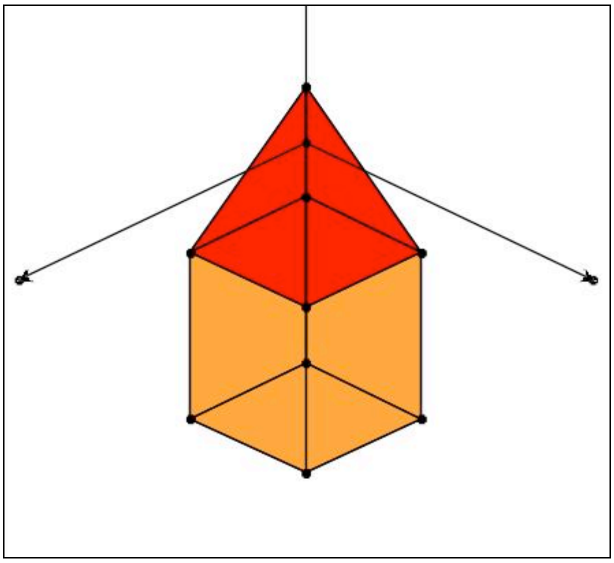


Abb.8a: Turmabbildung in Isometrie

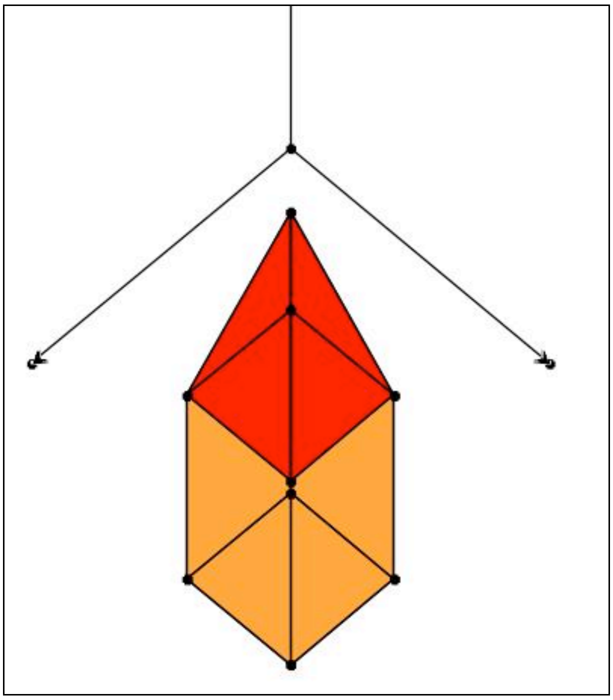


Abb.8b: Turmabbildung in Militärprojektion

Licht und Schatten

Nun hat man ein recht komfortables Werkzeug, mit dem man weitere Untersuchungen und Konstruktionen durchführen kann. So lassen sich beispielsweise Schattenkonstruktionen berechnen und visualisieren. Hierfür lässt sich natürlich der CAS-Teil des TI-Nspire^{TM} gut einbinden

Aufgabe 3

Unser Turm steht vor einer Wand (die xz-Ebene), die Sonne scheint und erzeugt einen Schatten des Turms an der Wand und auf dem Boden. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichne ein Bild des Turms mit Schatten in das Koordinatensystem.

Lösungshinweise:

Der Sonnenstrahl entlang der Pyramiden-Spitze lässt sich durch eine Parameterdarstellung der Geraden mit dem Ortsvektor des Punktes S und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben.

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ 5-3t \\ 6-t \end{pmatrix}$$

In der xz-Ebene wird die 2.Koordinate gleich 0, also ist für den Parameter zu wählen: $t = 5/3$. Die Koordinaten des Schattenpunkts von S sind: S'(25/3 | 0 | 13/3). Analog kann man mit weiteren Punkten des Turmes verfahren.

Im Rechner lassen sich mit der Funktion lweg(t,v) leicht die notwendigen Gleichungen erkennen (bzw. auch lösen) und mit den Lösungen von t die Schattenpunkte bestimmen. Die Eingabe der Ortsvektoren erfolgt hier noch per Hand und auch die Ergebnisvektoren müssen in der Tabelle anschließend manuell eingegeben werden. Ein Automatisieren dieses Weges ist sicherlich möglich, erschwert jedoch schwächeren Schülerinnen und Schülern den Zugang zum Problem.

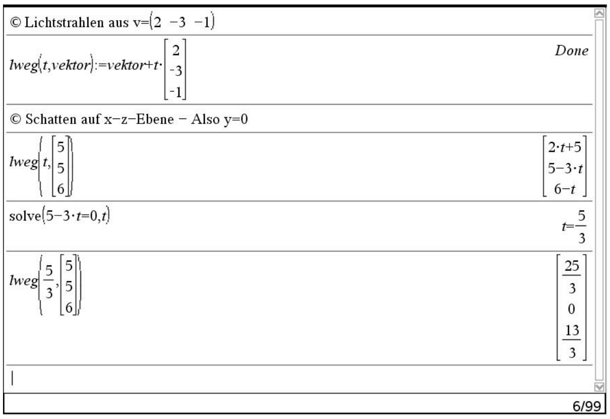
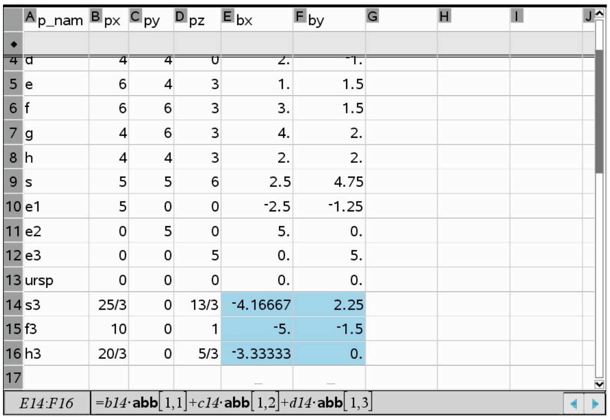


Abb.9: Exemplarische Berechnung eines Schattenpunktes



	A p_nam	B px	C py	D pz	E bx	F by	G	H	I	J
4	d	4	4	0	2.	-1.				
5	e	6	4	3	1.	1.5				
6	f	6	6	3	3.	1.5				
7	g	4	6	3	4.	2.				
8	h	4	4	3	2.	2.				
9	s	5	5	6	2.5	4.75				
10	e1	5	0	0	-2.5	-1.25				
11	e2	0	5	0	5.	0.				
12	e3	0	0	5	0.	5.				
13	ursp	0	0	0	0.	0.				
14	s3	25/3	0	13/3	-4.16667	2.25				
15	f3	10	0	1	-5.	-1.5				
16	h3	20/3	0	5/3	-3.33333	0.				
17										

E14:F16 =b14·abb[1,1]+c14·abb[1,2]+d14·abb[1,3]

Abb.10: Berechnete Schattenpunkte in der Projektionstabelle

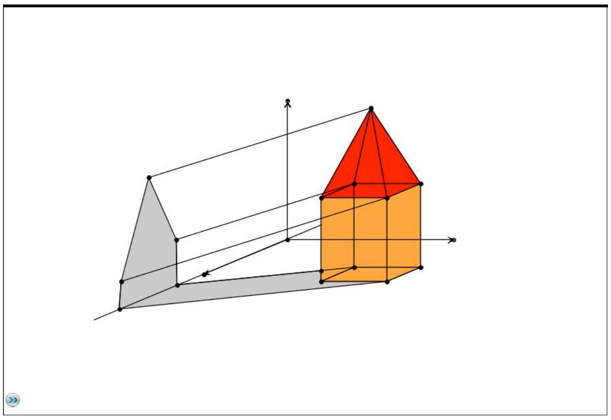


Abb.11: Paralleler Schattenwurf des Turmes

Beim Einzeichnen des Schattenpolygons sollte man darauf achten, den hinteren Fußpunkt des Turmes nicht als Polygonpunkt zu wählen, da ansonsten der Schatten „vor“ der Turmwand eingezeichnet wird. Für eine etwas schönere Optik darf ein wenig mit den Geometriemöglichkeiten des TI-Nspire™ experimentiert werden (Senkrechten und Schnittpunkte konstruieren), was aber auch dem Verständnis dient: Haben senkrechte Linien einen senkrechten Schatten?

Ebenso lässt sich eine andere Form des Schattenwurfes berechnen:

Aufgabe 4

Abends wird der Turm durch eine Lampe, die sich im Punkt L(12|2|4) befindet, angestrahlt. Es wird ein Schatten auf der hinteren Wand (yz-Ebene) und auf dem Boden erzeugt. Berechne und zeichne auch hier ein Bild des Schatten.

Lösungshinweise:

Die Geraden zur Beschreibung der Lichtstrahlen verlaufen alle durch den Punkt L (Aufpunkt) und haben verschiedene Richtungsvektoren (z.B. bzgl. der Punkte S und L):

$$g_{S-L}: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t\cdot(\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OS}) = \begin{pmatrix} 5-7t \\ 5+3t \\ 6+2t \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente muss Null werden, also ist $t = 5/7$. Der Schattenpunkt von S ist demnach: S'(0 | 50/7 | 52/7).

Entsprechend werden die Schattenpunkte von F und H berechnet und das Bild gezeichnet. Hierzu wurden ähnliche Rechnungen mit TI-Nspire™ durchgeführt und die Ergebnisse wieder abgebildet.

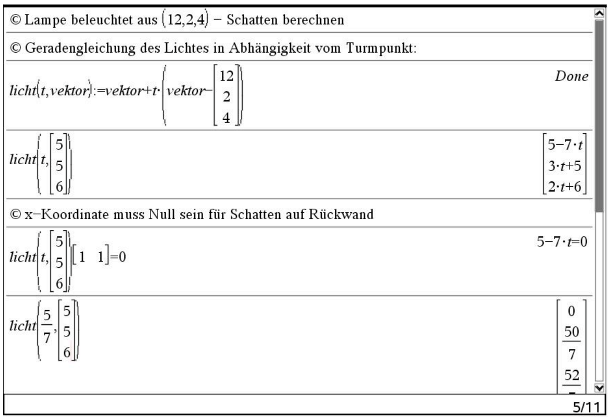


Abb.12: Exemplarische Berechnung eines Schattenpunktes

Um zu zeigen, dass sich das Ganze auch auf einem TI-Nspire™ Handheld realisieren lässt, ist für das Titelbild des Artikels einmal die Handheldansicht des TI-Nspire™CAS CX gewählt worden:

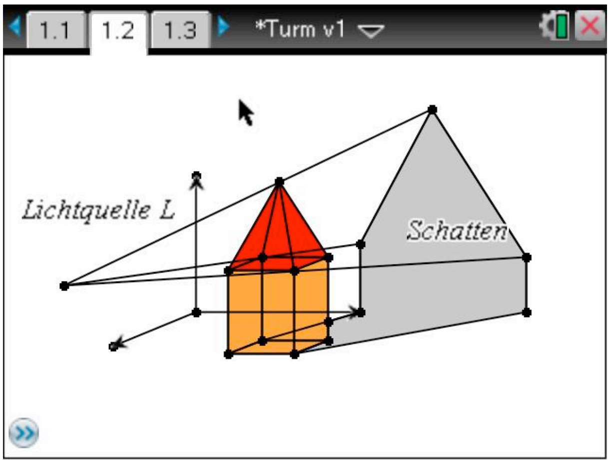


Abb.13: Schattenwurf des Turmes bei Beleuchtung von einer punktförmigen Lichtquelle

Für die folgende Aufgabe, deren Lösung hier nicht beschrieben werden soll, ist schon einiges an Hintergrundwissen (Schnitte von Ebenen und Geraden, etc.) nötig.

Aufgabe 5: Die Pyramiden in Ägypten

In der Nähe von Kairo steht die Cheops- neben der Chephrenpyramide. Die eine wirft einen Schatten auf die andere.

Wir nehmen einmal vereinfacht an, dass die erste Pyramide die folgenden Eckpunkte hat: A(-3|3|0), B(3|3|0), C(3|-3|0), D(-3|-3|0) und E(0|0|5). Die Richtung der Sonnenstrahlen ist vorgegeben durch den Vektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Zeichne ein Bild der Pyramide und ihres Schattens im Koordinatensystem.

b) Eine zweite Pyramide hat die folgenden Eckpunkte: P(-5|-10|0), Q(-5|-6|0), R(-9|-6|0), S(-9|-10|0) und T(-7|-8|3). Zeichne das Bild dieser Pyramide in das gleiche Koordinatensystem. Zeichne den Schatten, den die erste Pyramide auf der zweiten erzeugt. (Berechne die Koordinaten aller dazu notwendigen Punkte.)

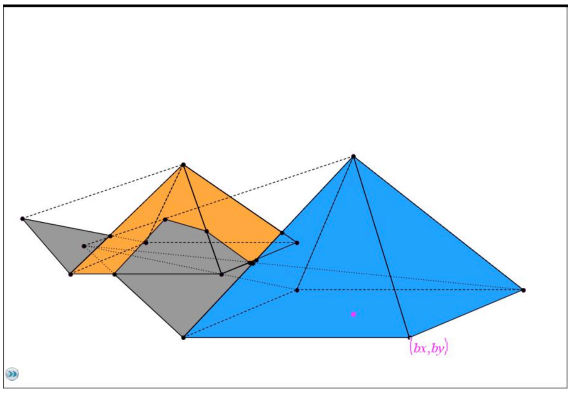


Abb.14: Im Schatten der Pyramiden

Dieser Artikel sollte eine Grundlage für einen praxisorientierten Unterricht liefern, der Objekte und Prozesse aus der Schülerumwelt in den Mittelpunkt stellt. Wer mag, kann das Ganze mit entsprechenden Matrizenabbildungen auch zu höheren optischen Weihen führen und dabei Objekte nicht nur projizieren sondern auch drehen, skalieren und verschieben. Bei Bedarf funktioniert dies auch mit Schiebereglern und automatisch ablaufender Animation - das begeistert nicht nur Schülerinnen und Schüler!

Autoren:

Dr. Hubert Weller,
Fachleiter am Studienseminar in Giessen und Lehrer an der Werner-von-Siemens-Schule Wetzlar
hubert.weller@math.uni-giessen.de

Roland Pfleging,
Lehrer an der Lahntalschule Biedenkopf
pfleging@lahntalschule.de