Ortskurven

Wolfgang Moldenhauer, Wilfried Zappe

In Ergänzung zu unseren Überlegungen in den TI-Nachrichten 1/07 (S. 26-28) und 2/08 (S. 27-31) betrachten wir die Ortskurven, die durch den Schnitt folgender Dreieckstransversalen (m: Mittelsenkrechte; s: Seitenhalbierende; w: Winkelhalbierende) entstehen:

1. $m_c \cap m_a$
2. $h_c \cap m_a$
3. $s_a \cap m_c$ und $m_b \cap s_a$
4. $w_\beta \cap m_c$ und $m_b \cap w_\beta$

Wir legen ein Dreieck ABC so in ein Koordinatensystem, dass A(0|0), B(1|0) und C(t|1) mit $t \in IR$ gilt. Für die Koordinaten des jeweiligen Schnittpunktes S der Transversalen ermitteln wir eine Gleichung bezüglich dieser Vorgaben und vergleichen Sie mit der geometrisch erzeugten Ortskurve.

1. Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechter

O.B.d.A. wählen wir $m_c \cap m_a$. Eine Gleichung für m_c ist x = 0,5. Der Mittelpunkt M_a der Seite a hat die Koordinaten $M_a(0{,}5\cdot(t+1)\,|\,0{,}5)$. Der Anstieg von m_a ist:

$$m_a = \frac{-1}{BC} = \frac{-1}{\frac{-1}{1-t}} = 1-t$$

Damit ergibt sich als Gleichung für m_a:

$$y = f(x) = (1-t)\cdot\left(x - \tfrac{t+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

Wegen x = 0,5 ergibt sich für den Schnittpunkt S:

$$y = f(\tfrac{1}{2}) = (1-t)\cdot\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{t+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot(t^2 - t + 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot(t - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{8} \geq \tfrac{3}{8}$$

Als Resultat ergibt sich der Schnittpunkt zu:

$$S(\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}\cdot(t^2 - t + 1))$$

Wegen $t \in IR$ ist der geometrische Ort in diesem Falle der zur y-Achse senkrechte Strahl x = 0,5 und y ≥ 3/8. Der Wert y = 3/8 wird angenommen, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Veranschaulichung durch Konstruktion der Ortskurve (fett gezeichnet):

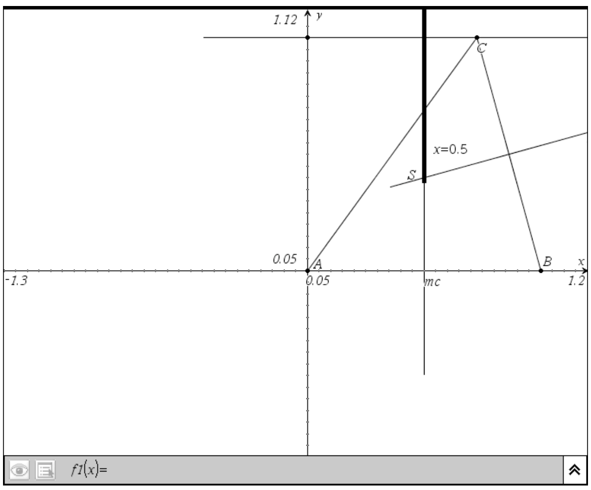

Abb. 1

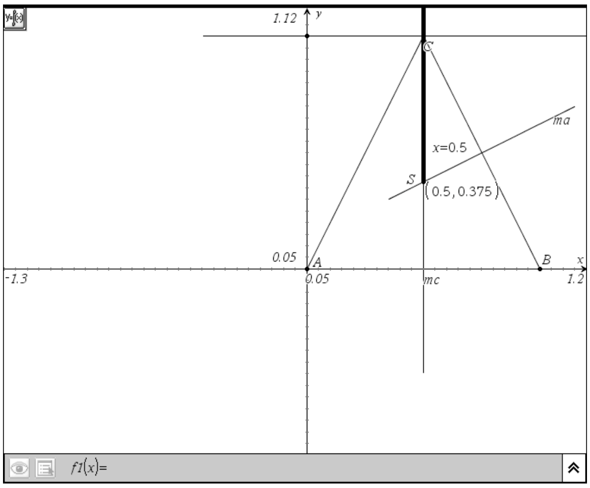

Abb. 2

2. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Höhe

Da $m_c \cap h_c$ wenig Sinn macht (die Geraden sind identisch oder parallel), untersuchen wir o.B.d.A. $h_c \cap m_a$. Für h_c gilt die Gleichung x = t. Setzen wir dies in die Gleichung (1) für m_a ein, so erhalten wir:

$$y = f(t) = (1-t)\cdot\left(t - \tfrac{t+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\cdot(t-1)^2 + \tfrac{1}{2} = (2-t)\cdot\tfrac{t}{2}$$

Die Ortskurve ist also eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel P(1|0,5) und den Nullstellen $t_1 = 0$ sowie $t_2 = 2$. Veranschaulichung durch Konstruktion der Ortskurve (fett gezeichnet) und der Parabel y = f(x) = 0,5·x·(2–x) (im Abb. 4 punktiert gezeichnet):

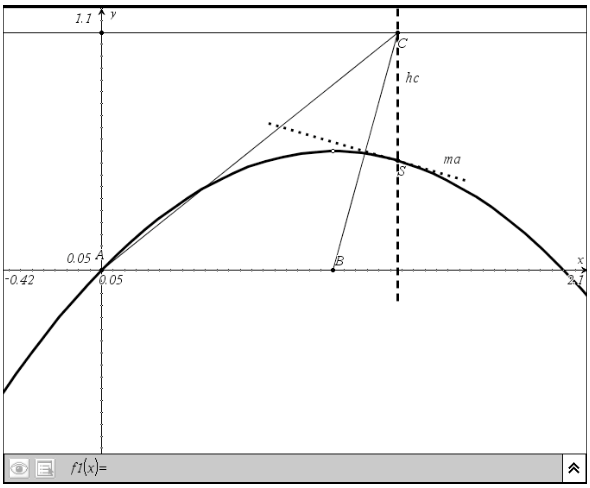

Abb. 3

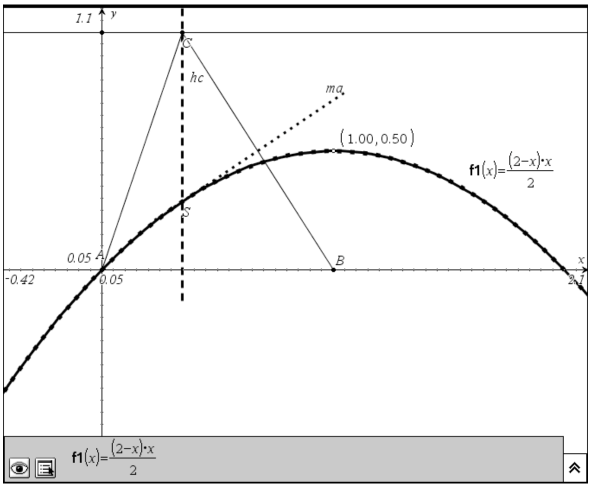

Abb. 4

3. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Seitenhalbierender

Wir wählen zunächst $s_a \cap m_c$. Auf der Seitenhalbierenden s_a liegen die Punkte $A(0|0)$ und $M_a(0{,}5\cdot(t+1)\,|\,0{,}5)$. Dadurch ergibt sich als Gleichung für s_a:

$$y = f(x) = \tfrac{1}{t+1}\cdot x \qquad (2)$$

Die Mittelsenkrechte m_c wird durch $x = 0{,}5$ beschrieben. Für y gilt:

$$y = \tfrac{1}{2\cdot(t+1)}\,.$$

Mit $t \in IR$ $(t \neq -1)$ ist also $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Alle Schnittpunkte von s_a und m_c liegen also auf der Geraden $x = 0{,}5$ mit Ausnahme von $P(0{,}5|0)$. Geometrische Konstruktion der Ortskurve:

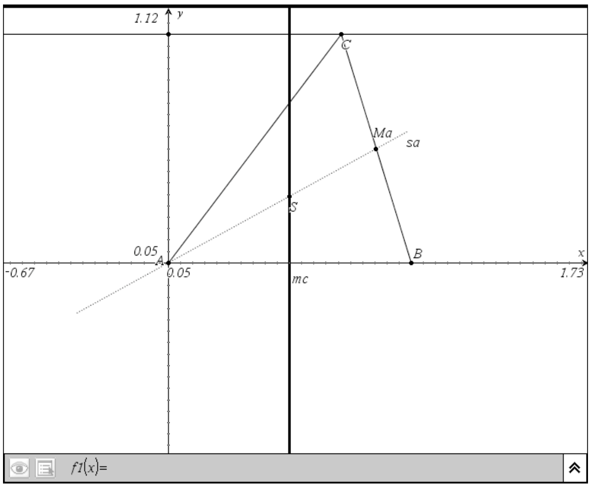

Abb. 5

Betrachten wir nun den Schnitt $m_b \cap s_a$: Der Mittelpunkt M_b der Seite b ist $M_b(0{,}5\cdot t\,|\,0{,}5)$. Der Anstieg der Mittelsenkrechten m_b ergibt sich zu:

$$\frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t$$

Die Gleichung der Mittelsenkrechten m_b lautet:

$$y = f(x) = -t\cdot\left(x - \tfrac{t}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\,. \qquad (3)$$

Bringen wir m_b und s_a gemäß Gleichung (2) zum Schnitt, so ergibt sich:

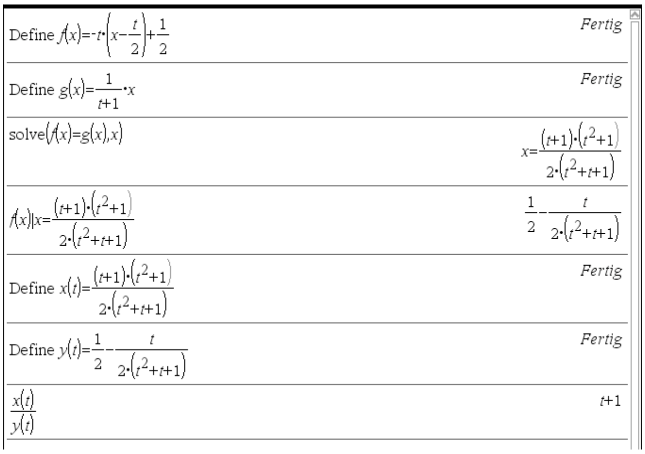

Abb. 6

Aus der letzten Zeile erhalten wir

$$t = \frac{x}{y} - 1$$

Dies setzen wir ein in $y(t)$. Um Zirkeldefinitionen zu vermeiden, bezeichnen wir x mit xx und y mit yy. Der erhaltene Ausdruck wird noch etwas umgeformt, so dass sich schließlich die Gleichung $-2x^2y + x^2 + 2xy^2 - 2xy - 2y^3 + 2y^2 = 0$ ergibt:

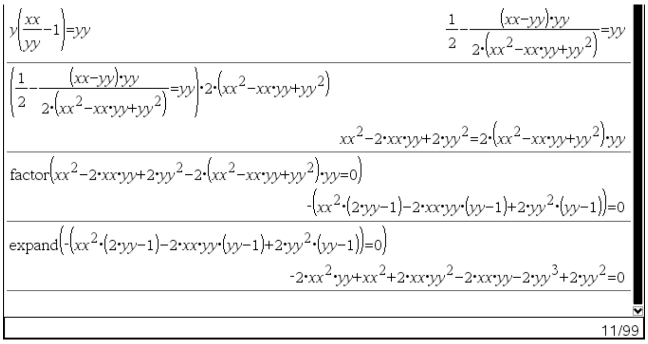

Abb. 7

Die Ortskurve als geometrischer Ort konstruiert, ergibt das Bild in Abb.8. Die parametrisierte Darstellung in Abb.9 zeigt optisch eine Übereinstimmung des Kurvenverlaufs.

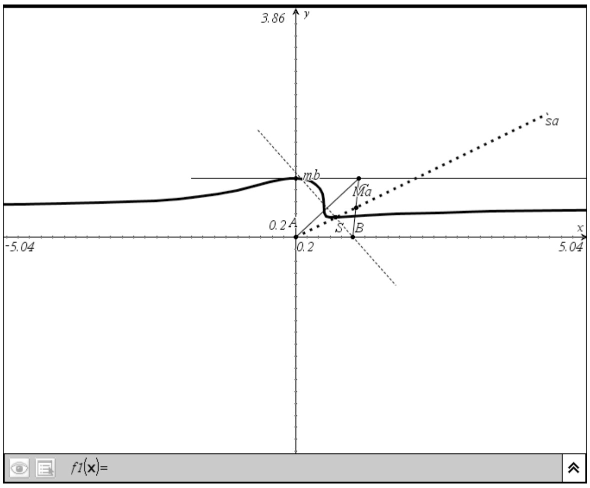

Abb. 8

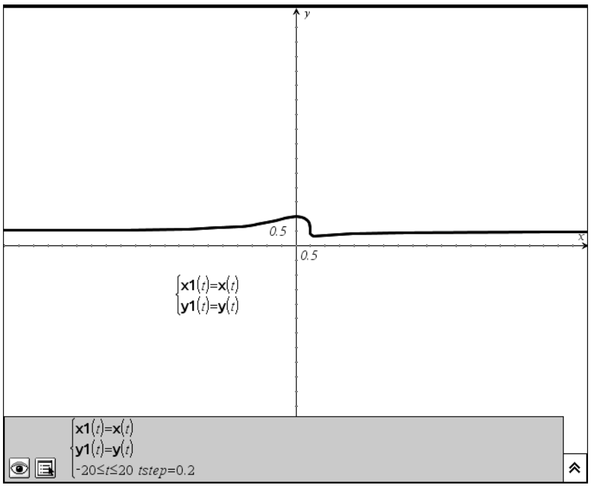

Abb. 9

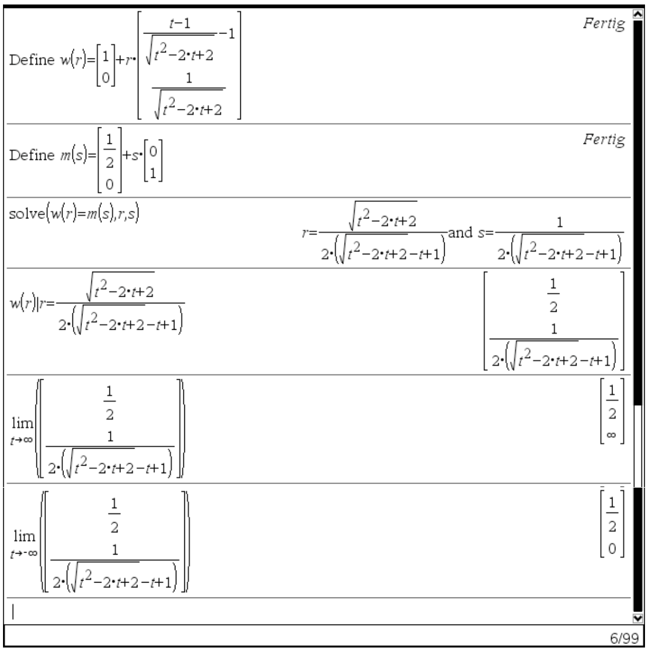

Abb. 10

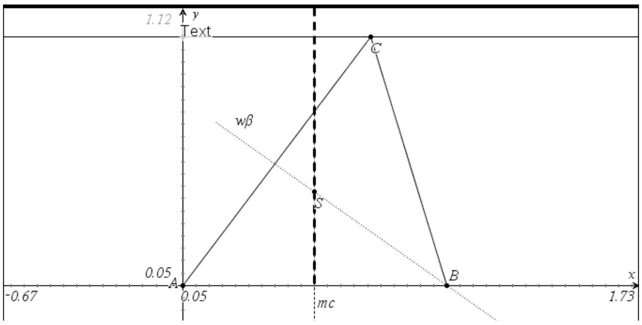

Abb. 11

4. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Winkelhalbierender

Wir untersuchen zunächst $w_\beta \cap m_c$. Es ist anschaulich klar, dass alle Schnittpunkte auf der Mittelsenkrechten selbst und nur oberhalb der x-Achse liegen können, denn die Winkelhalbierende des Winkels $\angle CBA = \beta$ „überstreicht" nur die Halbebene oberhalb der x-Achse. Ein rechnerischer Nachweis kann folgendermaßen geführt werden:

In „Wanderungen“ (TI-Nachrichten 2/08, S.29) haben wir gezeigt, dass sich die Winkelhalbierende w_β beschreiben lässt durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}} - 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}} \end{pmatrix} \text{ mit } r \in IR$$

Für die Mittelsenkrechte m_c gilt die Gleichung $x = 0{,}5$ oder in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in IR\,.$$

Bringen wir diese Geraden zum Schnitt, so ergibt sich, wie die nachstehende Rechnung mit dem CAS zeigt, dass die Ortskurve die Gerade $x = 0{,}5$ mit $y > 0$ ist. Die geometrische Konstruktion bestätigt diese Rechnung. (Die Ortskurve ist fett und strichliert gezeichnet.)

Betrachten wir nun den Schnitt $m_b \cap w_\beta$. Der Schnittpunkt von $w(r)$ und $m_b(s)$ (gemäß Gleichung (3)) wird mit dem CAS ermittelt:

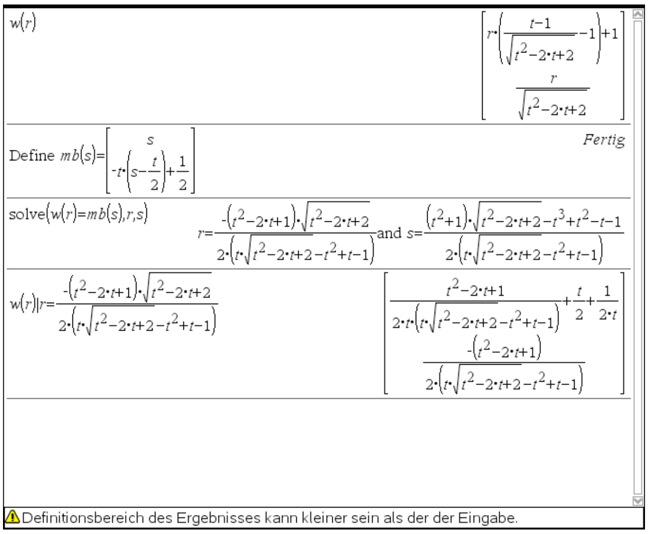

Abb. 12

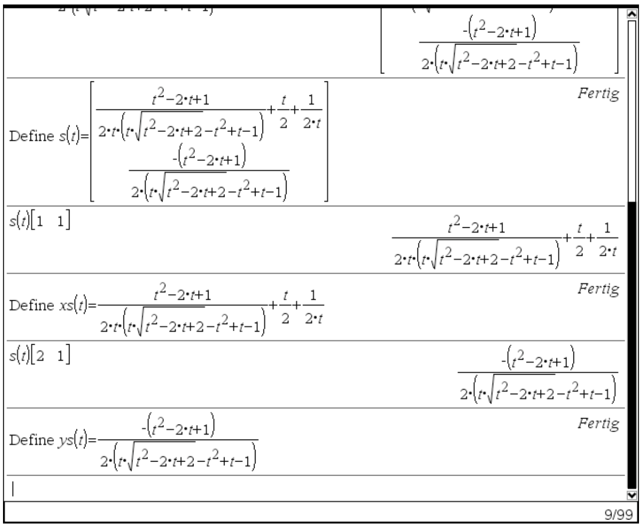

Abb. 13

Die Darstellung der parametrisierten Kurvengleichung entspricht optisch der geometrisch konstruierten Ortskurve.

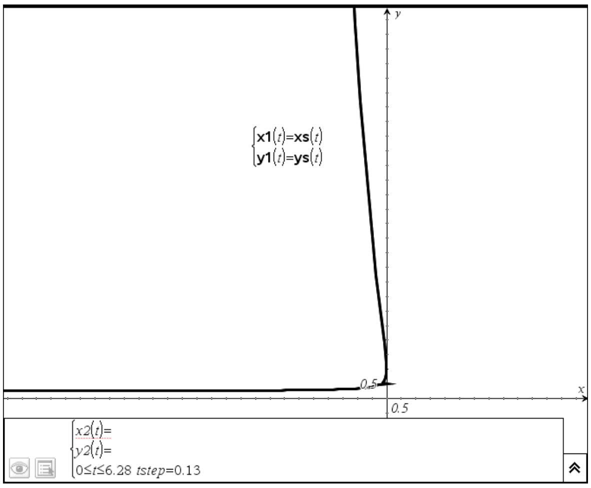

Abb. 14

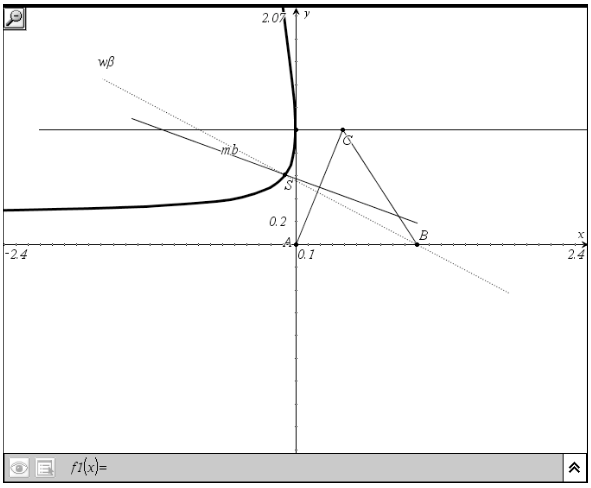

Abb. 15

Wir leiten nun eine parameterfreie Darstellung dieser Ortskurve her. Die Parameterdarstellung war (s. o.):

$$x = \frac{(t-1)^2}{2t\cdot\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}-t^2+t-1\right)}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}$$

$$y = \frac{-(t-1)^2}{2\cdot\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}-t^2+t-1\right)}$$

Nun gilt

$$\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}-(t^2-t+1)\right)\cdot\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}+(t^2-t+1)\right)$$
$$= -(t-1)^2$$

Dies lässt sich mit dem Rechner nachprüfen:

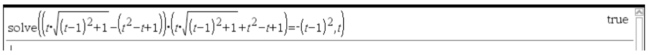

Abb. 16

Wenn wir also Zähler und Nenner bei x und y jeweils mit

$$\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}+(t^2-t+1)\right)$$

erweitern, so erhalten wir nacheinander

$$x = -\frac{(t-1)^2\cdot\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}+(t^2-t+1)\right)}{2t\cdot\left[-(t-1)^2\right]}+\frac{t^2+1}{2t}$$

$$= \frac{1}{2t}\cdot\left(-t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}-t^2+t-1+t^2+1\right)$$

$$x = \frac{t}{2t}\cdot\left(1-\sqrt{(t-1)^2+1}\right) \qquad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\left(t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}+(t^2-t+1)\right)\cdot\frac{-(t-1)^2}{-(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(t^2-t+1+t\cdot\sqrt{(t-1)^2+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{4}\cdot\left(t+\sqrt{(t-1)^2+1}\right)^2 \qquad (5)$$

Rechnerischer Nachweis für den vorigen Umformungsschritt:

Abb. 17

Gleichung (4) ist äquivalent mit

$$\sqrt{(t-1)^2+1} = 1-2x \geq 0\,,$$

also ist $x \leq 0{,}5$ notwendig. Quadrieren liefert:

$$(t-1)^2 = (1-2x)^2-1 = 4x\cdot(x-1) \geq 0\,.$$

Zusammen mit $x \leq 0{,}5$ folgt also sogar $x \leq 0$. Für $t \geq 1$ ergibt das Radizieren:

$$t = 1+2\cdot\sqrt{x\cdot(x-1)}$$

Für $t < 1$ erhält man

$$t = 1-2\cdot\sqrt{x\cdot(x-1)}\,.$$

Diese Resultate führen, eingesetzt in (5), auf

$$y = \frac{1}{4}\cdot\left(t+\sqrt{(t-1)^2+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1+2\cdot\sqrt{x\cdot(x-1)}+1-2x\right)^2$$

$$y = \left(1-x+\sqrt{x\cdot(x-1)}\right)^2 \quad \text{für } t \geq 1,$$

und analog auf

$$y = \left(1-x-\sqrt{x\cdot(x-1)}\right)^2 \quad \text{für } t < 1\,.$$

Natürlich ist in beiden Fällen $x \leq 0$. Die Visualisierung über die graphische Darstellung als parametrische Darstellung (punktiert) und als Funktion zeigt Übereinstimmung!

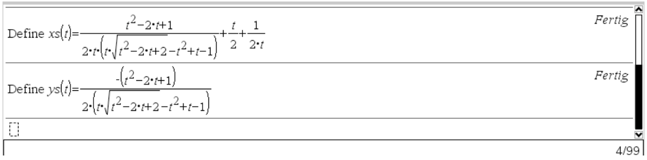

Abb. 18

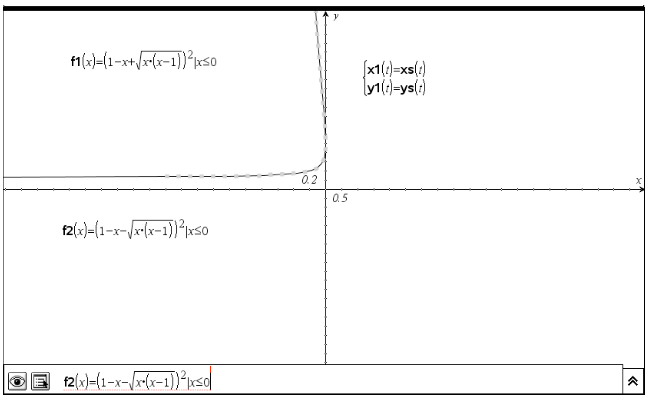

Abb. 19

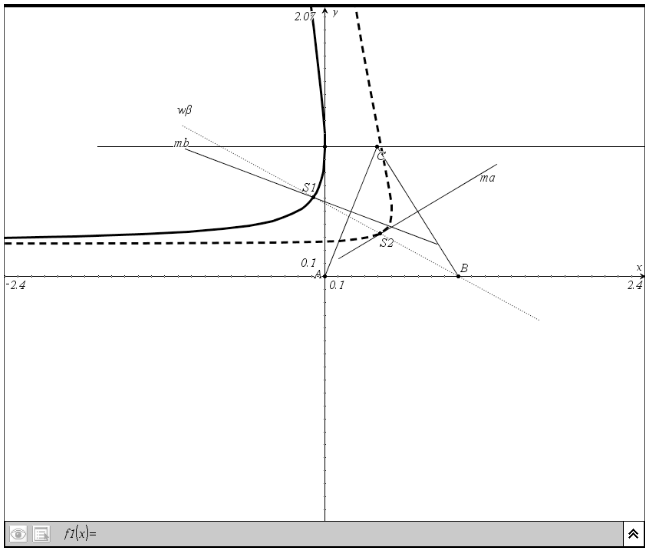

Abb. 20

Der Grund für diese erstaunliche Ähnlichkeit besteht in Folgendem: Als Gleichung für m_a ergab sich:

$$y = f(x) = (1-t)\cdot\left(x - \tfrac{t+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}$$

Die entsprechende Gleichung für m_b lautete:

$$y = f(x) = -t\cdot\left(x - \tfrac{t}{2}\right) + \tfrac{1}{2}$$

Die Struktur beider Gleichungen ist ähnlich und daher ist die graphische Ähnlichkeit der beiden Kurven nicht verwunderlich. Natürlich könnte man die Rechung auch für m_a analog durchführen. Prinzipiell Neues ergibt sich dabei nicht.

Zum Schluss:

Wir zeichnen die Ortskurven $m_b \cap w_\beta$ und $m_a \cap w_\beta$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und finden eine erstaunliche Ähnlichkeit beider Kurven!

Autoren

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (D)
wilfried.zappe@zappe-online.com
Dr. Wolfgang Moldenhauer, Bad Berka (D)
WMoldenhauer@thillm.thueringen.de