Differentialgleichungen für den Fall des Falles

Version vom 18. Juni 2005

Zusammenfassung

Wie bewegt sich ein Körper, der in der Nähe der Erdoberfläche fällt? Diese Frage wurde zu verschiedenen Zeiten verschieden – offenbar nicht immer richtig – beantwortet. Das Problem des fallenden Körpers wird benutzt, um Differentialgleichungen einzuführen. Beim Lösen der Musterprobleme werden drei verschiedene Methoden erprobt:

- Lösen eines diskreten Ersatzproblems: Eulerverfahren
- Umwandeln in eine Kette von algebraischen Problemen: Taylorentwicklung
- Zurückführen auf ein Integrationsproblem: analytische Lösung

Jeder Abschnitt wird durch Übungsaufgaben ergänzt, die den Erfahrungshorizont erweitern sollen. Insbesondere wird sich zeigen, dass sogar in einfachen physikalischen Modellen das Vorbild 'Natur' keineswegs dafür sorgt, dass die Lösungen der Modellgleichungen eindeutig sein müssen. Damit wird die Frage nach Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen bei Differentialgleichungen angetippt.

Der Einsatz von Software – ein CAS-Rechner genügt – wird empfohlen, wenn sich dadurch die Aufmerksamkeit der Lernenden weg vom 'Rechnen' und hin zur *Begriffsbildung* verschiebt. Zudem wird das *Experimentieren* mit einem CAS erleichtert. Die gewonnenen Erfahrungen sollen helfen, die Funktionsweise der SW wenigstens intuitiv zu verstehen. Eine solche Verschiebung kann es aber nur geben, wenn einige einfachere Beispiele erst einmal mit Kopf und Hand bewältigt wurden.

1 Bewegungsgleichungen - Differentialgleichungen

Wir betrachten eine Masse m, gedacht als Massenpunkt, der sich auf der x-Achse bewegt. Die Positionsfunktion $x : t \mapsto x(t)$ gibt für jeden Zeitpunkt t die zugehörige Position $x(t)$ der Masse an. Wer die Positionsfunktion kennt, kann daraus andere interessante Grössen ermitteln, etwa die Geschwindigkeit, die Beschleunigung oder die auf die Masse einwirkenden Kräfte. Die Momentangeschwindigkeit definiert als Grenzwert von mittleren Geschwindigkeiten über Zeitintervalle, die nach 0 streben, lässt sich mit Newtons Notation so ausdrücken:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Die erste Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit $\dot{x}$ beschreibt die Momentangeschwindigkeit. Entsprechend stellt die zweite Ableitung $\ddot{x}$ die Momentanbeschleunigung dar, welche die Masse erfährt. Nach Newtons Kraftgesetz finden wir den Grund für die Beschleunigungen in den jeweils wirkenden Kräften $F(x, \dot{x}) = m\ddot{x}$. Newton hat nun diese Betrachtungsweise umgekehrt: Jede Kraft F, die zur Zeit t auf eine Masse m wirkt, äussert sich durch eine Beschleunigung $\ddot{x} = \frac{1}{m}F$. Diese Beziehung ist ein Beispiel für eine *Differentialgleichung* zur Beschreibung der Positionsfunktion $t : x \mapsto x(t)$. Das physikalische Modell wird formuliert, indem die Abhängigkeit der wirkenden Kraft von den übrigen Grössen wie Position x, Geschwindigkeit $\dot{x}$ und Zeit t als eine Funktion $F : (x, \dot{x}, t) \mapsto F(x, \dot{x}, t)$ beschrieben wird. Die Rekonstruktion der Bahnkurve und der Bewegung des Massenpunktes auf dieser Bahn nennt man 'Lösen' der Differentialgleichung. Das ist ein mathematisches Problem.

Wir sehen also, dass es zwei verschiedene Betrachtungsweisen für Bewegungsgesetze gibt, eine 'integrale' oder globale, bei der die Positionsfunktion als Ganzes vorgelegt ist und aus der wir durch Differentiation die Geschwindigkeitsfunktion oder die Beschleunigungsfunktion gewinnen und das Wirken der Kräfte herleiten können. Bei der zweiten, 'differentiellen' Beschreibung wird durch die Kraftwirkung einzig die momentane, lokale Geschwindigkeitsänderung bestimmt. Es stellt sich dann die Frage, ob wir zu jeder 'differentiellen' Form einer Bewegungsgleichung eine 'integrale' finden können und ob diese Aufgabe eindeutig lösbar sei. Betrachten wir ein einfachstes Beispiel, das Trägheitsgesetz. Bewegt sich ein Massenpunkt kräftefrei, so bewegt er sich geradlinig und gleichförmig. Es gibt also im allgemeinen viele verschiedene Positionsfunktionen, welche zu einem und demselben 'differentiellen' Bewegungsgesetz $\ddot{x} = 0$ passen.

Differentialgleichungen gehören zu den grundsätzlich wichtigen Ausdrucksmitteln bei der mathematischen Modellbildung. Die Entwicklung des eigentlichen Modells bis hin zum Formulieren der Differentialgleichung ist weniger ein mathematisches Problem, als eine Aufgabe, die Fachkenntnisse der Anwender (Physiker, Ingenieur, Biologen,...) verlangt . Die Mathematik wird wesentlich gebraucht zum Untersuchen der Differentialgleichungen mit dem Ziel, die gewünschte Information über die Lösungen zu erhalten. Der Anwender wird schliesslich prüfen, inwiefern die Eigenschaften und Voraussagen des Modells mit Erfahrungen aus der Wirklichkeit übereinstimmen.

2 Differentialgleichungen, Beispiele und Lösungsmethoden

Wer einen schweren, frei fallenden Körper beobachtet wird bemerken, dass dessen Geschwindigkeit beim Fallen zunimmt. Aristoteles formulierte aufgrund solcher Beobachtungen ein Modell über den freien Fall: *Fällt ein Körper aus dem Ruhezustand, so ist seine Geschwindigkeit in jedem Punkt der Bahn proportional zur bisher durchfallenen Wegstrecke.*

Diese Aussage lässt sich in die Form einer Differentialgleichung kleiden. Wir wählen dazu eine Koordinatenachse, nennen wir sie $x-$Achse, deren Nullpunkt die Startposition des fallenden Körpers angibt und deren positiver Teil vertikal nach unten gerichtet ist. Dann lässt sich das Modell des Aristoteles in Newton's Notation so beschreiben:

$\dot{x}(t) = \alpha x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und für eine geeignete Konstante α.

Als Lösung einer Differentialgleichung ist jede differenzierbare Funktion $x : t \mapsto x(t)$ zugelassen, welche in ihrem Definitionsbereich die 'Einsetzprobe' in der Differentialgleichung besteht. Wird zudem die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ erfüllt, so liegt eine Lösung des Anfangswertproblems vor.

Wir werden im folgenden die Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha x$ mit der allgemeinen Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ benutzen, um einige Lösungsverfahren zu testen.

Galileo Galilei hat eine Generation vor Newton gelebt. Er hat bemerkt, dass die nach Aristoteles überlieferte Vorstellung über den freien Fall nicht mit der Beobachtung zu vereinbaren ist. Diese Einsicht ergibt sich, indem die Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha x$ gelöst wird. Differentialgleichungen sind ein Schlüssel zur neueren Physik.

3 Ein einfaches numerisches Verfahren, Eulers Methode

Angenommen, wir kennen die Position x eines Körpers und seine Geschwindigkeit v in einem Zeitpunkt t_0. Dann sind wir in der Lage, für einen andern Zeitpunkt t_1 einen Näherungswert für die Position $\tilde{x}(t_1)$ anzugeben, sofern nur die Geschwindigkeit zwischen t_0 und t_1 fast konstant bleibt. Unter dieser Bedingung gilt $\tilde{x}(t_1) - x(t_0) = (t_1 - t_0)v$. Die Bedingung ist für stetige Funktionen v umso leichter zu erfüllen, als der Betrag von $\Delta t = t_1 - t_0$ klein gehalten wird.

Auf dieser Einsicht beruht das von Euler verwendete, einfache numerische Verfahren, das die Differentialgleichung diskretisiert und durch eine Differenzengleichung ersetzt. Im vorliegenden Beispiel wählen wir eine kleine, positive Zahl Δt und berechnen iterativ

$$\tilde{x}(\Delta t) = x(0) + \Delta t \cdot v(0) = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

und mit $t_k = k \cdot \Delta t$

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k) + \Delta t \cdot \tilde{v}(t_k) = \tilde{x}(t_k)(1 + \alpha \cdot \Delta t).$$

Aufgaben

1. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x$ ist näherungsweise mit Eulers Methode zu lösen je für die beiden Anfangsbedingungen (a) $x(0) = 0$ und (b) $x(0) = 1$.
   Welches sind die Näherungswerte für $\tilde{x}(1)$, wenn die Schrittweite Δt die Werte 1.0, 0.1, 0.01, 0.001, annimmt? Was fällt auf?

2. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x$ ist mit Eulers Methode algebraisch zu behandeln je für die beiden Anfangsbedingungen (a) $x(0) = 0$ und (b) $x(0) = 1$. Welcher Term beschreibt $\tilde{x}(1)$, wenn die Schrittweite $\Delta t = 1/n$ gewählt wird und die rekursive Beschreibung in eine direkt berechenbare Formel umgesetzt wird? Welche Grenzwerte ergeben sich in den beiden Fällen (a) und (b) für $n \to \infty$?

Anstelle einer Lösung für diese beiden Aufgaben behandeln wir das allgemeinere Problem $\dot{x} = \alpha x$ und $x(0) = x_0$ algebraisch. Um $\tilde{x}(t)$ algebraisch zu berechnen, wählen wir $\Delta t = t/n$. Ferner verwenden wir die Abkürzung $\tilde{x}_k$ für $\tilde{x}(k \cdot \Delta t)$. Dann wird

$$\tilde{x}_1 = x_0 + \alpha x_0 \cdot \Delta t = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

und

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \alpha \tilde{x}_k \cdot \Delta t = \tilde{x}_k(1 + \alpha \cdot \Delta t) = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)^{k+1}$$

Somit ist $\tilde{x}_n = x_0(1 + \alpha t/n)^n$ ein Näherungswert für $x(t)$. Ein Grenzübergang mit $n \to \infty$ liefert

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n(t) = x_0 \exp(\alpha t).$$

Die 'Einsetzprobe' zeigt, dass dieser Grenzwert die Differentialgleichung tatsächlich erfüllt.

Wie verhält sich nun die gefundene Lösung im Vergleich zur Wirklichkeit? Für die von Galileo gestellte Aufgabe mit $x_0 = 0$ bewegt sich – gemäss der Berechnung – gar nichts! Falls die Gleichung $\dot{x} = \alpha x$ mit $x(0) = 0$ nur eine einzige Lösung besitzt, ergibt sich also ein Widerspruch zur Erfahrung. In der einen oder andern Form wurde dies offenbar auch Galileo klar. Jedenfalls hat er die überlieferte Lehrmeinung revidiert zur Aussage: *Die Momentangeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ist stets proportional zur Fallzeit.* Als Differentialgleichung formuliert bedeutet dies: $\dot{x} = gt$.

Aufgaben

3. Es sei $f : t \mapsto f(t)$ eine auf $[a, b]$ definierte, stetige Funktion. Welche Näherungslösung liefert das Eulerverfahren für die Differentialgleichung $F'(t) = f(t)$ mit der Anfangsbedingung $F(a) = 0$ und der Schrittweite $\Delta t = (b - a)/n$?
   Besonderes Beispiel: Welche Lösung liefert das Eulerverfahren für die Gleichung $\dot{x} = gt$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$?

4. Die Differentialgleichung $\dot{x} = \beta\sqrt{x}$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und einer Konstanten β soll näherungsweise mit der Methode von Euler gelöst werden. Welche Funktion liefert das Verfahren als Grenzwert? Erfüllt diese Funktion die Differentialgleichung? Angenommen, die Differentialgleichung beschreibt den freien Fall eines Körpers. Wie verhält sich die gefundene 'Lösung' im Vergleich zur Wirklichkeit? Besteht die Funktion $x_\tau : t \mapsto 0$ für $t \le \tau$ und sonst $x_\tau : t \mapsto \frac{1}{4}\beta^2(t - \tau)^2$ für jedes τ die Einsetzprobe mit der betrachteten Differentialgleichung? Welche Folgerungen ergeben sich bezüglich der Eindeutigkeit der Lösungen?

4 Potenzreihen, Newtons bevorzugte Methode

Newton hat bemerkt, dass es für viele (alle?) Funktionen Potenzreihendarstellungen gibt, die wenigstens in der Nähe eines Punktes konvergieren. Angenommen, die gesuchte Lösung zum Problem $\dot{x} = \alpha x$ mit $x(0) = x_0$ ist als Potenzreihe darstellbar, die in der Nähe von 0 konvergiert. Dann lässt sich die Differentialgleichung umschreiben als

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n t^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n.$$

Wenn nun eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in der Nähe von 0 konvergiert und eine Funktion f darstellt, so sind alle Koeffizienten a_n durch die Ableitungen von f an der Stelle 0 gemäss

$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ *eindeutig* festgelegt. Zwei konvergente Potenzreihen $\sum a_n t^n$ und $\sum b_n t^n$ stellen genau dann dieselbe Funktion dar, wenn für alle n gilt $a_n = b_n$. Somit sind wir in der Lage, Gleichungen zwischen Potenzreihen durch eine unendliche Folge von Gleichungen zwischen ihren Koeffizienten zu ersetzen. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich der Reihe nach

$$x_1 = \alpha x_0, \;\; 2x_2 = \alpha x_1, \;\; \dots \;\; kx_k = \alpha x_{k-1}.$$

Dies führt zusammen mit der Anfangsbedingung $x_0 = x(0)$ auf die Reihendarstellung

$$x \,:\, t \mapsto x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n.$$

Wir erkennen darin die für alle t konvergente Exponentialreihe, $x(t) = x_0 \exp(\alpha t)$.

Wir finden also dieselbe Lösung wieder, die wir mit dem Eulerverfahren entdeckt haben. Gegenüber dem Eulerverfahren hat die Potenzreihenmethode den Vorteil, dass in unserem Beispiel die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen wurde unter der Annahme, dass die Lösung überhaupt eine Potenzreihendarstellung besitzt. Wir wissen, dass diese Annahme nicht für alle Funktionen zutrifft.

Aufgaben

5. Die Funktion f besitze die Potenzreihendarstellung $f(t) = \sum a_n t^n$. Lösen Sie die Differentialgleichung $F' = f$ und der Anfangsbedingung $F(0) = 0$ mit der Potenzreihenmethode.
   Behandeln Sie das besondere Beispiel $\dot{x} = gt$ mit $x(0) = x_0$ mit dieser Methode.

6. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \beta\sqrt{x}$ mit $x(0) = 0$ mit der Potenzreihenmethode.
   Hinweis: Statt die gegebene Gleichung zu verwenden, können die Potenzreihen für die Gleichung $(\dot{x})^2 = \beta^2 x$ benutzt werden.
   Was fällt auf beim Vergleich der Lösungen von Aufgabe (6) und Aufgabe (4)?

5 Separation der Variablen

Dieses Verfahren ist eine Art Rechentrick, der die Lösung von Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{x}(t) = f(x(t))g(t)$$

auf zwei Teilprobleme verschiebt:

- eine formale Integration, welche die Differentialgleichung in eine analytische Relation zwischen der Variablen t und der gesuchten Funktion $x : t \mapsto x(t)$ überführt.

- eine formale Auflösung der analytischen Beziehung nach der gesuchten Funktion x.

Beide Teilaufgaben, die formale Integration und die formale Lösung einer nichtlinearen Gleichung, sind nur in Ausnahmefällen durch konkrete Berechnungen mit 'elementaren Funktionen' ausführbar. 'Separation der Variablen' war zu einer Zeit wichtig, da die Fähigkeit zu ausgedehntem numerischem Rechnen nur sehr beschränkt vorhanden war. Der Wunsch, 'geschlossene Lösungen' für eine Differentialgleichung zu erhalten, ist aus dieser historischen Perspektive zu verstehen. Leider ändert das nichts an der Tatsache, dass solche 'geschlossenen

Lösungen' oft gar nicht oder nur dank vereinfachenden Annahmen und Kompromissen beim Modellieren erhältlich sind.

Angenommen, die zu lösende Differentialgleichung sei von der Art

$$\dot{x}(t) = f(x(t))g(t).$$

Ist nun $f(x(t)) \neq 0$ für alle t, so folgt aus dieser Gleichung

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{f(x(\tau))} = \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

falls beide Integrale existieren. Wie eine Variablensubstitution im Integral auf der linken Seite zeigt, erfüllt die Lösung $x : t \mapsto x(t)$, die der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ gehorcht, die Beziehung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_0^t g(\tau)d\tau.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung definiert ein Integral eine Funktion der Art $J : t \mapsto J(x(t))$, auf der rechten Seite steht eine Integralfunktion $I : t \mapsto I(t)$. Gelingt es nun, die beiden Integrale, durch welche die Funktionen I und J definiert sind, formal zu bestimmen, so erhalten wir eine explizit mit elementaren Funktionen dargestellte Gleichung der Art $J(x) = I(t)$. Falls diese Gleichung nach x aufgelöst werden kann, liegt eine explizite Darstellung der Funktion $x : t \mapsto x(t)$ vor, und unser Ziel ist erreicht.

Betrachten wir das Beispiel $\dot{x} = \alpha x$ mit $x(0) = x_0$: Dann liefert die 'Separation der Variablen' die Gleichung

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x} d\tau = \int_0^t \alpha \, d\tau$$

oder ausintegriert:

$$\ln(|x(t)|) - \ln(|x_0|) = \alpha t$$

und nach $x(t)$ gelöst: $x(t) = x_0 \exp(\alpha t)$. Der Fall $x_0 = 0$ muss speziell behandelt werden (siehe Aufgabe 9).

Aufgaben

7. Es sei f eine auf $[a, b]$ definierte, stetige Funktion. Versuchen Sie, die Gleichung $\dot{x} = f(t)$ mit Separation der Variablen zu lösen.
   Was liefert das Verfahren im Fall $\dot{x} = gt$?

8. Es sei $\dot{x} = \beta\sqrt{x}$, $x(0) = x_0$ und β eine Konstante. Welche Lösung liefert 'Separation der Variablen' in diesem Beispiel?
   Ist es zulässig, in der Lösung $x_0 = 0$ einzusetzen?
   Welche Aussage macht das Verfahren für $x_0 = 0$?

9. Ein Eindeutigkeitsbeweis für die Aufgabe $\dot{x} = \alpha x$ mit $x(0) = x_0$.
   Für jede differenzierbare Funktion y definieren wir die Funktion Q mit demselben Definitionsbereich wie y gemäss $Q(t) = y(t)\exp(-\alpha t)$. Dann ist Q gleich oft differenzierbar wie die Funktion y.
   Begründen Sie: 'Genau dann, wenn y eine Lösung von $\dot{x} = \alpha x$ ist, gilt $\dot{Q} = 0$.'
   Mit welcher Überlegung folgt nun die Eindeutigkeit der Lösung?

6 Differentialgleichungen und Modelle für Fallbewegungen

Galileos verbessertes Fallgesetz war ein Erfolg, eine Idealisierung zwar, die aber für schwere Körper und kleinere Fallstrecken gut zu gebrauchen war. Wir werden in diesem Abschnitt das einfache Modell Galileis für die Fallbewegung weiterentwickeln. Bewegt sich ein Körper in der Luft, im Wasser oder einem beliebigen Medium, so wirken Erdanziehung, Auftrieb und eine geschwindigkeitsabhängige Widerstandskraft und bestimmen die Bewegung. Als Beispiele denken wir etwa an die Bewegung eines Fallschirms oder eines Ballons oder die Bewegung eines Fasses, das im Meer versenkt wird.

Wir betrachten einen Körper, etwa eine Kugel, der in einem ruhenden, Medium fällt. Die Erdanziehung G, die Dichte des Mediums und damit auch die Auftriebskraft A sollen von der Ortskoordinate x unabhängig sein. Wir wählen wieder eine x-Achse, die zum Erdmittelpunkt zeigt. Die Widerstands- oder Reibungskraft, die der Körper bei der Geschwindigkeit v erfährt, soll mit $R(v)$ bezeichnet werden. Auf das interessante, aber heikle Problem der Modellierung der Funktion R treten wir nicht ein. Wir halten uns an zwei Musterfälle: laminare und turbulente Strömung.

- Für die Bewegung einer Kugel in einer 'zähen' Flüssigkeit (laminare Strömung) hat Stokes ein Widerstandsgesetz der Form $R(v) = K_1 v$ angegeben. In der Konstanten $K_1 < 0$, gehen die Materialeigenschaften des Mediums und die Geometrie des Körpers ein.

- Newton hat ein Gesetz für den Widerstand in einer turbulenten Strömung abgeleitet. Es lautet: $R(v) = K_2 v^2$. Wiederum ist $K_2 < 0$ eine Konstante, welche die Geometrie des Körpers und Eigenschaften des Mediums zusammenfasst. Die Erfahrung zeigt, dass dieses Gesetz Newtons mit guter Näherung verwendet werden kann bei der Bewegung von Körpern in Medien, die zu Wirbelbildung neigen, sofern die Geschwindigkeiten nicht in die Nähe der Schallgeschwindigkeit kommen.

Für ein Nebeltröpfchen ist Luft ein 'zähes' Medium, für ein Hagelkorn ist sie es nicht. Welches der beiden Gesetze zur Anwendung kommt, entscheidet man in der Praxis durch Experimente oder anhand der Grösse der sogenannten *Reynoldszahl*. Diese hängt ab von der Grösse der betrachteten Körper und vom Medium.

Die Bewegungsgleichung für den Körper mit der Masse m ergibt sich aus dem Kraftgesetz

$$m\dot{v} = A + G + R(v).$$

Da die Erdanziehung G und der Auftrieb A als Konstante betrachtet werden sollen, fassen wir deren Wirkung zusammen zu $C = A + G$. Mit den Abkürzungen $c = C/m$ und $k_i = K_i/m$ erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{v} &= c + k_1 v\,, \quad \text{wenn das Gesetz von Stokes angenommen wird.} \\ \dot{v} &= c + k_2 v^2\,, \quad \text{wenn Newtons } v^2\text{-Gesetz gültig ist.} \end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass die Werte der Konstanten c, k_1, k_2 berechnet oder experimentell bestimmt werden können.

6.1 Aufgaben zur Modellgleichung $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{c} + \mathbf{k_1 v}$

10. Entwickeln Sie ein Computerprogramm, welches das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = c + k_1 v \quad \text{mit } v(0) = v_0$$

näherungsweise mit Hilfe des Eulerverfahrens bestimmt. Die Konstanten c, k_1, die Schrittweite h und v_0 sollen wählbar sein. Als Ausgabe wird der Graph der Näherungslösung $\tilde{v} : t \mapsto \tilde{v}(t)$ gewünscht. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und verschiedenen Schrittweiten und notieren Sie ihre diesbezüglichen Beobachtungen.

11. Bestimmen Sie eine Näherungslösung für die Gleichung $\dot{v} = c + k_1 v$ unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ mit einem Potenzreihenansatz. Dabei soll es genügen, die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe zu bestimmen. Was ist am Ergebnis bemerkenswert?

12. Es sei $v_0 = 0, k_1 < 0, c > 0$. Dann machen Versuche mit dem in Aufgabe (1) entwickelten Programm oder physikalische Intuition plausibel, dass die Funktion v monoton wächst, bis sich zwischen Erdanziehung und Widerstandskarft ein Gleichgewicht einstellt. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_∞ ist also charakterisiert durch $\dot{v}_\infty = c + k_1 v_\infty = 0$ also $v_\infty = -c/k_1$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Konstante v_∞ eine Lösung der Modellgleichung ist.

   (b) Welches ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit für ein Nebeltröpfchen von 10^{-5}m Radius in ruhender Luft von 20° C? Wie hängt diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit allgemein vom Radius des Tröpfchens ab?
   Hinweis: Nach dem Gesetz von Stokes ist die Widerstandskraft $R(v) = -6\pi\eta r v$, wobei $\eta = 1.82 \cdot 10^{-5}$ Nsm^{-2} die Viskosität der Luft bei $20°C$ bezeichnet, die Dichte von Wasser ist 1000 [kgm^{-3}], die Erdbeschleunigung $g = 9.81$ [ms^{-2}].

   (c) Angenommen, es sei $c + k_1 v \neq 0$ für alle t, dann lässt sich 'Separation der Variablen' auf die Gleichung $\dot{v} = c + k_1 v$ anwenden. Lösen Sie die Differentialgleichung mit dieser Methode und untersuchen Sie die Abhängigkeit der Lösungen von der Grösse von v_0 im Vergleich zu v_∞. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Positionsfunktionen.

   (d) Eine Methode zur Beseitigung von giftigen Abfällen besteht darin, die Giftstoffe zu verbrennen und allfällige Rückstände mit Zement in Fässern zu vergiessen. Diese Fässer werden anschliessend im Meer versenkt. Wir interessieren uns für die Aufprallgeschwindigkeit eines solchen Fasses auf dem Meeresgrund.
   Daten: Fassvolumen 0.25 [m^3], Dichte des Fassinhaltes 2000 [kgm^{-3}]
   Dichte des Seewassers 1050 [kgm^{-3}]
   Widerstandsfunktion $R(v) = -K_1 v$, mit $7.5 \leq K_1 \leq 10$ [Nsm^{-1}], einem experimentell bestimmten Wert.

   - Welche Grenzgeschwindigkeiten stellen sich in den Extremfällen ein?
   - Stellen Sie eine Tabelle her für die Sinkgeschwindigkeiten des Fasses in 10, 100, 200, 500, 1000 [m] Tiefe bei einem mittleren Wert für K_1.
   - Welche Kritik verdient diese Modellrechnung?

6.2 Aufgaben zur Modellgleichung $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{c} + \mathbf{k_2 v^2}$

13. Entwickeln Sie ein Computerprogramm, welches das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = c + k_2 v^2 \quad \text{mit } v(0) = v_0$$

näherungsweise mit Hilfe des Eulerverfahrens bestimmt. Die Konstanten c, k_2, die Schrittweite h und v_0 sollen wählbar sein. Als Ausgabe wird der Graph der Näherungslösung $\tilde{v} : t \mapsto \tilde{v}(t)$ gewünscht.

Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und verschiedenen Schrittweiten und notieren Sie ihre diesbezüglichen Beobachtungen. Von besonderem Interesse sind hier auch Experimente mit relativ grossen Schrittweiten, bei denen die Diskretisierungsfehler offensichtlich werden. Das diskretisierte Modell bietet Gelegenheit, chaotisches Verhalten eines Modellsystems zu entdecken.
Für die Näherungslösungen der Differentialgleichung muss die Schrittweite $h > 0$ so klein gewählt werden, dass sich die Diskretisierung nicht merklich auswirkt, aber so gross, dass sich die Rundungsfehler aus den vielen einzelnen Eulerschritten nicht anhäufen. Suchen Sie experimentell eine 'optimale' Schrittweite h.

14. Lösen Sie die Gleichung $\dot{v} = c + k_2 v^2$ unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ näherungsweise mit einem Potenzreihenansatz, wobei nur die ersten vier Koeffizienten exakt zu bestimmen sind. Welche Verbesserungen zum Gesetz von Galilei ergibt sich aus dem so ermittelten Anfangsstück der Potenzreihendarstellung, falls $|k_2| \ll |c|$ ist? Was ist bemerkenswert am Ergebnis?

15. Es sei $v_0 = 0$, $k_2 < 0$, $c > 0$. Dann machen Versuche mit dem in Aufgabe (1) entwickelten Programm oder physikalische Intuition plausibel, dass die Funktion v monoton wächst, bis sich zwischen Erdanziehung und Widerstandskarft ein Gleichgewicht einstellt. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_∞ ist also charakterisiert durch $\dot{v}_\infty = c + k_2 v_\infty^2 = 0$ also $v_\infty = \sqrt{-c/k_2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Konstante v_∞ eine Lösung der Modellgleichung ist.

   (b) Welches ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit für ein Hagelkorn von 10^{-2} [m] Radius in ruhender Luft von 1.2 [kgm^{-3}] Dichte? Wie hängt diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit allgemein vom Radius des Hagelkorns ab?
   Hinweis: Nach Newtons Widerstandsgesetz gilt allgemein für die Widerstandskraft $R(v) = -\frac{1}{2} c_w \rho S v^2$, wobei S die Querschnittsfläche des fallenden Körpers bezeichnet, der sogenannte Widerstandsbeiwert c_w eine Konstante ist, welche durch die Geometrie des fallenden Körpers bestimmt wird und ρ die Dichte des Mediums bezeichnet. Für ein kugelförmiges Hagelkorn vom Radius r wird $c_w = 0.47$ und $S = \pi r^2$. Die Dichte von Eis ist mit 1000 [kgm^{-3}] hinreichend genau angegeben. Die Erdbeschleunigung misst g = 9.81 [ms^{-2}].

   (c) Lösen Sie die Modellgleichung unter der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ unter der Annahme, dass $c + k_2 v^2 \neq 0$ gilt mit 'Separation der Variablen' und diskutieren Sie die Lösungen für verschiedene Startwerte v_0 im Vergleich zu v_∞.

   (d) Wir betrachten einen Fallschirm, der die Form einer nach unten geöffneten Halbkugel (mit einem Loch beim Pol) besitzt und rechnen mit $c_w = 1.2$. Wie gross muss der Durchmesser dieser Halbkugel sein, damit der Fallschirm einer Masse von 100 [kg] in Luft der Dichte $\rho = 1.2$ [kgm^{-3}] die Grenzgeschwindigkeit von 5

[ms^{-1}] verleiht?
Welche Aufprallgeschwindigkeit erfährt jemand, der aus 1 [m] Höhe auf den Fussboden springt?

(e) Grenzgeschwindigkeit bei variabler Dichte.
Ein Körper der Masse m, der aus grösserer Höhe abstürzt, erreicht die Grenzgeschwindigkeit praktisch bereits nach kurzer Fallzeit. Allerdings ist nun die Luftdichte nicht konstant. Wir erhalten mit $k_2 = -\frac{1}{2m} c_w \rho S$ die dichte- und somit höhenabhängige Näherungsformel für die Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{-\frac{c}{k_2}} = \sqrt{\frac{2mc}{c_w \rho S}} = V \rho^{-1/2}.$$

Dabei bezeichnet die Proportionalitätskonstante V die Grenzgeschwindigkeit in Luft der Dichte 1. Bleiben wir bei unserer Konvention über die Wahl der x-Achse, so gilt für die Dichte ρ in einer Modellatmosphäre mit konstanter Temperatur $T = 0°C$ die Differentialgleichung

$$\rho'(x) = 1.25 \cdot 10^{-4} \rho(x)$$

unter der Anfangsbedingung $\rho(0) = 1.25$ [mkg^{-3}] auf Meereshöhe.
In der meteorologischen Forschung werden Radiosonden mittels Ballonen in grosse Höhen getragen. Während des Aufstiegs werden Messdaten zur Erde übertragen. Eine Bodenstation bestimmt die Position der Sonde. Nach dem Platzen des Ballons stürzt die Sonde zur Erde. Früher wurde der Fall der Sonde durch einen Fallschirm gebremst. Seit einigen Jahren sind so leichte Sonden im Einsatz, dass man sich überlegt, ob der Fallschirm noch nötig sei. Bei Experimenten wurden frei fallende Sonden mit Radargeräten verfolgt, allerdings konnte die Fallgeschwindigkeit wegen des Horizontes nur in grösserer Höhe gemessen werden. In 10 [km] Höhe (d.h. $x = -10^4$) wurde eine Grenzgeschwindigkeit von 20 [m/s] bestimmt. Welche Funktion beschreibt die Grenzgeschwindigkeit der abstürzenden Sonde als Funktion der x-Koordinate? Mit welcher Grenzgeschwindigkeit wird die Sonde auf Meereshöhe eintreffen? Welche Energie wird beim Aufprall am Boden freigesetzt, falls die Sonde eine Masse von 0.2 [kg] aufweist? Wie viel Energie wurde beim Absturz aus 16 [km] Höhe in Wärme umgewandelt?