Nim

Het spel:

Op tafel ligt een stapel stenen (meer dan één).

Twee spelers nemen om beurten stenen van de stapel.

De speler die begint mag in zijn eerste beurt niet alle stenen pakken.

De speler die aan de beurt is mag niet meer dan het dubbele aantal pakken dat de speler voor hem pakte.

De speler die de laatste steen (stenen) pakt wint het spel.

De strategie:

We zijn geïnteresseerd in de strategie om het spel te winnen.
Om een idee te krijgen spelen we het spel een aantal keren met steeds een andere beginhoeveelheid.

Stel we beginnen met twee stenen. Dan is het duidelijk dat de tweede speler wint.

Beginnen we met drie stenen dan is het weer duidelijk dat speler twee wint.

Hoe zit het met vier stenen? En vijf stenen? Enz?

Noem de spelers: *A* and *B.*
Speler *A* begint het spel.

Zoek uit wie het spel wint als je start met 4, 5, 6, 7, . . . enz. stenen (ervan uit gaande dat beide spelers zo goed mogelijk spelen).
Vul de volgende tabel in:

Aantal stenen:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Winnaar (*A* of *B*):	B	B								

Probeer een verband te formuleren tussen het aantal stenen waarmee je begint en de winnaar van het spel.

Het lijkt er op dat als je met een Fibonacci-getal begint, je het spel verliest.
Geldt dit voor alle Fibonacci-getallen?

Het is waar voor 2, 3 and 5.

We beginnen het spel nu met 8 stenen en leggen ze in een rij.

Om het spel te winnen proberen we de tegenstander te laten spelen met 5 stenen waarbij hij ze niet allemaal tegelijk mag wegnemen. (Immers we weten dat hij in dat geval het spel verliest)
Verdeel de rij in twee subrijen van 5 en 3 stenen:

• • • • •   • • •

Om vijf stenen over te houden moet je er 3 wegnemen, maar dit kan niet in één beurt want dan neemt je tegenstander de rest weg (hij mag er 2 keer 3 is 6 pakken) en dus wint hij.
Het is dus niet mogelijk om alle 3 stenen in één keer te pakken. Maar 3 is een Fibonacci-getal en je kunt het pakken van die 3 stenen beschouwen als een apart spel waarbij je begint met drie stenen en waarbij je ze niet alle drie in een keer mag pakken.
Dit spel is al opgelost en we weten dat je tegenstander dit wint en de laatste kan pakken.
Het gevolg is dat je weer met een Fibonacci-getal (5) begint waarbij je weer niet alle stenen kunt pakken. Je verliest dit spel want ook dat is al opgelost.

We kunnen hetzelfde doen met 13 stenen (het volgende Fibonacci-getal).
We weten al dat 8 stenen tot verlies leidt dus we verdelen de rij in 8 en 5 stenen:

• • • • • • • •   • • • • •

Om je tegenstander op 8 stenen te krijgen moet je er 5 wegnemen. Je kunt ze echter niet alle vijf pakken want dan pakt je tegenstander de rest. Het pakken van die 5 stenen is op zichzelf weer een spel dat je verliest en waarbij je tegenstander de laatste kan pakken. (Dit is al opgelost). Je begint weer met 8 stenen en we weten uit het vorige voorbeeld dat je dit verliest.

Je kunt op deze manier doorgaan met elk volgend Fibonacci-getal.

Algemeen:

Voor elk Fibonacci-getal geldt:

As je begint met een Fibonacci-getal, verlies je het spel.

(Er staat een wiskundig bewijs voor deze stelling op de bijlage.)

Hoe zit het nu als je begint met een niet -Fibonacci-getal?
Win je dan het spel en zo ja, is er dan een strategie om te winnen?

Eerst enkele voorbeelden:

Begin met 7 stenen.
Verdeel de rij in 5 (het grootste Fibonacci-getal kleiner dan 7) en 2:

● ● ● ● ●   ● ●

Je weet dat je tegenstander verliest als hij met 5 stenen begint en hij ze niet allemaal in een keer kan pakken, dus pak je de twee stenen. Hij mag er niet meer dan 2 keer 2 is vier wegnemen dus hij verliest.

Begin nu met 20 stenen.
Verdeel de rij in 13 (het grootste Fibonacci-getal kleiner dan 20) en 7:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●   ● ● ● ● ● ● ●

Om je tegenstander op 13 stenen te krijgen moet je er 7 pakken. Dit kan niet in één beurt want dan mag je tegenstander de rest wegnemen. Verdeel daarom de 7 stenen weer in twee groepjes van 5 and 2:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●   ● ● ● ● ●   ● ●

Neem eerst de twee 2 stenen. Je tegenstander kan de vijf stenen niet in een keer wegnemen (hij mag er maximaal 4 pakken). Beschouw het pakken van die vijf stenen als een apart spel en omdat 5 een Fibonacci-getal is win je dit en kun je de laatste van de vijf stenen wegnemen. Je tegenstander begint weer met de resterende 13 stenen (een Fibonacci-getal) en kan ze niet allemaal wegnemen, en verliest dus het spel.

De strategie voor het spel als je met een niet-Fibonacci-getal begint:

Schrijf dit getal als de som van verschillende niet opeenvolgende Fibonacci-getallen van groot naar klein.
Voorbeeld: 6 = 5+1, 7 = 5+2, 9 = 8+1, 11 = 8+3, 12 = 8+3+1, 20 = 13+5+2, enz.
Neem het laatste Fibonacci-aantal in deze representatie weg. Je tegenstander kan niet het een na laatste aantal uit deze representatie pakken, want dat is meer dan het dubbele van wat jij genomen hebt. Omdat dit nieuwe laatste getal een Fibonacci-getal is kun jij weer de laatste steen van dit Fibonacci-aantal pakken en start hij weer met het volgende Fibonacci-getal. Dit herhaalt zich totdat alle aantallen weggenomen zijn en dus win jij het spel!

Algemeen:
Voor alle niet-Fibonacci-getallen geldt:

As je begint met een niet-Fibonacci-getal, kun je het spel winnen.

(Er staat een wiskundig bewijs voor deze stelling op de bijlage.)

Bijlage

Nu het bewijs voor wat we vonden.

We hebben twee stellingen:

I Voor elk Fibonacci-getal geldt:
As je begint met een Fibonacci-getal, verlies je het spel.

II Voor alle niet-Fibonacci-getallen geldt:
As je begint met een niet-Fibonacci-getal, kun je het spel winnen.

I We weten dat het geldt voor 2, 3 en 5.
Stel nu dat het is bewezen voor de eerste n Fibonacci-getallen $F_1 \ldots F_n$.
Dan geldt voor het volgende Fibonacci-getal F_{n+1}:
Omdat $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$ wil speler *A* F_{n-1} stenen wegnemen om op het voorgaande Fibonacci-getal F_n te komen. Maar speler *A* kan niet F_{n-1} stenen pakken want $F_n < 2 \times F_{n-1}$ (immers $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < F_{n-1} + F_{n-1} = 2 \times F_{n-1}$) en dus kan speler *B* alle resterende stenen nemen.
Dit betekent dat *A* niet alle F_{n-1} stenen pakt.
F_{n-1} is een van de eerste n Fibonacci-getallen en we weten dus dat *B* de laatste van deze F_{n-1} stenen kan pakken om op het getal F_n te komen. (je kunt het pakken van die F_{n-1} stenen beschouwen als een apart spel). Speler *A* begint daarna weer met het Fibonacci-getal F_n en kan ze niet allemaal wegnemen en dus verliest hij het spel.
Als A begint met F_{n-1} neemt hij er niet meer dan $\frac{1}{3} \times F_{n-1}$. Als hij er $\frac{1}{3} \times F_{n-1}$ wegneemt dan neemt B er maximaal $\frac{2}{3} \times F_{n-1}$ en kan A er niet F_n pakken, want $\frac{F_n}{F_{n-1}} > 1\frac{1}{3} \Rightarrow F_n > 2 \times \frac{2}{3} F_{n-1}$ voor $n \geq 4$
Dit bewijst (I).

II Veronderstel nu dat we beginnen met een niet-Fibonacci-getal.
Dit getal kan geschreven worden als de som van verschillende, niet opeenvolgende, Fibonacci-getallen.
Bijvoorbeeld: 6 = 5+1, 7 = 5+2, 9 = 8+1, 11 = 8+3, 12 = 8+3+1, 20 = 13+5+2, enz.
(Dit is de stelling van Zeckendorf en wordt op pagina 5 bewezen.)
We gebruiken dit als volgt:
Speler *A* neemt het laatse Fibonacci-getal in deze representatie weg. Speler *B* kan dan niet het volgende getal wegnemen want dat is meer dan het dubbele van wat A nam (voor elk Fibonacci-getal F_n geldt: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > F_{n-2} + F_{n-2} = 2 \cdot F_{n-2}$).
Het nieuwe laatste getal is een Fibonacci-getal dus *B* kan niet de laatste hiervan nemen en moet weer beginnen met het daaropvolgende Fibonacci-getal. Dit gaat door tot het eerste getal en *A* wint het spel
Dit bewijst (II)

Stelling van Zeckendorf:
Elk natuulijk getal N kan geschreven worden als de som van verschillende niet opeenvolgende Fibonacci-getallen.

Bewijs:
De stelling is waar voor n=1, n=2, n=3, n=4, n=5, n=6, n=7.
(1=1, 2=2, 3=3, 4=3+1, 5=5, 6=5+1, 7=5+2)
Stel de stelling geldt voor elk natuurlijk getal kleiner dan F_n waarbij F_n het n^e Fibonacci-getal is en laat N een natuurlijk getal zijn zo dat $F_n \leq N < F_{n+1}$ (F_{n+1} is het $(n+1)^e$ Fibonacci-getal)
Dan geldt: $N - F_n < F_{n+1} - F_n \quad \Rightarrow \quad N - F_n < F_{n-1}$ (want $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ en dus $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$)
We weten dat $N - F_n$ geschreven kan worden als de som van verschillende, niet opeenvolgende, Fibonacci-getallen (omdat $N - F_n$ kleiner is dan F_n) en dat F_{n-1} zelf niet in deze som voorkomt (want $N - F_n$ is kleiner dan F_{n-1}). Als we nu het Fibonacci-getal F_n er bij optellen hebben we de stelling bewezen voor N. Met volledige inductie is de stellng nu bewezen voor elk natuurlijk getal N.

Fibonacci Nim

Deze functie geeft het grootste Fibonacci-getal kleiner of gelijk aan *a*:

```
Define fib(a)=
Func
Local lijst
lijst:={1,1}
Loop
   If lijst[2]>a
   Exit
   lijst:={lijst[2],lijst[2]+lijst[1]}
EndLoop
Return lijst[1]
EndFunc
```

Deze functie geeft het de Fibonacci-representatie van het getal *a*:

```
Define factoriseer(a)=
Func
Local n,lijst
lijst:={}
While a>0
   n:=fib(a)
   lijst:=augment({n},lijst)
   a:=a-n
EndWhile
Return lijst
EndFunc
```

Het programma:

```
Local n,mx,zet,f,a,nspire

© Startgetal?

n:=0
While n<3
   Request "Begin aantal",n,0
   If n=0
   Stop
   If n<3
   Text "Minimaal 3",0
EndWhile

© Wie begint

nspire:=false
a:=0
While a<1 or a>2
   Request "1=Nspire begint, 2=Jij begint",a,0
   If a=0
   Stop
EndWhile
If a=1
nspire:=true

© Het eigenlijke programma start hier

mx:=n-1
Loop
   If nspire Then
      f:=factoriseer(n)
      zet:=f[1]
      If zet>mx
      zet:=1
      Text "Er liggen er "&string(n)&". Nspire pakt er "&string(zet),0
   Else
      zet:=0
      While zet<1 or zet>mx
         Request "Er liggen er "&string(n)&". Hoeveel? (max
"&string(mx)&")",zet,0
         If zet=0
         Stop
      EndWhile
   EndIf
   n:=n-zet
   If n≤0
   Exit
   nspire:=not nspire
   mx:=2*zet
EndLoop
If nspire Then
   Text "Nspire wint",0
Else
   Text "Jij wint",0
EndIf
```