Equations & inéquations du 2nd degré

Enoncé

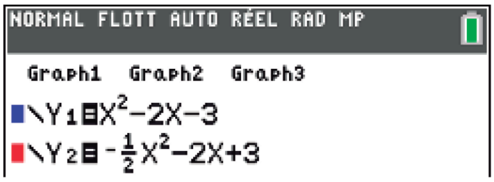
On considère les fonctions du 2nd degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

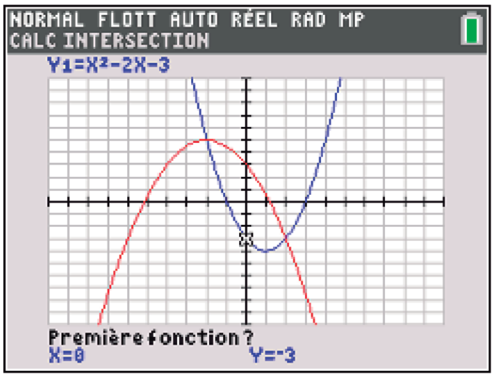
1. A l'aide de votre calculatrice graphique, conjecturer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.
2. Démontrer par le calcul les conjectures de la question précédente.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

1. Intersection

- Dans le menu **f(x)**, on commence par saisir les expressions de nos fonctions dans **Y1** et **Y2**.



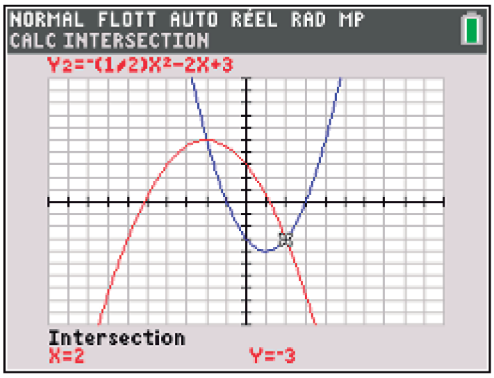
- Dans le menu **zoom**, on sélectionne la commande **6:ZStandard**, qui permet de cadrer notre graphique dans une fenêtre où les valeurs de x et y sont dans l'intervalle $[-10\,;+10]$.
- A l'aide des touches **2nde** **trace** (calculs f4), on obtient le menu où se trouve la commande 5:intersection. Cette dernière s'exécute en trois phases :
  - On sélectionne, à l'aide des flèches ▲ et ▼, la 1ère fonction (**Y1** par défaut) et on valide par **entrer**.
  - On effectue la même chose pour la 2nde fonction.
  - Enfin, on se place près du point d'intersection recherché, et on valide une dernière fois par **entrer**.



- On procède ainsi pour les 2 points d'intersection observés et on obtient ainsi notre conjecture :

$$(-2\,;5) \quad \text{et} \quad (2\,;\,-3)$$

2. Résolution de l'équation



$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 6 = -x^2 - 4x + 6 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 = 12 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \end{aligned}$$

D'où :

$$x = -2 \;\; ou \;\; 2$$

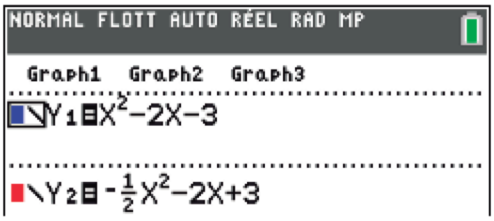
$$f(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$$
$$f(2) = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

On retrouve ainsi les résultats graphiques précédents.

3. Résolution graphique de l'inéquation

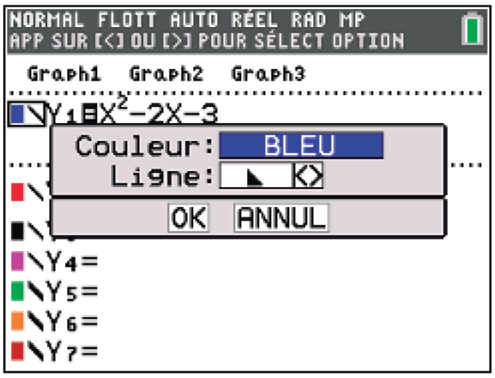
La résolution graphique de cette inéquation peut bien entendu se faire à l'aide du graphique précédent, et c'est en général avec ce type de graphique que ces questions sont résolues.

Pour autant, la calculatrice permet de visualiser encore mieux les solutions de tout type d'inéquation, et c'est ce qu'on se propose de vous faire découvrir ici.

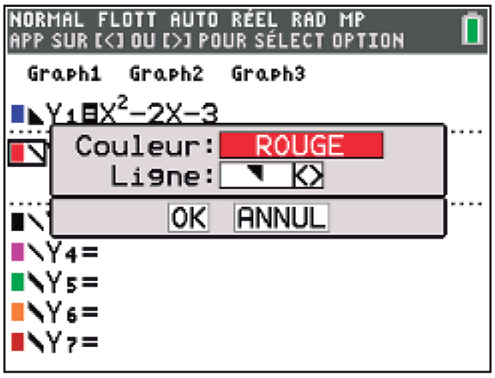


- On commence par retourner dans le menu [f(x)] , où sont définies nos 2 fonctions.

- Pour la fonction f saisie dans **Y1**, on vient placer le curseur au début de la ligne de saisie, sur le rectangle bleu, et on appuie sur [entrer] .

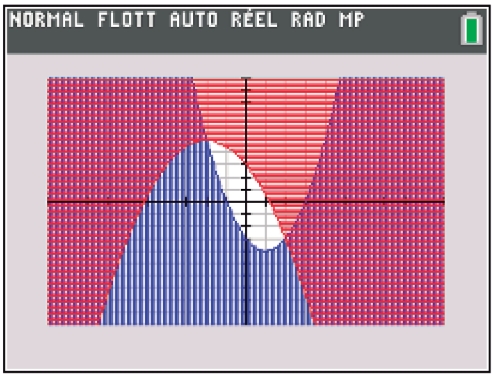


- Dans le pop-up qui apparaît alors, on peut sélectionner la couleur de la courbe, mais surtout le type de ligne : on choisit alors le triangle noir inférieur gauche (voir écran ci-contre) et on valide par **Ok**. Lors du tracé, en plus de notre courbe représentative, la calculatrice va alors hachurer, de la même couleur, toute la région du plan qui va se trouver sous la courbe de f.



- On fait de même avec notre fonction g, saisie dans **Y2**, en sélectionnant cette fois-ci le triangle noir supérieur droit. Les hachures vont cette fois apparaître dans la région du plan située au-dessus de la courbe de g.

- On appuie alors sur [graphe] pour visualiser les courbes et les régions hachurées. Notre choix de hachures permet d'obtenir en blanc la région souhaitée par notre inéquation, ici la zone où la courbe de f se situe en-dessous de celle de g.



- Notre travail précédent sur les points d'intersection nous permet ainsi de conclure :

  $\mathcal{S} =]-2\,;2[$

Remarques :

- Nous vous conseillons ici de faire des tests de style pour vos courbes ; certains styles ne sont pas abordés dans cet ouvrage, mais peuvent vous servir à certaines occasions.

Dans le menu [f(x)], en plaçant votre curseur sur le symbole « = », vous pouvez désactiver l'affichage d'une fonction, sans l'effacer.