Programmation linéaire

Enoncé

Un représentant pour une société commerciale prépare sa tournée : il vend deux types de produits A et B, conditionnés dans des cartons de 40 dm^3 pesant respectivement 30 kg et 15 kg.

Il s'approvisionne chez un fournisseur qui facture à la société 20 € le carton de produit A et 40 € le carton de produit B. La société ne peut pas acheter plus de 1 700 € de produits et le représentant doit limiter son chargement à 1,2 tonnes et 2 000 dm^3. Soit x le nombre de cartons de produit A et y celui de produit B.

Crédit photo : www.pexels.com – Artem Podrez

La société qui l'emploie lui rémunère, par carton vendu, 12 € pour le produit A et 8 € pour le produit B.

On suppose qu'il peut vendre l'ensemble de sa cargaison.

1. Etablir le système de contraintes et représenter graphiquement ce système en prenant 1 unité pour 5 cartons de produit A en abscisses et une unité pour 5 cartons de produit B en ordonnée.

2. Déterminer les coordonnées des sommets du polygone solution.

3. a. Exprimer le revenu R du représentant en fonction de x et de y puis tracer la droite (Δ) correspondant à un revenu égal à 360 €.

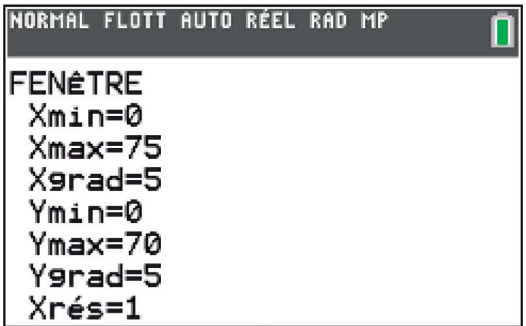
b. Représenter alors graphiquement la droite (Δ_{Rmax}) correspondant à un revenu maximal R_{max} et déterminer quelle est la composition du chargement qui lui assurera le revenu le plus intéressant.

1. Contraintes

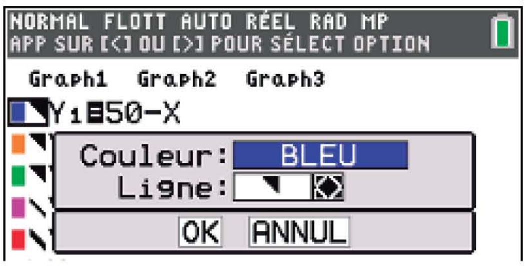
Tout d'abord les quantités x et y sont positives. Ensuite nous prenons en compte le volume à ne pas dépasser : $40x + 40y \leq 2\,000 \Leftrightarrow x + y \leq 50$ ainsi que le poids limite : $30x + 15y \leq 1\,200 \Leftrightarrow 2x + y \leq 80$.

Enfin, concernant le budget limité à 1 700 € cela se traduit par la contrainte $20x + 40y \leq 1\,700 \Leftrightarrow x + 2y \leq 85$ soit un système complet de contraintes qui s'écrit :

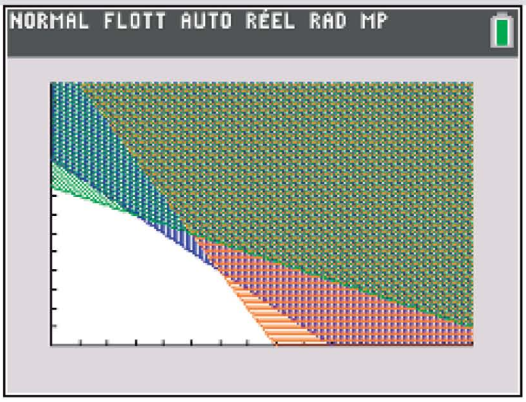
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x + 2y \leq 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 50 - x \\ y \leq 80 - 2x \\ y \leq 42{,}5 - 0{,}5x \end{cases}.$$



Pour obtenir dans un repère la région du plan correspondant aux couples d'entiers $(x\,;\,y)$ vérifiant ce système, nous règlerons la fenêtre d'affichage via la touche fenêtre comme ci-contre ce qui permet déjà de vérifier $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Après avoir complété les équations des droites frontières dans le menu f(x), nous choisirons pour une meilleure lisibilité, d'hachurer la région du plan qui ne convient pas c'est-à-dire le contraire des inégalités précédentes. En plaçant le curseur sur le rectangle de couleur et en appuyant sur entrer, il est possible de modifier la couleur ainsi que la partie du plan à hachurer pour chacun des Y$_i$.

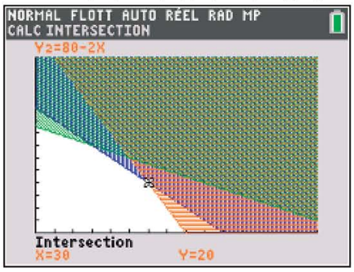


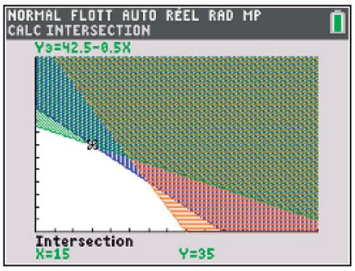
Nous obtenons alors le domaine ci-contre.



2. Polygone solution

On détermine les coordonnées des sommets du polygone solution en cherchant les intersections des différentes droites frontières qui le définissent. Nous obtenons successivement en utilisant le menu `calculs`, obtenu avec les touches 2nde trace (calculs f4) et en sélectionnant la commande `5:intersection`, les points suivants : $(0\ ;\ 42{,}5)$, $(40\ ;\ 0)$, $(30\ ;\ 20)$ et $(15\ ;\ 35)$.

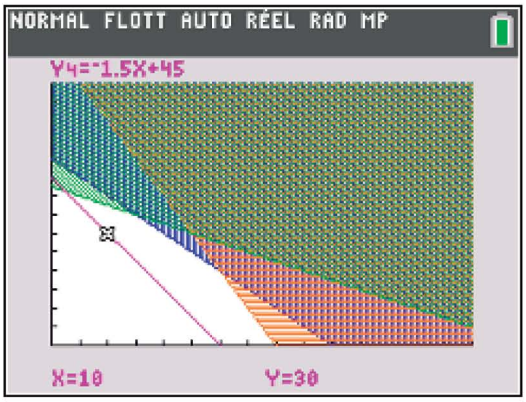




3.a. Droite des revenus

Le représentant est rémunéré 12 € par carton vendu du produit A et 8 € par carton vendu du produit B. Ainsi son revenu est égal à R= $12x + 8y$ soit $y = -\frac{3}{2}x + \frac{R}{8}$.

Avec un revenu égal à 360 € cette droite a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 45$. Nous voyons qu'elle traverse le polygone solution donc ce revenu est envisageable, par exemple avec le couple $(10\ ;\ 30)$.



3.b. Revenu maximal

Pour construire graphiquement la droite (Δ_{Rmax}) correspondant à un revenu maximal R_{max} , il suffit de tracer la droite parallèle à (Δ) (les coefficients directeurs étant tous égaux à $-\frac{3}{2}$) d'ordonnée à l'origine la plus élevée et qui reste en contact avec le polygone solution.

On a construit plusieurs droites du faisceau, parallèles à (Δ) et on trouve ainsi la droite (Δ_{Rmax}) d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 65$ dont le point d'intersection avec le polygone solution est $(30\ ;\ 20)$.

Le représentant doit donc charger chez son fournisseur 30 cartons du produit A et 20 cartons du produit B, ce qui lui assurera un revenu maximal égal à R_{max}= $12 \times 30 + 8 \times 20 = 520$ €.