STI2D STL

Thème : Analyse

Primitive, Aire et Volume

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

La plupart des stations de ski construisent des retenues d'eau en altitude afin d'alimenter les canons à neige placés le long des pistes réalisant ainsi un enneigement artificiel. La surface qu'il est possible de recouvrir en neige artificielle dépend du volume d'eau stockée dans la retenue. Il faut environ un volume de 4 000 m^3 d'eau pour couvrir de neige et rendre skiable une surface d'un hectare.

Crédit photo : www.pexels.com

Une station a décidé de réaliser un bassin d'une profondeur telle que le volume d'eau contenu présente une hauteur h maximale de 8 m. L'objectif est de déterminer si la quantité d'eau liquide retenue dans le bassin lorsque celui-ci est rempli permet de couvrir de neige une surface de 14 hectares.

Au niveau du sol, le tour du bassin peut être modélisé par la courbe fermée représentée sur la figure 1 ci-contre (1 unité correspond à 15 m). Il présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la la courbe C_f tracée en pointillés, représentative de la fonction f définie pour tout réel sur l'intervalle $[0\,;4]$ par : $f(x) = -(x^2 - 3{,}8x + 1{,}8)e^{-x} + 1{,}8$. Sur l'intervalle $[0\,;4]$, on admet que la fonction f est positive.

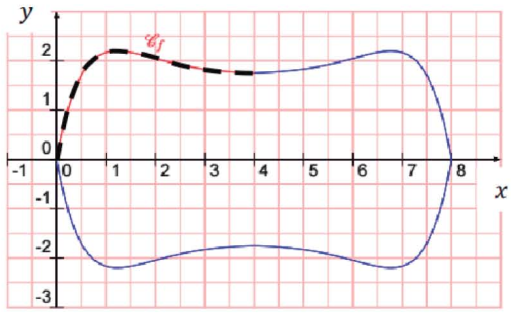


Figure 1 : tour du bassin au niveau du sol

1. a. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie pour tout réel x par : $F(x) = (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8x$.

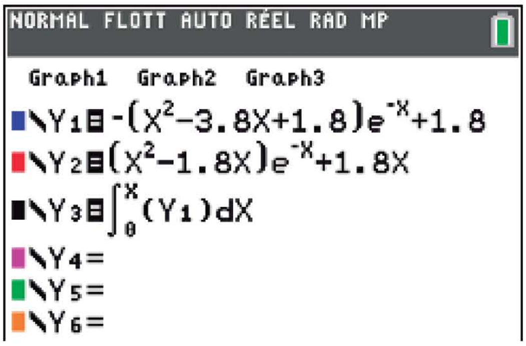
b. En exploitant la symétrie du bassin, calculer la surface S du bassin au niveau du sol exprimée en m². Arrondir au m² près.

2. On admet que le volume d'eau dans le bassin dépend de la surface S du bassin au niveau du sol précédemment calculée et de la hauteur d'eau h qui y est contenue.

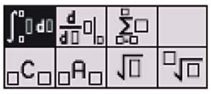
Plus précisément, pour une hauteur d'eau h, le volume V, mesuré en m^3 est donné par la relation suivante : $V(h) = \left(\frac{(24+h)^3}{3072} - \frac{9}{2}\right)S$. Indiquer si l'eau contenue dans le bassin complètement rempli permet de recouvrir une surface d'un domaine skiable de 14 hectares en neige artificielle.

1.a. Primitive de f

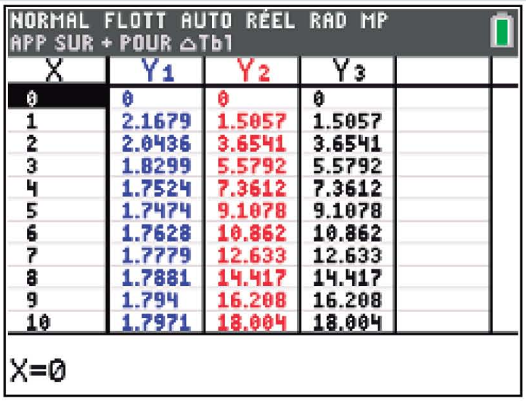
Tout d'abord nous allons vérifier à l'aide de la calculatrice si la fonction F définie par $F(x) = (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8x$ peut effectivement être une primitive de f. Pour cela, dans le menu f(x) nous saisissons la fonction f dans Y_1 et la fonction F dans Y_2.



En remarquant ensuite que $F(0) = 0$ nous saisissons alors la primitive de f qui s'annule en 0 dans Y_3. On utilise les touches 2nde [fraction] puis on accède à la fonction **Y_1** avec la touche var grâce à l'onglet **VAR Y** choix `1:Fonction`.



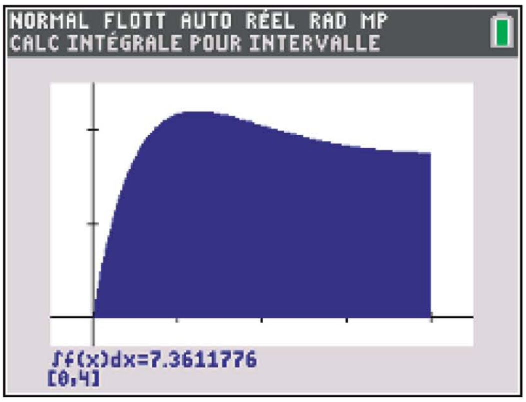
Enfin nous affichons la table des valeurs de ces fonctions à l'aide des touches 2nde graphe (table f5). Les fonctions Y_2 et Y_3 semblent donc bien égales.



X	Y1	Y2	Y3
0	0	0	0
1	2.1679	1.5057	1.5057
2	2.0436	3.6541	3.6541
3	1.8299	5.5792	5.5792
4	1.7524	7.3612	7.3612
5	1.7474	9.1078	9.1078
6	1.7628	10.862	10.862
7	1.7779	12.633	12.633
8	1.7881	14.417	14.417
9	1.794	16.208	16.208
10	1.7971	18.004	18.004

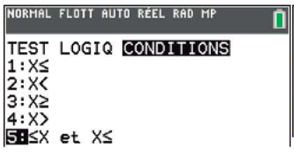
Par calcul, à l'aide des formules de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$ on obtient $F'(x) = (2x - 1{,}8)e^{-x} - (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8$ soit $F'(x) = -(x^2 - 3{,}8x + 1{,}8)e^{-x} + 1{,}8 = f(x)$ ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f.

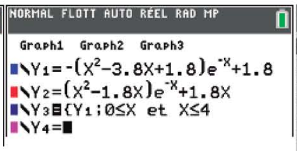
1.b. Calcul d'aire



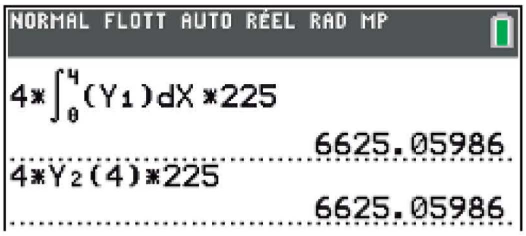
On peut calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe de la fonction f sur $[0\,;4]$ en utilisant le menu `calculs` de la calculatrice avec 2nde trace (calculs f4). Après avoir choisi 7: **∫f(x)dx** on entre les bornes 0 puis 4 (valider en appuyant sur entrer).

On aura auparavant créer la fonction f restreinte à l'intervalle $[0\,;4]$ dans Y_3 grâce à la touche math choix **B:parmorceaux** avec un morceau et grâce à 2nde math (tests A) on rajoute les conditions pour respecter l'intervalle de définition :





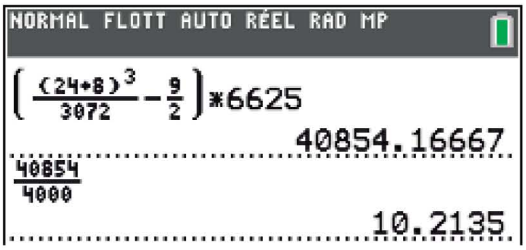
On obtient une aire d'environ 7,36 unités d'aire.



Pour retrouver la valeur de cette aire, on peut calculer l'intégrale de la fonction f à l'aide des touches 2nde (fraction key, ∫ₐᵇ d□ ▸ G).

Ainsi, grâce à la symétrie du bassin au niveau du sol, le quart de sa surface est, en unités d'aire, $\frac{S}{4} = \int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$. En tenant compte de l'unité d'aire égale à $15 \times 15\,m^2$ soit $225\,m^2$, la surface en m^2 vaut $S \approx 6\,625\,m^2$ à l'unité près.

2. Calcul de volume



Si le bassin est complètement rempli, la hauteur d'eau est égale à 8 m et le volume contenu dans le bassin est de :

$V(8) = \left(\frac{(24+8)^3}{3072} - \frac{9}{2}\right) S \approx 40\,854\,m^3$. Ainsi puisqu'il faut environ un volume de $4\,000\,m^3$ d'eau pour couvrir de neige et rendre skiable une surface d'un hectare, le bassin rempli permettra de recouvrir environ 10,2 hectares en neige artificielle ce qui ne suffira pas pour le domaine skiable de 14 hectares.