STI2D STL

Thème : Analyse

Equation différentielle linéaire du 1er ordre

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Meruyert Gonullu

Un tramway de masse 2 000 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 3125 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire avec un coefficient de proportionnalité égal en valeur absolue à 250 N.m^{-1}.s.

La position du tramway est repérée par la distance x, en mètres, à partir d'un point d'origine, en fonction du temps t exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) : $250v + 2000v' = 3125$, où v est la vitesse du tramway définie par $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

   b. Calculer $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

2. On souhaite commencer à freiner le tramway lorsque sa vitesse dépasse 90% de sa valeur limite V.

   a. A quel instant cela correspond-t-il (arrondir à 0,1 seconde près) ?

   b. A quelle distance du départ cela se produit-il ?

1.a. Vitesse en fonction de t

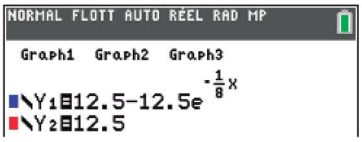
On sait que pour tout $t \in [0;+\infty[$ la fonction v est solution de l'équation $250v + 2000v' = 3125 \Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{25}{16}$. L'équation différentielle (E) est du type $y' = ay + b$, d'après le cours elle possède une solution particulière constante $-\frac{b}{a}$ et les solutions sont $v(t) = Ke^{-\frac{1}{8}t} + 12{,}5$ où $K \in \mathbb{R}$. Sachant que $v(0) = 0$ on trouve $K = -12{,}5$ d'où $v(t) = 12{,}5 - 12{,}5\, e^{-\frac{1}{8}t}$ pour $t \geq 0$.

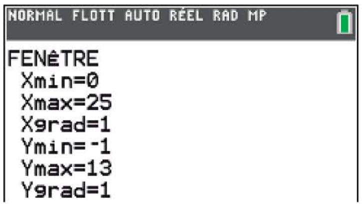
1.b. Vitesse limite

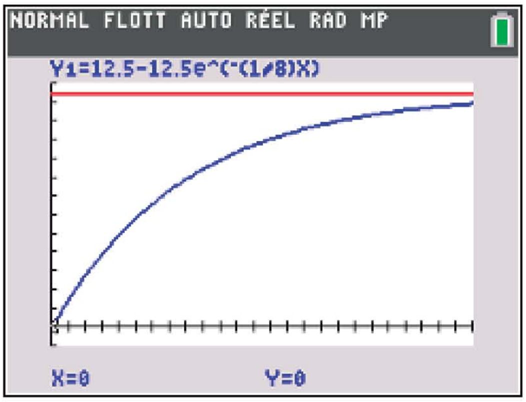
Utilisons les limites de la fonction exponentielle pour déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ par composée donc $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 12{,}5$.

On peut visualiser ces résultats sur le graphique de la calculatrice.







STI2D STL

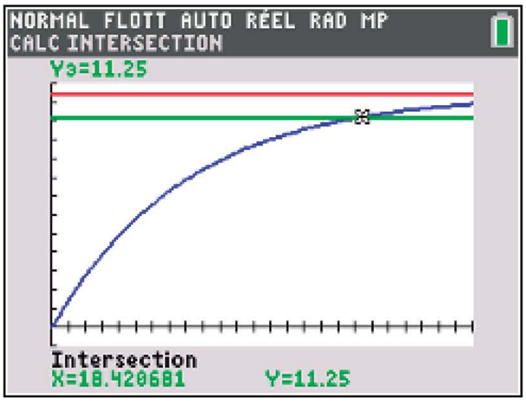
Thème : Analyse

Equation différentielle linéaire du 1er ordre

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

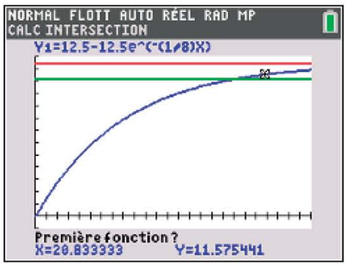
2.a. Instant de freinage

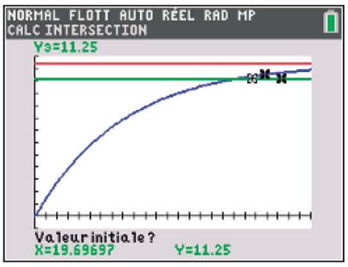


Il faut résoudre l'inéquation $v(t) \leq 12{,}5 \times \frac{90}{100} \Leftrightarrow v(t) \leq 11{,}25$.

D'une part on peut tracer la droite d'équation $y = 11{,}25$ (en vert) et chercher graphiquement l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe représentant la fonction v (en bleu).

Pour cela on sélectionne le menu `calculs`, à l'aide des touches 2nde trace et on sélectionne la commande `5:intersection`. De retour au graphique, on valide avec entrer le choix de Y_1, celui de Y_3 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché. On trouve $t \approx 18{,}4$.





D'autre part on peut résoudre l'inéquation par le calcul avec l'outil ln :

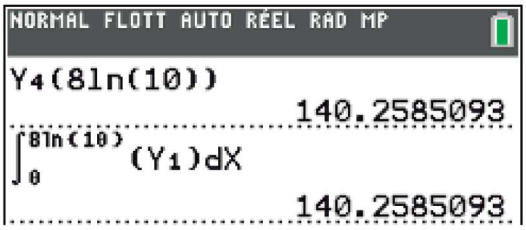
$$12{,}5 - 12{,}5\, e^{-\frac{1}{8}t} \leq 11{,}25 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}t} \geq 0{,}1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}t \geq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow t \leq 8\ln(10).$$

On trouve bien un temps d'environ 18,4 secondes pour le début du freinage.

2.b. Distance parcourue

On sait que $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, ainsi la fonction distance est une primitive de la fonction vitesse.

Puisque $v(t) = 12{,}5 - 12{,}5\, e^{-\frac{1}{8}t}$, on trouve $x(t) = 12{,}5t + 100\, e^{-\frac{1}{8}t} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Or $x(0) = 0$, on détermine alors $C = -100$ donc $x(t) = 12{,}5t + 100\, e^{-\frac{1}{8}t} - 100$ pour tout $t \geq 0$.



On entre alors cette fonction dans Y_4 à l'aide du menu f(x) et on calcule l'image de $8\ln(10)$ en sélectionnant Y_4 via les touches alpha trace choix 4.

On peut aussi calculer l'intégrale de la fonction v entre les instants 0 et $8\ln(10)$ en sélectionnant 2nde ⁄ ∫□d□.

On trouve dans les 2 cas une distance parcourue par le tramway d'environ 140 mètres avant le début du freinage.