Loi de décroissance radioactive

Enoncé

On note $A(t)$ l'activité d'un échantillon radioactif en becquerel (Bq) à l'instant t exprimé en seconde.

Rappel : 1 Bq correspond à une désintégration par seconde.

On note N le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t)$ et $A(t) = -\frac{dN}{dt}(t)$ avec λ une constante positive, appelée constante radioactive, exprimée en s^{-1} qui est différente selon chaque noyau radioactif.

1°) En notant N_0 la valeur de $N(0)$ et A_0 la valeur de $A(0)$, exprimer $N(t)$ en fonction de N_0, λ et t puis exprimer $A(t)$ en fonction de A_0, λ et t.

2°) Représenter sur un même graphiquement la fonction N pour les valeurs de N_0 suivantes : $100, 150$ et 200 et en prenant $\lambda = -0{,}1$. On règlera la fenêtre en prenant les paramètres ci-contre.

```
FENÊTRE
 Xmin=0
 Xmax=20
 Xgrad=1
 Ymin=-20
 Ymax=250
 Ygrad=50
```

3°) On appelle demi-vie, la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents sont désintégrés. On la notera τ. Pour chacune des courbes de la question 2. Calculer la valeur de la demi-vie.

4°) Montrer que τ s'exprime en fonction de λ.

5°) Pour déterminer la date d'origine d'une vieille épave découverte en mer baltique, on procède à une datation au carbone 14. On sait que pour 1 gramme de carbone présent dans l'atmosphère son activité est $A_0 = 13{,}6$ désintégration par seconde.

a) Sachant que la demi-vie du carbone 14 est 5730 ans, calculer λ.

b) Sur l'épave on a relevé une valeur de $A = 12$. En déduire l'âge de l'épave.

1. Expression de $A(t)$ et $N(t)$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t)$ donc d'après le cours $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$.

De plus $A(t) = -\frac{dN}{dt}(t) = -N_0\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$. Sachant que :
$A(0) = \lambda N_0 e^{-\lambda \times 0} = \lambda N_0$ qu'on note A_0 on obtient : $\boldsymbol{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}$

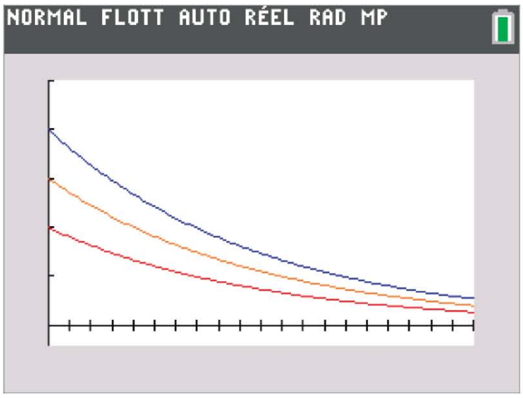
2. Représentation graphique

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 Graph1  Graph2  Graph3
■\Y1=100*e^-0.1X
■\Y2=150*e^-0.1X
■\Y3=200e^-0.1X
```

Pour entrer les expressions des fonctions on appuie sur [f(x)].

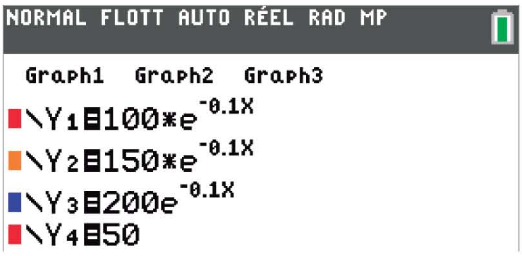
On paramètre la fenêtre comme indiqué dans l'énoncé en appuyant sur [fenêtre]

On obtient la représentation graphique ci-contre :



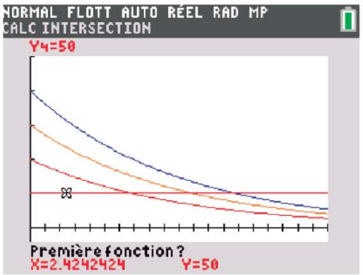
Loi de décroissance radioactive

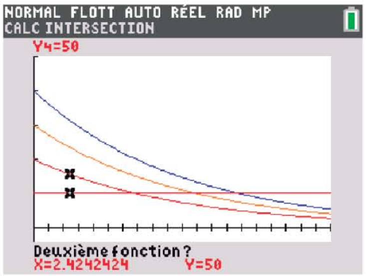
3. Demi vie

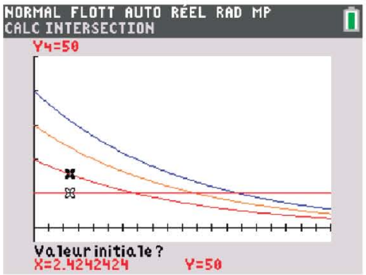


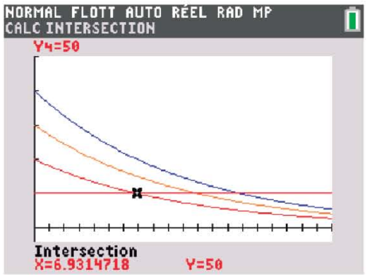
Pour trouver la demi-vie de la fonction représentée en rouge ($N_0 = 100$) on trace la droite d'équation $y = 50$ et on va chercher l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de la courbe rouge.

Pour cela on appuie sur [f(x)] pour entrer l'expression de la droite puis on choisit [2nde] [trace] (calculs f4) et **intersection**. On sélectionne la courbe rouge et on valide (en appuyant sur [entrer]) puis on sélectionne notre droite et on valide ainsi que pour la valeur initiale.

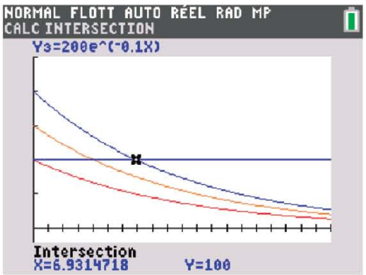


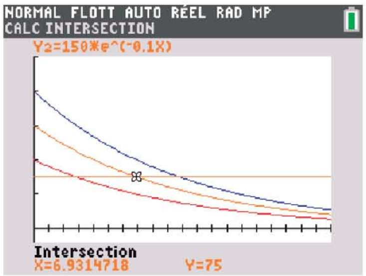






On fait de même pour les deux autres fonctions en traçant les droites d'équation $y = 75$ puis $y = 100$. On trouve les résultats suivants :





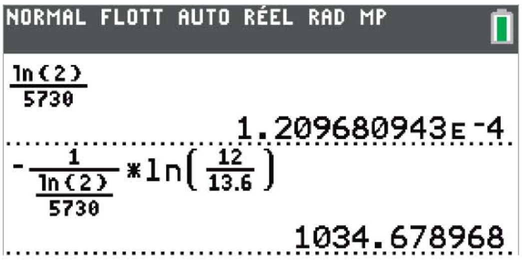
Dans tous les cas on trouve toujours les mêmes résultats : $x \approx 6{,}93$

4. Expression de $\boldsymbol{\tau}$

Par définition τ vérifie $N(\tau) = \frac{N_0}{2}$ soit $N_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{N_0}{2}$ ainsi $e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$ d'où

$-\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui nous donne $-\lambda\tau = -\ln 2$ et donc $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$

5. Datation au ^{14}C



a) On sait que $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ donc $5730 = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ainsi $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$.

b) Pour tout réel positif t on a $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ avec $A_0 = 13{,}6$ d'après l'énoncé. Ainsi on cherche t tel que $12 = 13{,}6 e^{-\lambda t}$.

Cela nous donne donc $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{12}{13{,}6}\right) \approx 1035$. L'épave date environ de 1035 ans.