Thème: fonctions

Niveau: 2nde

TI-83 Premium CE

python

Calcul approché de longueur d’une portion de courbe

F. GIROD

Compétences visées

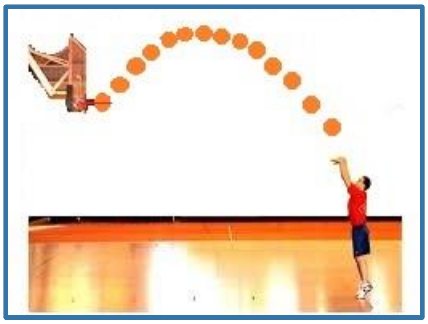
- **chercher**, expérimenter – en particulier à l’aide d’outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes.

Ces compétences sont mises en œuvre dans le cadre de l’extrait du programme de 2nde GT ci-dessous :

« Algorithme de calcul approché de longueur d’une portion de courbe représentative de fonction. »

Situation déclenchante

Estimation de la longueur d’une courbe



On sait que la trajectoire d’un ballon est une portion de parabole, représentant une fonction polynôme du second degré.

On souhaite déterminer ***la longueur du trajet du ballon*** entre le moment où il quitte les mains du joueur et l’arrivée au panier.

Dans un souci de simplification, on traitera dans un premier temps une fonction de référence (ici, la fonction carré sur l’intervalle [0 ; 1] et on reviendra à ce problème dans un second temps).

Problématique

Soit f la fonction définie sur l’intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = x^2$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Quelle est la longueur de la courbe C ?

Thème: fonctions

Niveau: 2nde

TI-83 Premium CE

python

F.GIROD

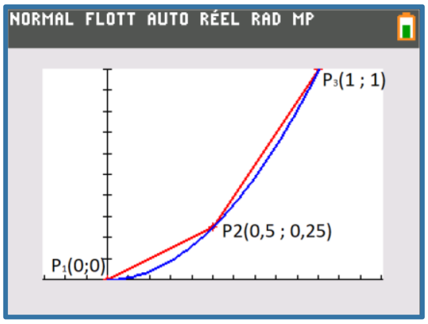
Fiche méthode

Proposition de résolution

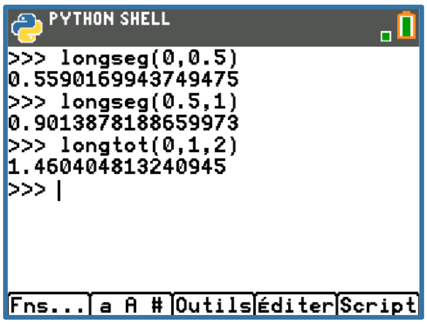
Le principe est d'approcher la courbe par une ligne brisée composée de segments dont on ajoutera les longueurs.

- Écrire la fonction **longseg** qui a comme paramètres xA et xB et qui renvoie la longueur du segment [AB], avec A(xA ; f(xA)) et B(xB ; f(xB)).
- Ci-contre, on approche la courbe par deux segments. Leurs longueurs sont estimées par la fonction **longseg**, et la longueur totale par **longtot** : P_1P_2 = longseg(0,0.5) ~ 0,559

  P_2P_3 = longseg(0.5,1) ~ 0,901



La longueur totale est la somme de ces longueurs, donnée par **longtot**(0,1,2). Dans cette instruction, les paramètres 0, 1, 2 signifient que l'on s'est placé entre les abscisses 0 et 1 avec 2 segments dont les abscisses des extrémités sont 0 et 0,5 pour le premier segment, 0,5 et 1 pour le second segment.

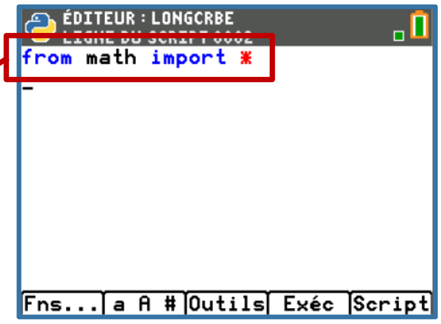


Ainsi, **on crée trois fonctions dans ce programme** :

- Une fonction **f** qui a pour paramètre x et qui renvoie l'image de x par la fonction utilisée dans le contexte, la fonction carré dans ce cas ;
- Une fonction **longseg** qui a pour paramètres xA et xB et qui renvoie la longueur du segment [AB] avec A (xA ; f(xA)) et B(xB ; f(xB)) ;
- Une fonction **longtot** qui a pour paramètres xA, xB et n ; elle renvoie la somme des longueurs des n segments qui approchent la courbe.

Remarques

Importation en préambule du code de la bibliothèque « math » par « **from math import ✶** » pour pouvoir utiliser la fonction **sqrt** (racine carrée)

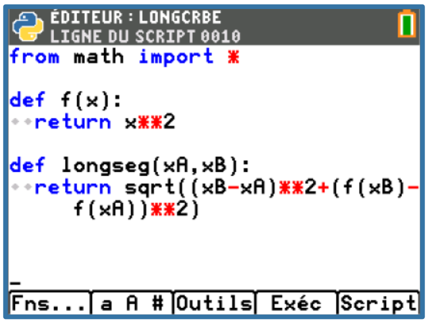


Pour profiter de tutoriels vidéos, Flasher le QRCode ou cliquer dessus

Etapes de résolution

Création de la fonction **f** dont l'expression est $f(x)=x^2$

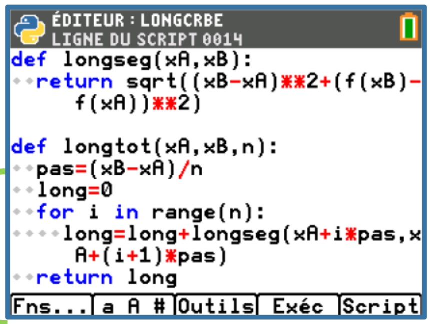
Fonction **longseg** donnant la longueur d'un segment [AB] avec A(xA ; f(xA)) et B(xB ; f(xB)).
On notera l'utilisation de la fonction **f** précédemment définie qui rend l'écriture de cette fonction simple et proche des notations usuelles.



C'est un principe à retenir : l'utilisation successive de fonctions en python rend le programme dans son ensemble plus lisible et plus efficace.

Fonction **longtot** donnant une valeur approchée de la longueur de la courbe.

Dans cette fonction, on va faire appel à la fonction **longseg,** ce qui allège le script.



Pour cela, on définit un pas : il sera constant et égal à $\frac{x_B-x_A}{n}$.

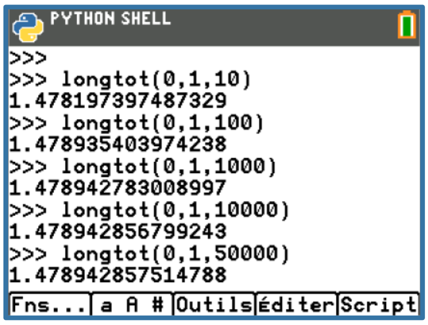
Sur chaque intervalle du type $[x_A + i \times pas\ ;\ x_A + (i+1) \times pas]$, on approche la longueur de la partie de courbe comprise entre ces abscisses en utilisant la fonction **longseg.**

On a créé une variable **long** (initialisée à 0) qui cumulera la longueur de chaque segment pour approximer la longueur totale de la courbe, valeur retournée par la fonction.

Retour au problème

Ainsi, ce programme permet de répondre au problème de départ en donnant une valeur approchée de la longueur de la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle [0 ; 1].

On trouve ici une longueur d'environ 1,47894.



Thème: fonctions

Niveau: 2nde

TI-83 Premium CE

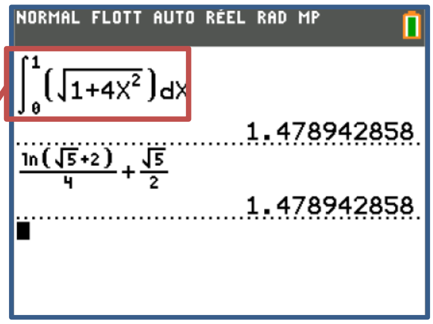
python

Fiche méthode

F.GIROD

Un peu de théorie

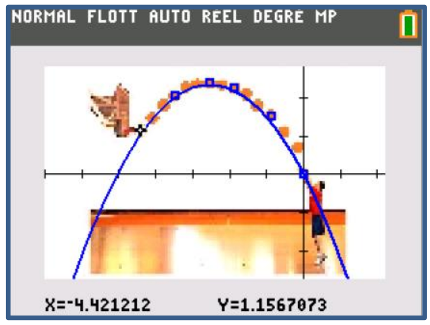
Sur le plan théorique, la longueur de la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle [a ; b] (sur lequel elle est continûment dérivable) est donnée par : $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$



Cela permet d'obtenir la valeur exacte par rapport au problème initial ainsi qu'une valeur approchée et d'apprécier la précision de l'algorithme selon la valeur de n.

Retour à la situation déclenchante

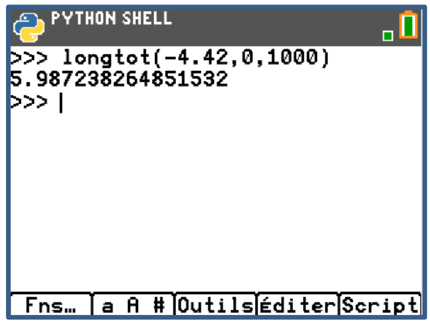
En important l'image du ballon de basket dans la calculatrice et en la mettant en arrière-plan, on peut approcher la trajectoire du ballon par une courbe représentant une fonction du second degré.



Remarque : on réalise cette importation par le biais de TI-Connect CE; on affiche ensuite l'image en tant qu'« Arrière-plan » (passer par « Format » / « Arrière-plan » et les flèches directionnelles pour faire défiler les images enregistrées dans la calculatrice).

Il faudra adapter le repère pour que les coordonnées soient réalistes (taille du joueur et distance au panier).

On obtient comme équation $y = -0{,}3661x^2 - 1{,}8538x$ en ayant choisi Xmin=-7 / Xmax=2.2 / Ymin=-2.7 et Ymax=2.8

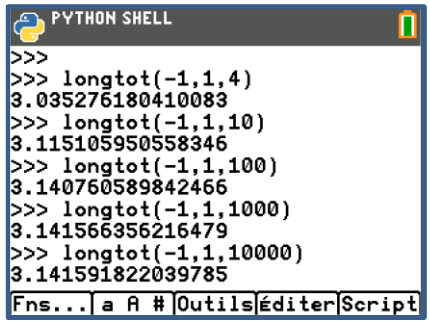


On a pour cela utilisé une fonctionnalité de la TI 83 Premium CE permettant de déterminer une fonction approchant des points (menu stats, puis CALC, puis E:TracéAjust-éq ; il faut alors placer les points qui seront interpolés. On termine par éQRég et le choix RégDeg2).

Les abscisses sont à prendre entre -4,42 (abscisse du panier) et 0 (abscisse des mains du joueur ; on a calé l'origine volontairement au niveau des mains du joueur).

On obtient une trajectoire - entre les mains du joueur et le panier - d'une longueur d'environ 6 m en ayant remplacé dans la fonction **f** du script `return x**2` par : `return -0.3661*x**2-1.8538*x`

Une application intéressante



En appliquant la méthode précédente à la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle [-1 ;1], on obtient une approximation de π

Pour profiter de tutoriels vidéos, Flasher le QRCode ou cliquer dessus