Arbeta med komplexa tal på din grafräknare

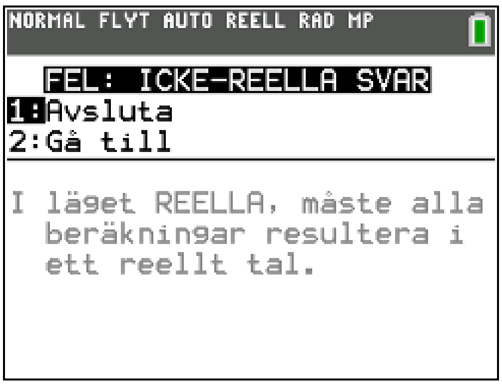
Hittills har du sannolikt arbetat med de flesta typer av tal. Heltal som 0 och eller 1 000 000, decimaltal som -2,5 eller 1,001. Du har också stött på till rationella och irrationella tal som ¾ och π. Alla dessa tal ingår i den uppsättning av tal som kallas för *reella* tal. Det finns en annan uppsättning tal som kallas för *imaginära* tal, och de innefattar alla kvadratroten av -1.

"Man kan väl inte kan ta kvadratroten av negativa tal" säger du. Nej, om du bara arbetarmed reella tal så kan du det inte. Men när du vet hur du ska använda imaginära tal och att de är kvadratrötter av negativa tal så är det möjligt. Det finns en definition av en konstant som kallas ***i*** och som är lika med $\sqrt{-1}$. Du kan nu beräkna kvadratrötter av andra negativa tal. Till exempel är
$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1} = 3 \cdot i$.

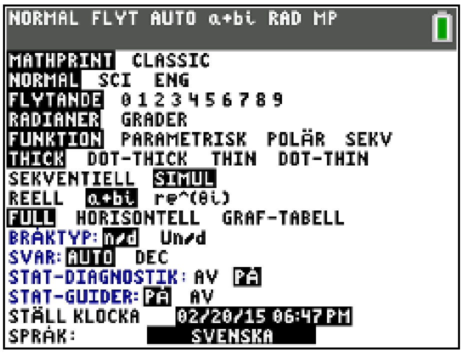
Som du kan se i rutan nedan finns det i huvudsak tre färdigheter för att använda komplexa tal på din grafräknare. Du måste veta hur din räknares lägesinställningar påverkar komplexa tal, hur du skriver talet ***i*** och vilka funktioner räknaren innehåller för beräkningar med komplexa tal. I det här dokumentet lär du dig var och en av dessa i tur och ordning.

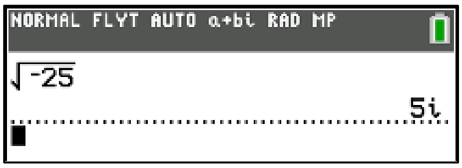
Vi visar också hur du utför beräkningar med de fyra räknesätten, addition, subtraktion, multiplikation och division.

Din räknare har ett läge som styr hur den hanterar komplexa tal. Om du till exempel försöker ta kvadratroten av ett negativt tal i läget *Reell* kommer din räknare att visa ett meddelande:



Om du nu på [mode] och växlar till läget *a+bi* kommer din räknare att ge ett komplext svar när du tar kvadratroten av ett negativt tal.





Om du ska kunna hantera beräkningar med komplexa tal på ett korrekt och snabbt sätt med din grafräknare så bör du ha följande förkunskaper:

1. Du kan använda den imaginära symbolen ***i*** i båda lägena. Du kan till exempel skriva (4+2***i***)/2 och få uttrycket beräknat i läget REELL men du måste vara i läget *a+bi* för att beräkna kvadratroten av negativa tal. Du kan byta läge i menyn [mode].
2. Symbolen ***i*** når du genom att trycka [2nd][.]
3. Alla de funktioner som din miniräknare har för att manipulera komplexa tal finns på fliken KPX i menyn [math]. Fem av dessa kommandon är särskilt användbara: konj(, reell(, imag(, vinkel(och abs(. Tabellen på nästa sida förklarar dessa funktioner och ger exempel på hur dessa funktioner används.

Med din grafräknare kan du arbeta med och visa komplexa tal i två olika former, *rektangulär* och *polär* form. För att välja ett läge för komplexa tal så trycker du på tangenten z och väljer läge på 8:e raden. Det finns alltså två olika lägen (format) för att visa och göra beräkningar. Det finns två lägen:

a+b***i*** (rektangulärt komplext läge)

re^vi (polärt komplext läge)

Vi ska nu beskriva kort de olika verktyg du har till hans för göra beräkningar med komplexa tal. Vi börjar med tal skrivna i rektangulär form.

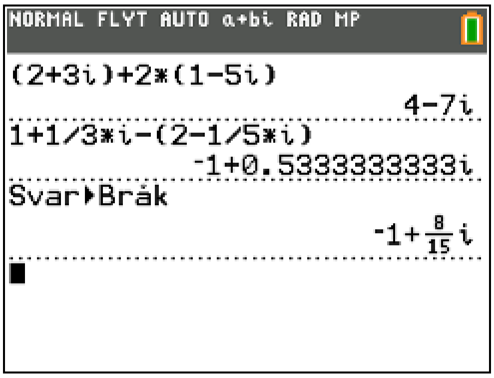
Tryck på tangenten math och välj sedan fliken KPX.

Vi visar nu bara 2 decimaler i beräknade resultat i exempelkolumnen

Instruktion	Vad utför instruktionen	Exempel
konj (	Returnerar det inmatade uttrycket med omvänt tecken framför den imaginära delen	konj(2+3*i*) 2-3i
reell (	Returnerar den reella delen av talet	5+4*i* 5
imag (	Returnerar den imaginära delen av talet	5+4*i* 4i
vinkel(	Beräknar vinkeln för ett komplext tal i polär form. Vi visar både för inställning radianer och grader.	vinkel(2+3*i*) 0.98 Vinkel (2+3*i*) 56.31
abs(	Beräknar magnituden av ett komplext tal	$\|3+4i\|$ 5
Rekt (	Omvandlar ett tal i polär form till ett tal i rektangulär form	$5e^{\pi/4i}$ Polär 3.53+3.53*i*
Polär (	Omvandlar ett tal i rektangulär form till ett tal i polär form	3+4i Rekt $5e^{0.93i}$

Räkneoperationer med komplexa tal

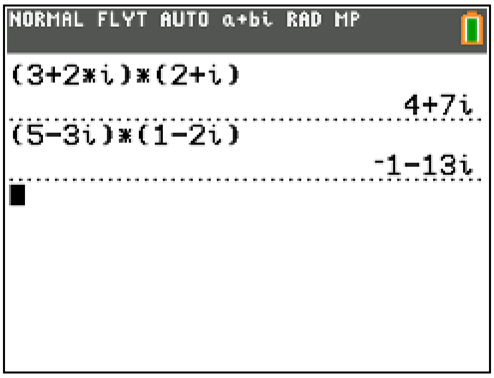
När man adderar, subtraherar, multiplicerar och dividerar komplexa tal så måste man dela upp beräkningarna genom att ta realdelarna respektive imaginärdelarna för sig. Det är precis som när man adderar och subtraherar vektorer med varandra. Det minns du kanske från kursen 1c.



Addition och subtraktion

Den första additionen ovan är ju enkel. I det andra uttrycket så får vi först ett närmevärde men om du trycker på tangenten math och sedan väljer 1:Bråk så omvandlas ditt komplexa uttryck till ett bråktal (det finns begränsningar för bråk där nämnaren blir för stor).

Multiplikation



Hur gick det här till? Vi tar det steg för steg!
I den första multiplikationen får vi

$3\cdot 2+3\cdot i+2\cdot 2i+2i\cdot i$

Vi förenklar och får då

$6+7i+2\cdot(-1)=4+7i$

$2i\cdot i$ är ju $2i^2=2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2=-2$

Vi går nu vidare med *division* av komplexa tal. För att förstå hur division fungerar så ska vi nu ta upp två begrepp som vi förklarade i tabellen i föregående spalt.

Konjugat

Du kommer väl ihåg konjugatregeln

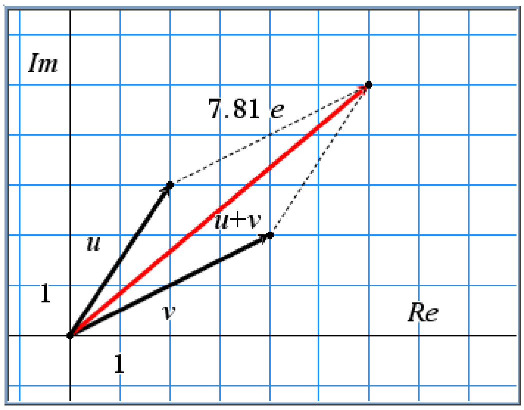
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Nu dyker den upp igen och blir väldigt användbar när man ska förenkla algebraiska uttryck innefattande komplexa tal. Om vi har ett komplext tal $a+bi$ så är konjugatet till detta tal $a-bi$. Om man till exempel har ett komplext tal $3+2i$ så kan man beräkna konjugatet med instruktionen

Skillnaden mellan talet och dess konjugat är att imaginärdelen har omvänt tecken.

Absolutbelopp

Vi plottar nu först två komplexa tal i det komplexa talplanet som vektorer.



Komplexa tal kan, förutom som punkter, också representeras som vektorer som börjar i origo. Om vi kallar det komplexa talet för z så är abs(z) absolutbeloppet av talet. Det är också lika med längden av vektorn.

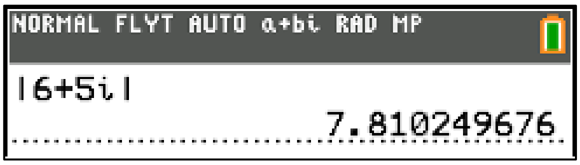
Vi har två komplexa tal u och v som visas ovan. Om du adderar dessa två tal så får du

$2+3i+4+2i=6+5i$

Längden av vektorn z kan beräknas med Pythagoras sats. Vi får

$\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}\approx 7{,}81$

Ett annat sätt för att få ett värde på *längden* av vektorn *u*+*v* så tar du *absolutbeloppet* av talet och det betecknas då $|z|$ eller $|u+v|$.



Absolutbeloppet är alltså avståndet från origo till det komplexa talet i talplanet.

Vad händer nu om vi multiplicerar ett komplext tal med dess *konjugat*. Vi prövar för talet $a+bi$.

$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-abi+bia-b^2i^2=$

$=a^2-b^2\cdot(-1)=a^2+b^2$

Vi ser att den imaginära enheten i försvinner

Detta betyder också att för att komplext tal z så är

$z\cdot\text{konj}(z)=|z|^2$

Åter till division:

När man dividerar så förlänger man bråket med konjugatet av talet i nämnaren. Då försvinner den imaginära delen där. Vi får ett reellt tal i nämnaren och sedan återstår bara multiplikation av uttrycken i täljaren.

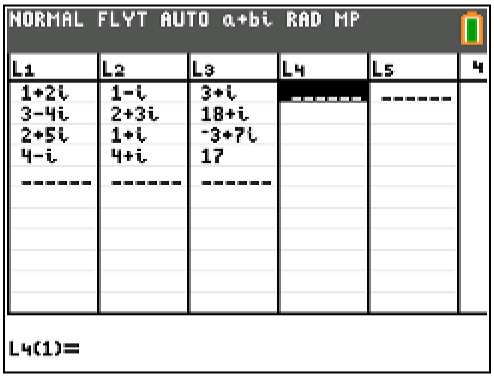
Så här går det alltså till:

$$\frac{4-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{12-8i-3i+2i^2}{3^2+2^2}=$$

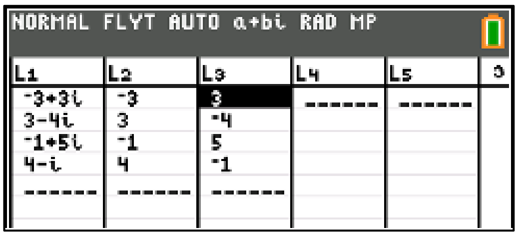
$$=\frac{12-11i+2\cdot(-1)}{13}=\frac{10-11i}{13}$$

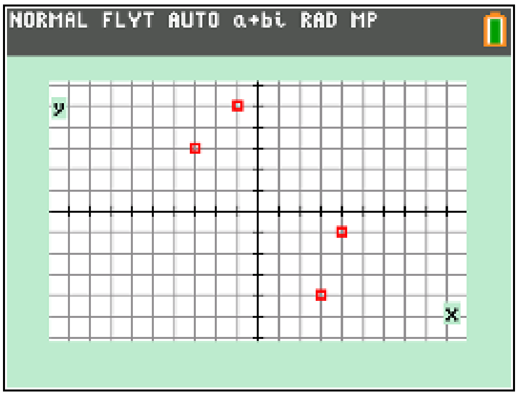
Pröva nu med några egna beräkningar innefattande multiplikation och division.

Du kan till och med arbeta med komplexa tal i listor. Se nästa sida där vi har multiplicerat talen i lista L1 med talen i lista L2



Nedan har vi i lista L2 realdelen av det komplexa talen i L1 och i L3 de imaginära delarna av motsvarande tal. Nu kan vi ju plotta dessa komplexa tal i ett komplext talplan



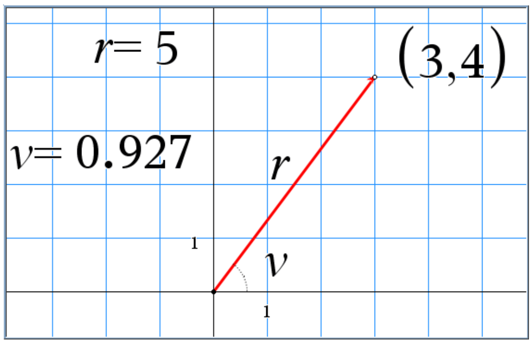


Komplexa tal i polär form

Hittills har vi bara sysslat med komplexa tal i rektangulär form, dvs på formen $a+bi$. Nu kan man också skriva tal på s.k. *polär* form som

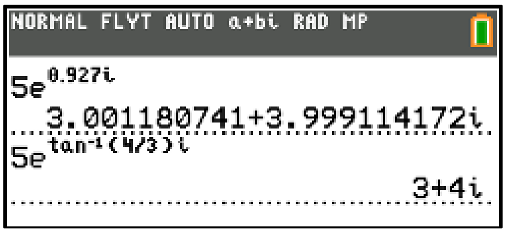
$r \cdot e^{iv}$

Där *r* är absolutbeloppet av det komplexa talet och v är vinkeln eller argumentet. Se figur nedan.



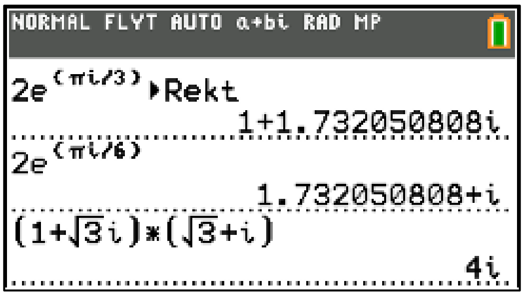
Talet kan alltså skriva som $5e^{i0{,}927}$. Vi har här inställningen radianer med inställningen grader får vi vinkeln till 53,1.

Vi gör nu en omvandling från polär form till rektangulär form med räknaren.



Vi har också använt det exakta uttrycket för vinkeln (argumentet). Det är ju $\tan^{-1}(4/3)$. Då får vi det exakta uttrycket för talet i rektangulär form.

Ett exempel till:

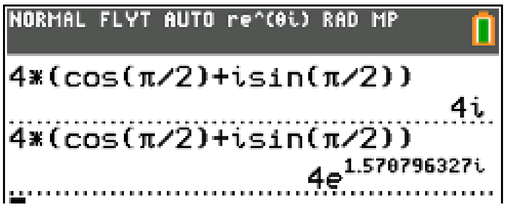


Vi får vid omvandlingen naturligtvis närmevärdet 1,7305… för $\sqrt{3}$.

Man kan också mata in ett det komplexa talet ovan på formen

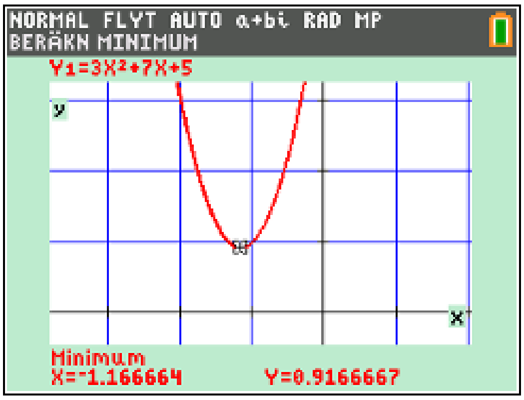
$r(\cos(v)+i\sin(v))$.

Talet på den formen omvandlas beroende på vilken inställning man har. Nedan har vi först inställningen rektangulär och sedan polär.

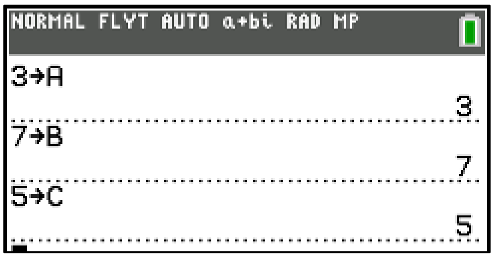


Lösning av andragradsekvationer som saknar reella rötter

Nedan har vi plottat funktionen $y = 3x^2 + 7x + 5$. Vi ser att denna funktion saknar nollställen och ekvationen $y = 3x^2 + 7x + 5 = 0$ saknar alltså reella rötter.



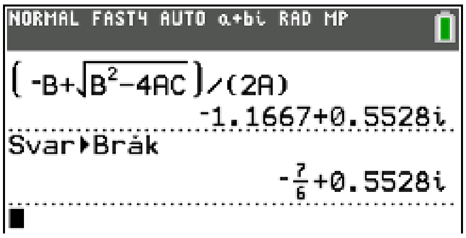
Vi börjar nu med alla lagra koefficienterna i ekvationen. För att lagra värden så trycker du på tangenten [sto→]. Det visas som en pil på skärmen.



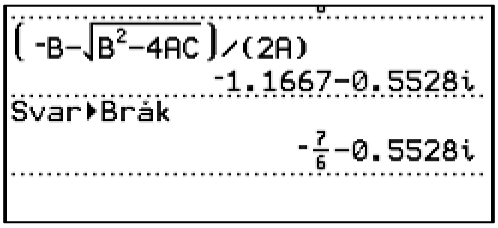
Lösningen av en andragradsekvation med koefficienterna *A*, *B* och *C* är

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Man matar in uttrycket och trycker på [enter]. Vi får den ena lösningen. Vi trycker sedan på [math] och väljer sedan 1:Bråk. Då omvandlas termen för den reella delen till ett bråk. Vi har här valt att bara visa 4 decimaler i svaret. (välj 4 på tredje raden under [mode].



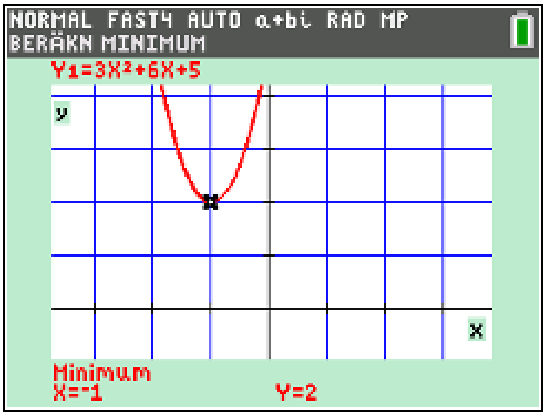
Den andra lösningen blir naturligtvis så här:



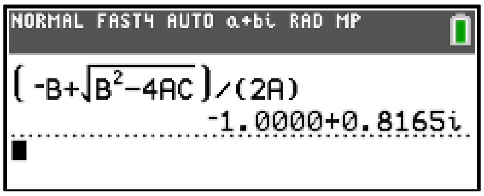
Det exakta svaret är

$$-\frac{7}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Vad händer nu om man ändrar koefficienterna så att t.ex. B får värdet 6? Vi plottar funktionen först! Även denna funktion saknar nollställen.



Nu gör vi beräkningen av den första roten:



En exakt beräkning med programmet TI-Nspire CAS ger följande resultat. Kontrollera genom att göra en exakt beräkning för hand.