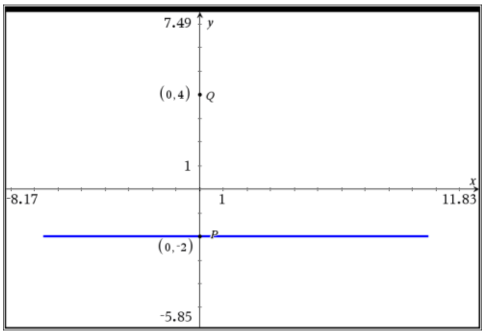
Att upptäcka parabeln

En parabel definieras som mängden av de punkter (orten för punkten), vars avstånd till en given punkt, *fokus*, är lika stort som deras avstånd till en viss linje, *styrlinjen*.

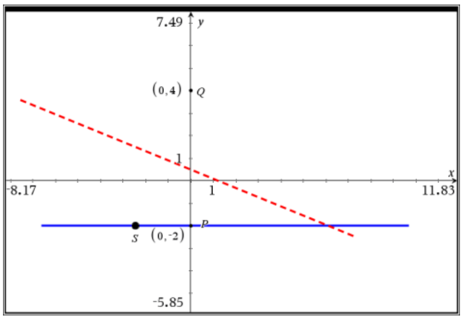
I denna övning begränsar vi oss till en styrlinje som är horisontell och ett fokus som ligger på *y*-axeln.

Några steg på vägen:

- Infoga en Grafapplikation. Välj verktyget **Punkt på** bland geometriverktygen och placera två punkter på *y*-axeln. Låt den ena punkten ligga ungefär vid *y*=4 och den andra vid *y*=-2.
- Bestäm koordinaterna för dessa båda punkter. Konstruera en linje *vinkelrät* mot *y*-axeln genom punkten med *y*-koordinaten ungefär -2. Verktyget Vinkelrät finns bland konstruktionsverktygen. Denna linje ska fungera som *styrlinje*.

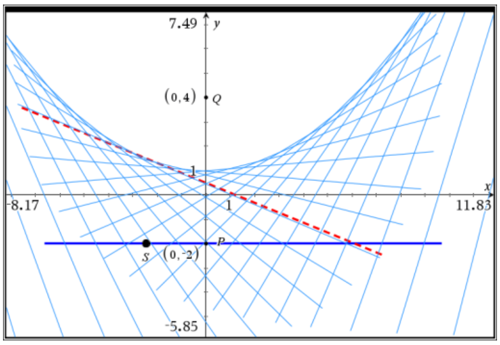


- Placera en punkt, *S*, på den räta linjen *y*=-2, t ex i fjärde kvadranten.
- Redigera sedan de båda *y*-koordinaterna så att den ena blir y=4 och den andra y=-2. Punkten (0, 4) ska fungera som *fokus*.
- Konstruera nu en *mittpunktsnormal* till sträckan mellan punkten *S* och fokus, *Q*, i bilden. Alla punkter på denna mittpunktsnormal uppfyller kravet att avståndet till punkten Q är detsamma som avståndet till punkten *S*. Alltså finns det speciellt en punkt på linjen vars vinkelräta avstånd till styrlinjen är detsamma som avståndet till punkten *Q*, fokus. Denna punkt är av speciellt intresse.

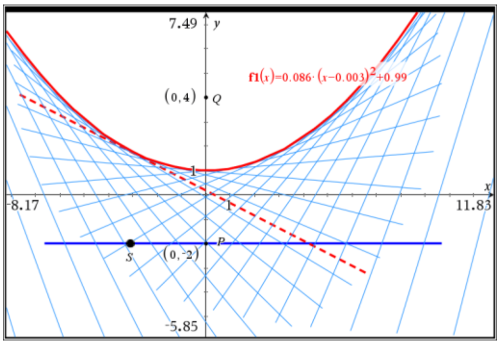


Flytta nu punkten S längs styrlinjen för att observera hur mittpunktsnormalen förändras.

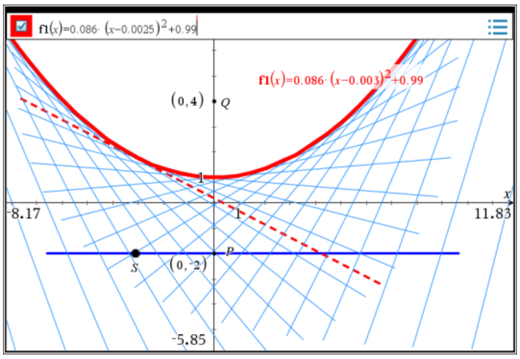
- Bestäm nu den geometriska orten för mittpunkts-normalen då punkten *S* på styrlinjen flyttas. Använd konstruktionsverktyget **Ort**. Klicka först på mittpunktsnormalen sedan på punkten på styr-linjen.



- Anpassa en kurva till den mängd av mittpunkts-normaler, som dyker upp. Gör detta genom att skriva in funktionen $y = x^2$ som f1(x) och flytta och forma denna så att du får en god anpassning till linjerna, dvs. så att kurvan tangerar linjerna så bra som möjligt. Du kan dra i benen för att vidga och krympa böjningen och i kurvans minimipunkt för att flytta den. Vilket blir ditt funktionssamband?



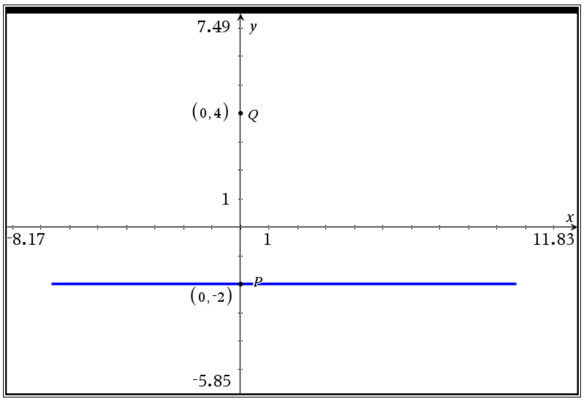
Du kan också klicka på kurvan så att du får upp funktionsuttrycket och kan redigera det.



- Infoga en sida med en Räknare-applikation eller en anteckningssida och teckna avstånden från en godtycklig punkt (*x*, *y*) dels till styrlinjen dels till fokus. Sätt sedan dessa avstånd lika och lös ut *y*. Hur stämmer detta funktionssamband överens med det du tog fram i grafapplikationen?

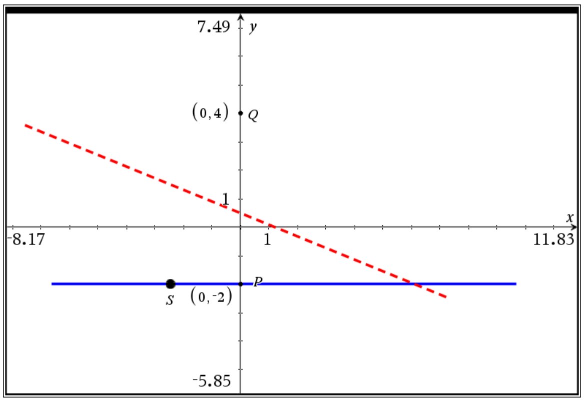
Läraranvisning

Placera två punkter, *P* och *Q*, på *y*-axeln med geometriverktyget **Punkt på**. Det finns under Punkter och linjer i geometrimenyn. Konstruera sedan en linje vinkelrät mot *y*-axeln genom punkten *P*. Välj Konstruktion och sedan Vinkelrät. Klicka först på *y*-axeln sedan på punkten *P*. Se bilderna nedan. Denna linje ska fungera som styrlinje. Punkten *Q* ska vara fokus.

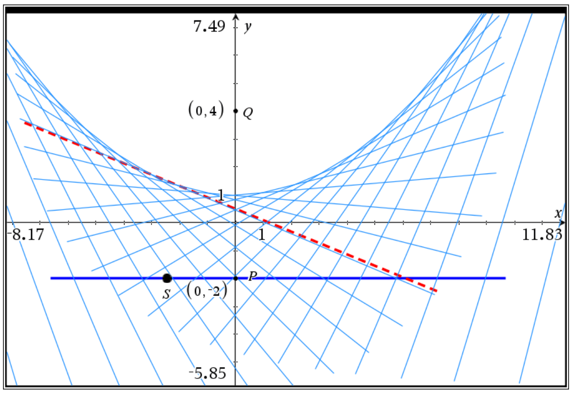


Placera en punkt på styrlinjen med verktygen **Punkter och Linjer** och **Punkt på**. Bestäm koordinaterna för punkterna *P* och *Q* genom att högerklicka på dem och välja koordinater och Ekvationer. Redigera de båda y-koordinaterna så att koordinaterna blir (0, 4) och (0, -2). Detta sker genom att i tur och ordning klicka på *y*-koordinaterna så att en box ritas runt värdet. Nu kan värdet redigeras.

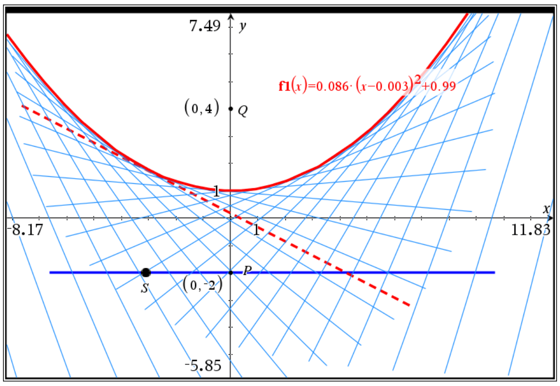
Konstruera *mittpunktsnormalen* till sträckan mellan *Q* och punkten på styrlinjen. Välj då på Geometrimenyn först **Konstruktion** och sedan **Mittpunktsnormal**. Klicka på de båda punkterna i godtycklig ordning. Se bilden nedan. I bilden har vi streckat denna linje i röd färg. Man kan ändra tjocklek och typ av linje genom att högerklicka och välja attribut. Det finns motsvarande layoutverktyg för punkter.



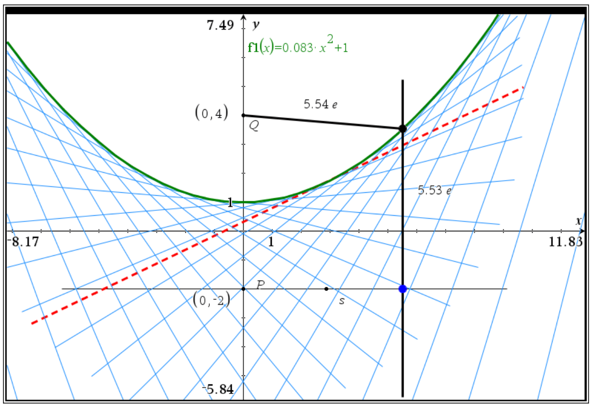
Flytta punkten *S* på styrlinjen för att observera hur mittpunktsnormalen, dvs. *tangenten* till ortskurvan, ändrar sitt läge. Bestäm sedan orten för mittpunktsnormalen då punkten flyttas. Välj från geometrimenyn Konstruktion och sedan verktyget **Ort**. Klicka först på linjen sedan på punkten *S*.
Flytta nu punkten *S* och se hur mittpunktsnormalen tangerar den konstruerade kurvan.



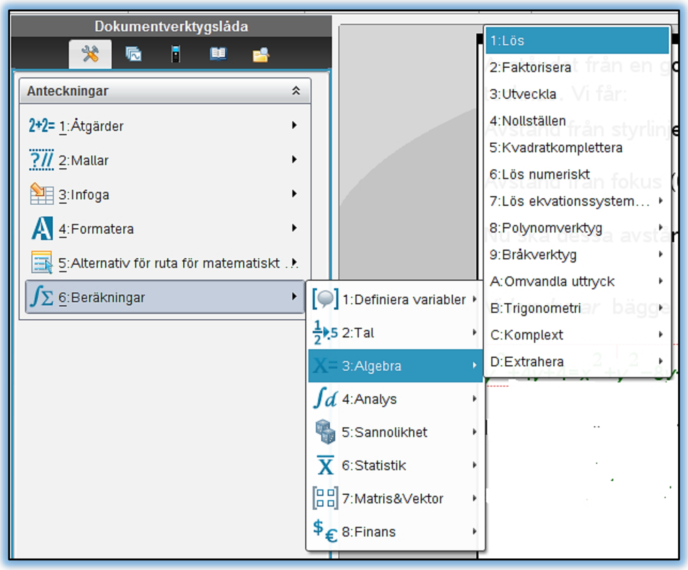
Rita nu funktionen $y = x^2$ som f1(x) och tryck enter. Flytta kurvan uppåt genom att föra markören över minimipunkten och använda greppverktyget att ”lyfta den”. Ändra sedan kurvans ”branthet” genom att fatta i ett av kurvans ”ben” och dra utåt till önskat resultat. Se de båda bilderna nedan.



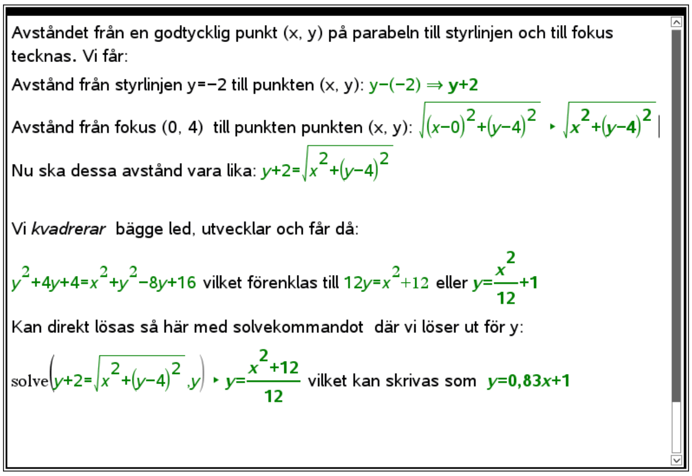
För att få en bättre anpassning kan du också redigera själva funktionsuttrycket genom att klicka på kurvan och redigera uttrycket på inmatningsraden. Du kan också klicka i uttrycket i koordinatsystemet. Resultatet framgår av bilden nedan. Nu kan du också lägga in två linjesegment från kurvan till på styrlinjen respektive styrlinjen och mäta avstånden. Dra i den blå punkten.



Infoga nu en antecknings-applikation genomför beräkningarna. I anteckningsappen har du tillgång till alla typer av beräkningar. Man kan naturligtvis använda Räknare-appen men där kan man inte skriva kommenterande text och använda formateringsverktyg.



Vi beräknar alltså avstånden från en godtycklig punkt (x, y) till styrlinjen och till fokus. Sedan sätts dessa båda avstånd lika och variabeln y löses ut med hjälp av Solve-kommandot. Inmatningar och beräkningar av matematiska uttryck är markerat med grön färg.



Avståndet från en godtycklig punkt (x, y) på parabeln till styrlinjen och till fokus tecknas. Vi får:

Avstånd från styrlinjen y=−2 till punkten (x, y): $y-(-2) \Rightarrow y+2$

Avstånd från fokus (0, 4) till punkten punkten (x, y): $\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} \blacktriangleright \sqrt{x^2+(y-4)^2}$

Nu ska dessa avstånd vara lika: $y+2=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$

Vi *kvadrerar* bägge led, utvecklar och får då:

$y^2+4y+4=x^2+y^2-8y+16$ vilket förenklas till $12y=x^2+12$ eller $y=\frac{x^2}{12}+1$

Kan direkt lösas så här med solvekommandot där vi löser ut för y:

$\text{solve}\left(y+2=\sqrt{x^2+(y-4)^2},y\right) \blacktriangleright y=\frac{x^2+12}{12}$ vilket kan skrivas som $y=0{,}83x+1$

Utvidgning

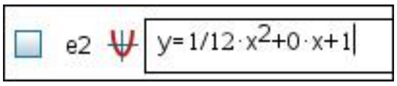
Studera vad som händer om styrlinjens läge ändras eller om fokus flyttas. Som en utvidgning kan duktiga elever studera en godtycklig, fortfarande horisontell, styrlinje $y = y_0$ och ett fokus i punkten (x_1, y_1). Vad som händer om styrlinjen inte är horisontell kan vara ytterligare en utmaning för de duktigaste eleverna.

Mer om verktyg för parabler

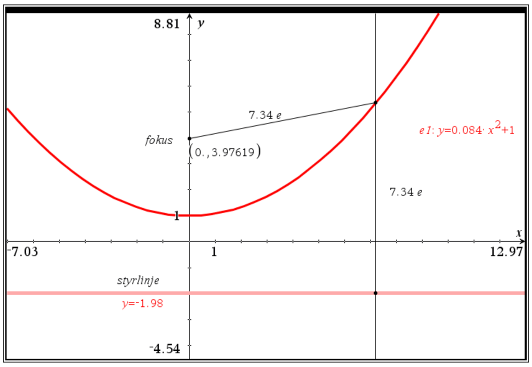
I TI-Nspire finns numera också speciella verktyg för att arbeta med olika kägelsnitt (andragradskurvor). Välj Inmatning/Redigera i grafapplikationen och sedan Ekvationer. Nu kan du välja mellan olika typer av kägelsnitt. Välj nu Parabel.

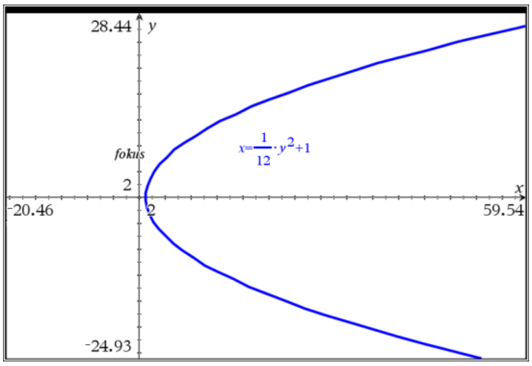
Nu kan du rita parabler på fyra olika former. Du kan t ex rita kurvan $x = \frac{1}{12}y^2 + 1$.

Så här skriver du nu ekvationen för den parabel vi modellerade tidigare.

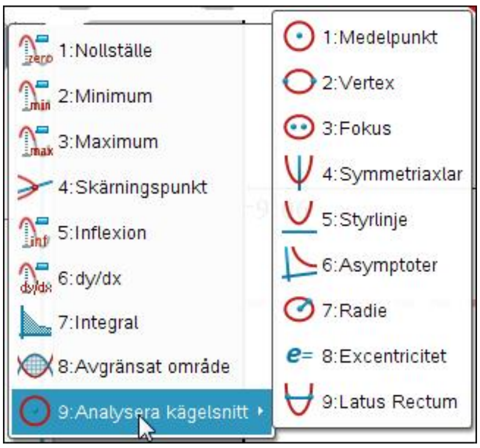


När du sedan ritar parabeln ser det ut så här. Vi har med analysverktygen också bestämt fokus och ekvationen för styrlinjen.





Här är alla analysverktyg för kägelsnitten:



Det finns ytterligare ett sätt att rita kurvor, som inte är funktioner. Använd då textverktyget genom att infoga en textruta och infoga uttrycket för ekvationen. Dra sedan textrutan mot någon av axlarna. Klart!