Derivata och en speciell exponentialfunktion

Vi ska nu gå igenom hur man kan komma fram till derivatan av en exponentialfunktion $f(x)=a^x$ där a är ett positivt tal skiljt från 1. Vi ställer upp ändringskvoten och använder potenslagarna

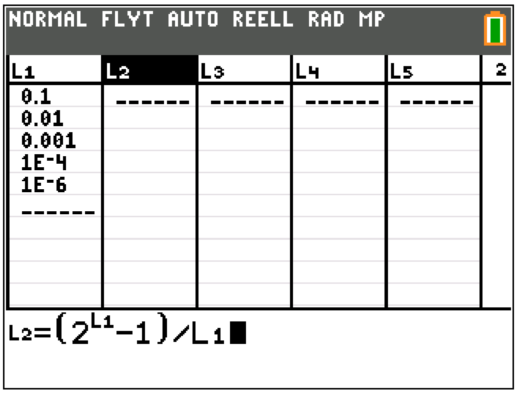
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h}=$$
$$=\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$$

Vi får alltså exponentialfunktionen a^x gånger en kvot

$$\frac{a^h-1}{h}.$$

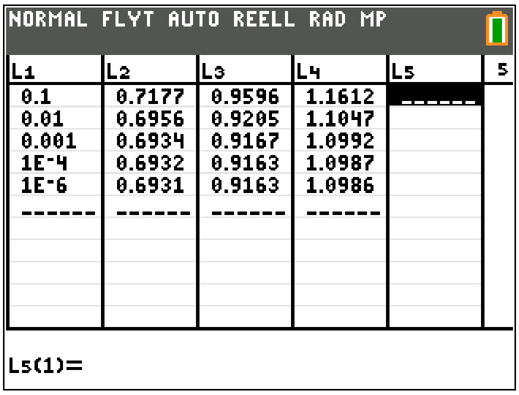
Vad händer med denna kvot när *h* går mot noll? Observera att denna kvot är oberoende av *x*.

Vi beräknar denna kvot för några olika värden på h. Vi använder statistikeditorn för dessa beräkningar. Vi har *a*-värdena 2, 2,5 resp. 3 i listorna L1, L2 och L3 och matar in uttrycket för $\frac{a^h-1}{h}$ i kolumnhuvudet i varje lista.


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
0.1	------	------	------	------
0.01				
0.001				
1E-4				
1E-6				

L2=(2^L1−1)/L1


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
0.1	0.7177	0.9596	1.1612	------
0.01	0.6956	0.9205	1.1047	
0.001	0.6934	0.9167	1.0992	
1E-4	0.6932	0.9163	1.0987	
1E-6	0.6931	0.9163	1.0986	
------	------	------	------	

L5(1)=

Kvoterna verkar stabilisera sig mot värdena 0,693, 0,916 och 1,099.

Det betyder att

$$\frac{d}{dx}2^x\approx 0{,}693\cdot 2^x$$
$$\frac{d}{dx}2{,}5^x\approx 0{,}916\cdot 2{,}5^x$$
$$\frac{d}{dx}3^x\approx 1{,}099\cdot 3^x$$

Derivatan är ju

$$\lim_{h\to 0} a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$$

För $a=2$ är konstanten mindre än 1, för $a=3$ är den större än 1 och för 2,5 någonstans mittemellan. Men i så fall borde det finnas ett tal någonstans mellan 2 och 3 där konstanten blir exakt 1, vilket innebär att motsvarande funktion är sin egen derivata. Vilket är detta tal?

Vi söker det värde på *a* som löser följande ekvation:

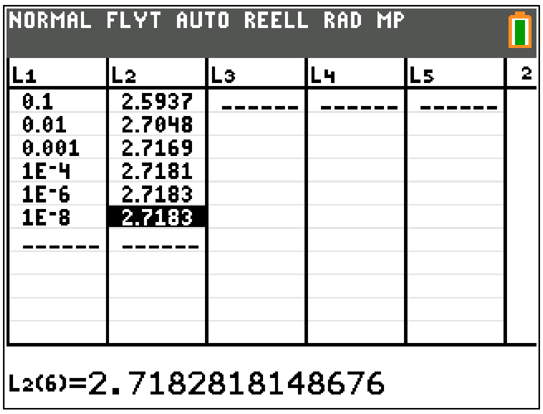
$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$$

Vi löser nu ut a:

$$\frac{a^h-1}{h}=1 \;\Rightarrow\; a^h-1=h \;\Rightarrow$$
$$a^h=h+1 \;\Rightarrow\; a=(h+1)^{1/h}$$

Nu beräknar vi värdet på *a* för några små värden på *h* och ser om värdena stabiliserar sig. Återigen går vi till statistikeditorn och gör dessa beräkningar.

I kolumnhuvudet i L2 matar du in uttrycket $(1+L1)^{1/L1}$ och trycker på enter.


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
0.1	2.5937	------	------	------
0.01	2.7048			
0.001	2.7169			
1E-4	2.7181			
1E-6	2.7183			
1E-8	2.7183			
------	------			

L2(6)=2.7182818148676

Om vi låter *h* gå mot noll så får vi ett gränsvärde:

$$a = \lim_{h \to 0}(1+h)^{1/h} \approx 2{,}7182818...$$

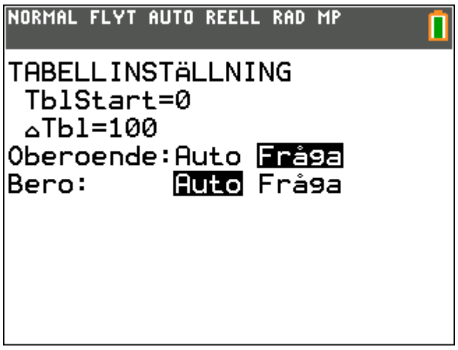
Detta tal kallas för ***e*** och är jämsides med π en av de viktigaste konstanterna i matematiken.

Vi kan skriva om uttrycket ovan om vi sätter *h*=1/*x*. Då blir 1/*h*=*x* och då får vi uttrycket

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

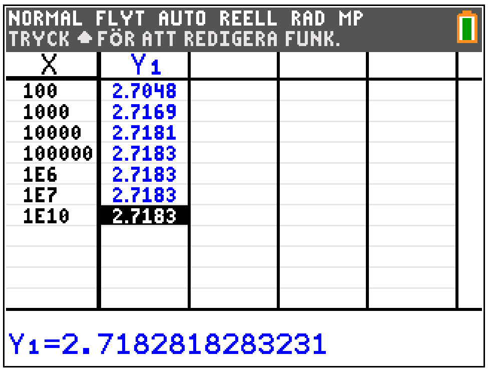
Om vi tar fram en värdetabell så ser vi att uttrycket ovan närmar sig värdet i beräkningarna på förra sidan.

Tryck på [2nd] [tablset]för att göra inställningar av värdetabellen.

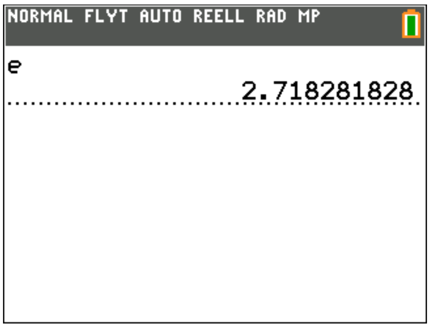


Med denna inställning så väljer du själv för vilka *x*-värden som funktionsvärdet ska beräknas. Den oberoende variabeln är ju *x* och den beroende variabeln själva funktionen.

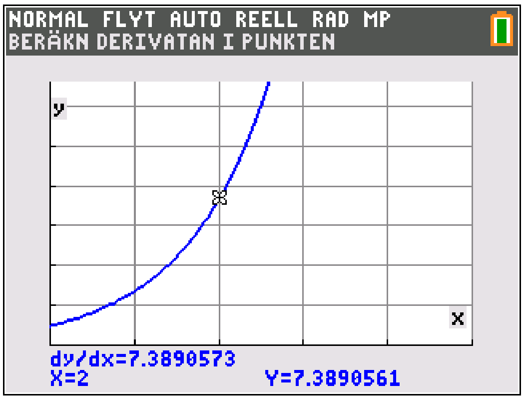
Tryck nu på [2nd] [table]. Nu kan du skriva in vilka *x*-värden du vill och få funktionsvärdet beräknat.



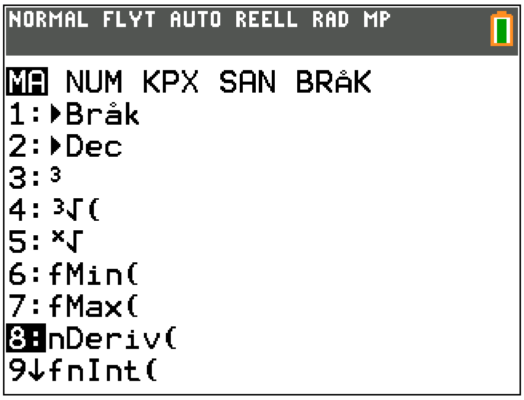
Vi har nu kommit fram till att $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$. Detta betyder att derivatans värde (Lutningen) i varje punkt lika med punktens *y*-värde. På räknaren kan du ta fram denna konstant genom att trycka på [2nd] [y=]. Det står ett ***e*** ovanför tangenten.



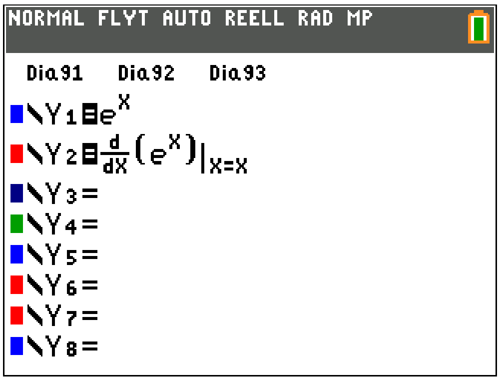
Här har vi plottat $y = e^{x}$ och sedan tryckt på [2nd][calc] och valt alternativ 6:dy/dx. Om vi väljer *x*-värdet 2 (eller något annat värde) så blir derivatavärdet lika med funktionsvärdet.



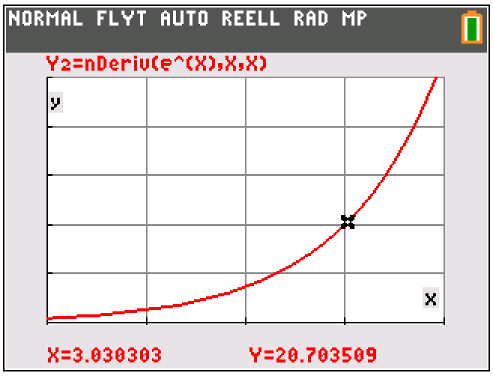
Om vi nu plottar $y = e^{x}$ och derivatafunktionen beräknat numeriskt så borde det bli samma kurva. För att använda den numeriska derivatafunktionen hos räknaren så skriver du först in e^{x} i Y1 och placera sedan markören i Y2 och trycker på [distr]-tangenten och väljer funktionen nDeriv.



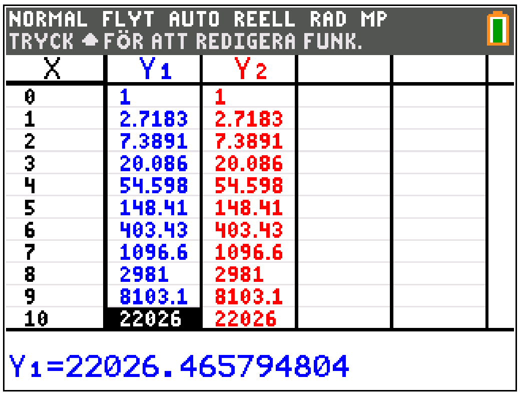
Så här ser då imatningsfönstret ut:



Nu kan vi plotta båda funktionerna.



De täcker varandra. En värdetabell ger detta resultat:



NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK ⬆ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

X	Y1	Y2
0	1	1
1	2.7183	2.7183
2	7.3891	7.3891
3	20.086	20.086
4	54.598	54.598
5	148.41	148.41
6	403.43	403.43
7	1096.6	1096.6
8	2981	2981
9	8103.1	8103.1
10	22026	22026

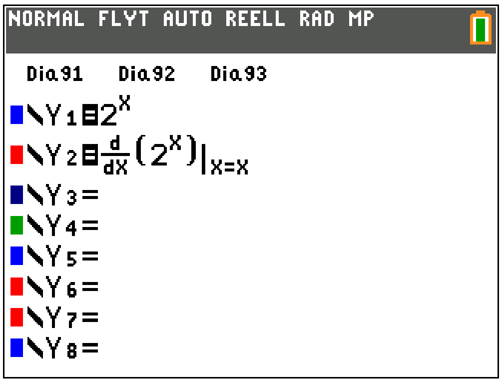
Y1=22026.465794804

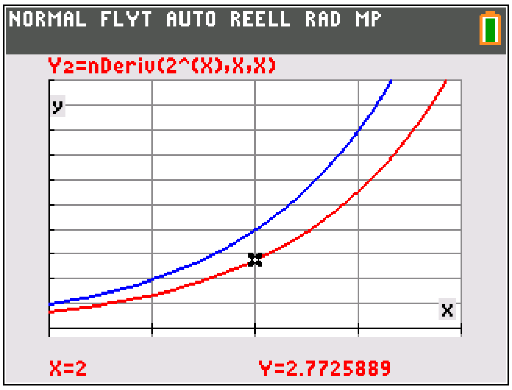
Räknarens inbyggda funktion för att beräkna derivator ger alltså ett väldigt bra resultat.

Om vi plottar någon av de andra exponentialfunktionerna vi tittade på, till exempel $y = 2^x$ så konstaterade vi att

$\frac{d}{dx}2^x \approx 0{,}693 \cdot 2^x$ Se sid 2.

Vi plottar nu funktionen och dess numeriska derivata.





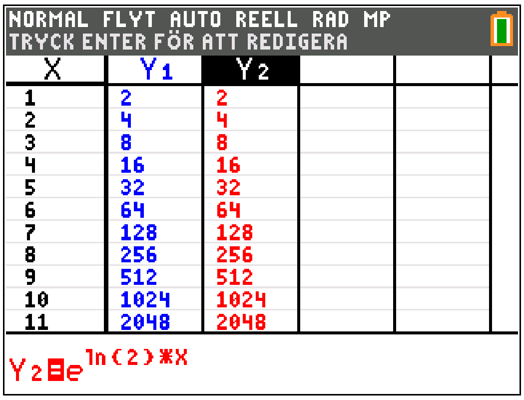
Du kan nu undersöka om värden för derivatafunktionen alltid är ca 0,693 gånger värdet av själva funktionen.

Man kan visa att en exponentialfunktion $y = a^x$ kan skrivas om med basen *e*. Man får då uttrycket

$y = e^{\ln a \cdot x}$

För funktionen $y = 2^x$ får vi då $y = e^{\ln 2 \cdot x}$.

Vi tar fram en värdetabell med dessa funktioner, den ena med basen 2 och den andra med basen ***e***. Vi får följande resultat. Kontrollera gärna värdena för Y2 genom att placera markören på något värde och avläsa värdet mer noggrant.



NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK ENTER FÖR ATT REDIGERA

X	Y1	Y2
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	32
6	64	64
7	128	128
8	256	256
9	512	512
10	1024	1024
11	2048	2048

Y2=e^ln(2)*X