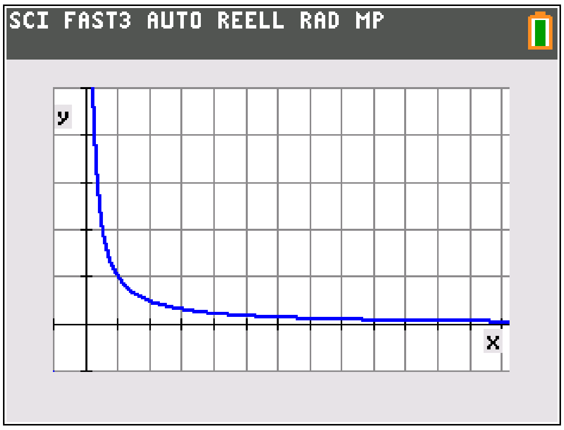
Gränsvärden när x blir stort

Om vi plottar funktionen $y = 1/x$ så ser vi att funktionsvärdet för allt större och större x kommer allt närmare noll. Detta kallas gräns-värde. Man säger att ”gränsvärdet för $1/x$ då x går mot oändligheten är noll”, vilket skrivs

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

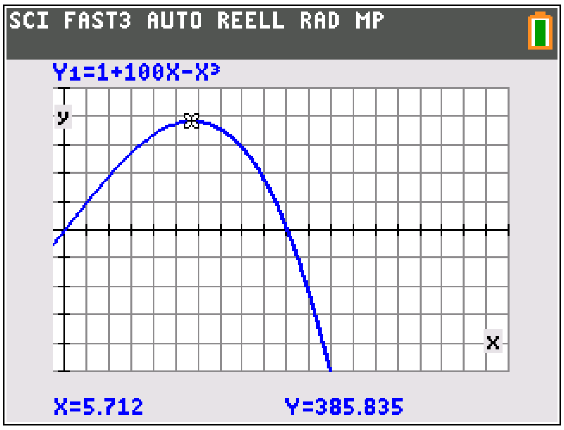


$1/x$ kan aldrig bli exakt noll, men det går att komma hur nära noll man vill. Man väljer då tillräckligt stora värden på x.

Nu tar vi en annan funktion som innehåller både x- och x^3-termer. Vi plottar funktionen

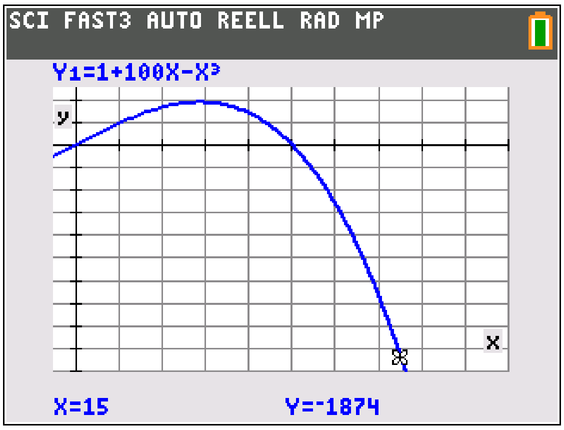
$$y = 1 + 100x - x^3$$

Och ser vad som händer för allt större x.



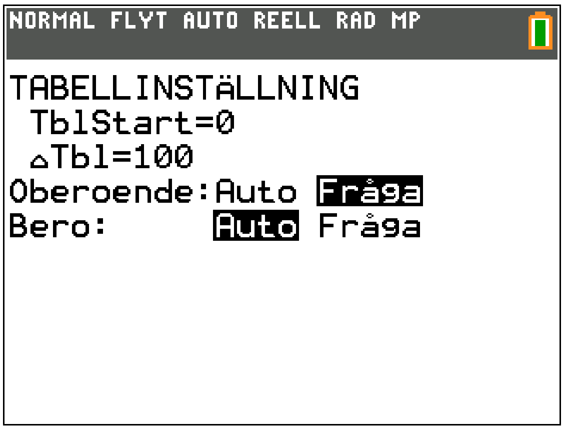
Vi ser att funktionen till att börja med växer och har ett maxvärde på lite mindre än 400 och sedan avtar den.

Vi ändrar fönstret för att kunna se kurvan för större negativa *x*.



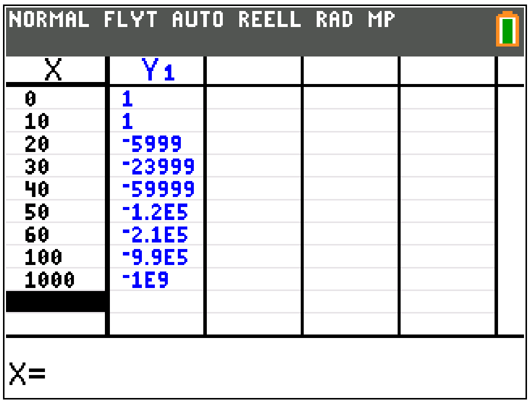
Redan när *x*=15 så är funktionens värde nästan -2000.

Man kan göra en värdetabell om man inte vill göra fler plottningar och avläsa värden. Tryck på [2nd] [tablset]för att göra inställningar av värdetabellen.



Med denna inställning så väljer du själv för vilka x-värden som funktionsvärdet ska be-räknas. Den oberoende variabeln är ju *x* och den beroende variabeln själva funktionen.

Tryck nu på [2nd] [table]. Nu kan du skriva in vilka *x*-värden du vill och få funktionsvärdet beräknat.



X	Y1
0	1
10	1
20	-5999
30	-23999
40	-59999
50	-1.2E5
60	-2.1E5
100	-9.9E5
1000	-1E9

X=

Vi ser att när x =1000 så är funktionsvärdet -10^9.

Slutsats: För positiva x blir förstagradstermen 100x positiv och tredjegradstermen negativ och delvis tar de ut varandra. När x blir allt större blir tredjegradstermen mycket större än förstagradstermen. När x=10 så är 100x=1000 och x^3 = 1000 också så de tar ut varandra. När x sedan blir allt större så dominerar x^3 – termen och eftersom den har ett negativt tecken så kommer funktionens värde att gå mot negativa oändligheten.

Vi kan då skriva:

$$\lim_{x\to\infty} 1 + 100x - x^3 = -\infty$$

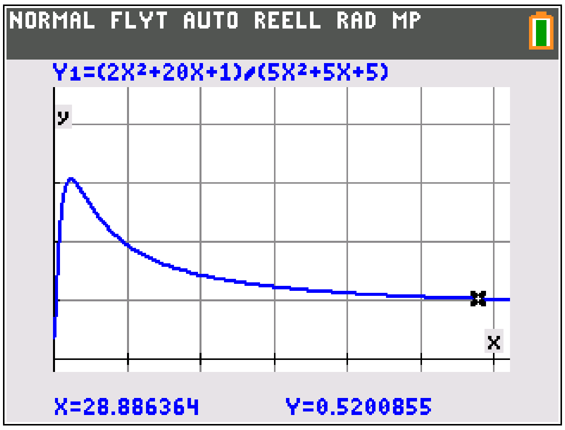
Vi tar ett exempel till där vi låter två polynom tävla mot varandra.

Undersök funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 + 20x + 1}{5x^2 + 5x + 5}$$

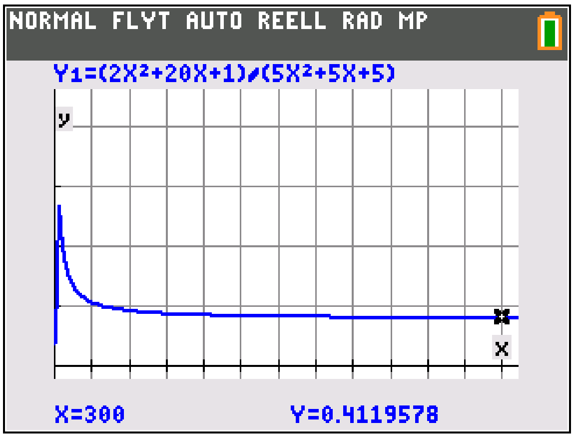
då x blir väldigt stort?

Om x är ett stort tal så måste täljaren bli väldigt stor. Även nämnaren blir mycket stor. Vi har här en kamp mellan täljaren och nämnaren. Vi undersöker hur det ser ut genom att plotta funktionen från x=0 till ett rimligt stort värde. Börja då med att mata in funktionen i inmatningsfönstret för funktioner.



Vi ser att funktionen till att börja med växer och har ett maxvärde på ca 1,5. Sedan avtar den och för värden nära 30 är värdet ca 0,5.

Vi får sträcka ut fönstret och undersöka vidare. Vi ställer alltså om fönstret.



Nu har värdet sjunkit en bit till.

På något sätt verkar det som värdet börjat stabilisera sig. Vi övergår nu från graffönster till värdetabell i stället.

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD CL

X	Y1
0	0.2
30	0.5158
300	0.412
1000	0.4036
10000	0.4004
100000	0.4
1E6	0.4
1E7	0.4

X=

Värdet verkar stabilisera sig på 0,4. Nämnaren är ungefär 2,5 gånger så stor som täljaren för riktigt stora x.

Förklaringen är även här att för stora värden är x^2 – termen mycket större än x-termen och jättemycket större än 1. De sista termerna i täljaren kan i princip negligeras och kan betraktas som avrundningsfel. Samma sak gäller för täljaren.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 20x + 1}{5x^2 + 5x + 5} \approx \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

om x är mycket stort

Värdet blir aldrig exakt $2/5$, Vi kan dock komma hur nära 2/5 som helst genom att göra x tillräckligt stort. Så följande gäller alltså

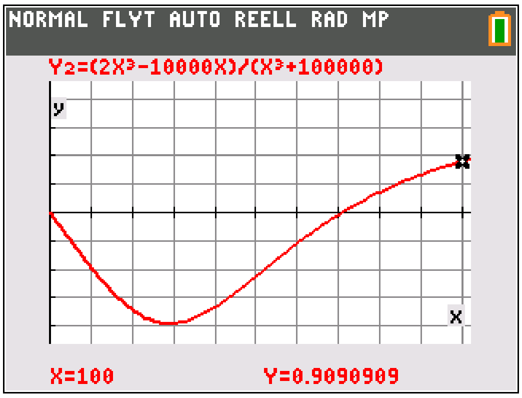
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{5}$$

Vi tar ett exempel till som du själv får undersöka närmare.

Undersök funktionen

$$\frac{2x^3-10000x}{x^3+1000000}$$

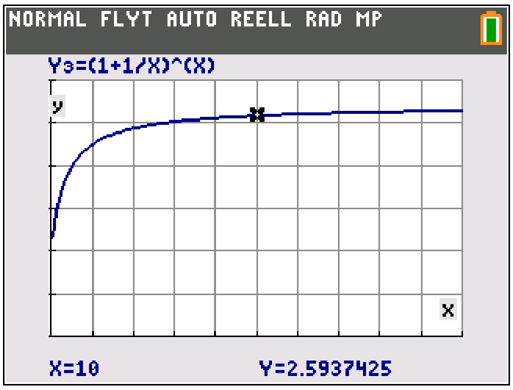
när x blir väldigt stort. Finns det något gräns-värde när $x \to \infty$? Vi har här plottat funk-tionen fram till x=100.



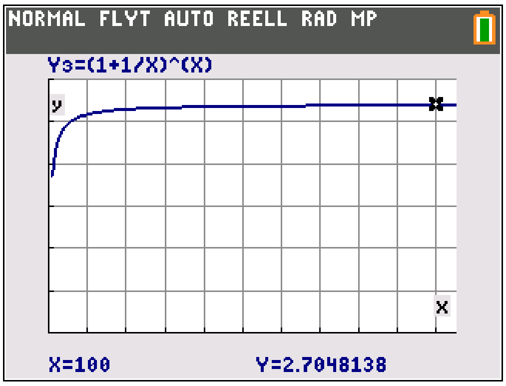
Vi övergår nu till uttryck som inte är består av polynom:

Undersök värdet på uttrycket $(1+1/x)^x$ för stora x.

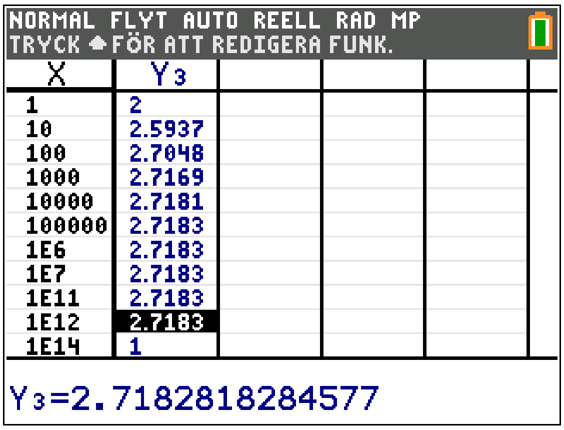
Vi kan se att uttrycket inom parentesen blir ungefär 1 när x är stort men å andra sidan ska vi upphöja detta till ett stort tal. Svårt att säga hur det slutar så vi får pröva.



Så här ser det ut i början. Funktionen växer snabbt i början men så avtar växandet. Vi får undersöka lite till.



Kurvan planar ut mer och mer. Vi övergår till värdetabell i stället.



Resultatet tycks varken bli 1 eller väldigt stort utan stabiliserar sig mot ett värde. När x är 10^{14} klarar inte räknaren beräkningarna längre utan vi får värdet 1.

Förklaringen till att vi får värdet 2,718... är lite komplicerad är men värdet stöter man på när man behandlar exponentialfunktioner i kursen. Talet dyker upp på många ställen i matematiken och kallas för *e*.

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}718281828...$$

På räknaren kan du ta fram detta tal genom att trycka på [tablset] [÷] (det står ett ***e*** ovanför tangenten)