Hur hänger kvadratrötter ihop med absolutbelopp?

Någon skriver följande på tavlan:

Vad är $\sqrt{25}$?

a) $\sqrt{25} = 5$

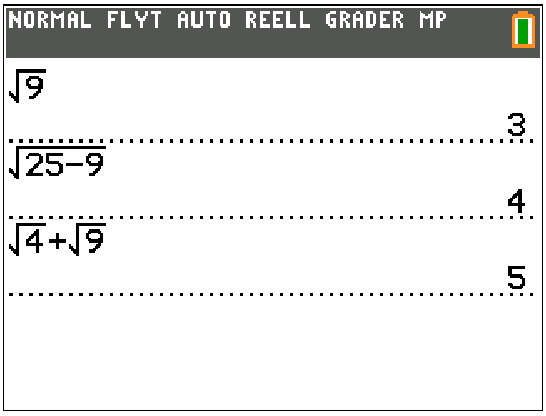
b) $\sqrt{25} = \pm 5$

Vilket tror du är det vanligaste svaret? Det beror naturligtvis på vilka elever man har framför sig. Utländska undersökningar visar att en majoritet av eleverna som studerar inledande matematik på gymnasiet, eller motsvarande, svarar alternativ b), vilket är fel!

Denna missuppfattning om vad rottecknet står för kan innebära stora problem i de fortsatta studierna, till exempel när man ska lösa olikheter och ekvationer med kvadratrötter.

I denna aktivitet ger vi en del tips om hur man kan använda grafritande teknologi för att öka förståelsen av kvadratrotsbegreppet.

Fån Wikipedia:
*Med ett tals kvadratrot menas den positiva kvadratroten, även kallad **principalvärdet**, av kvadratroten.*

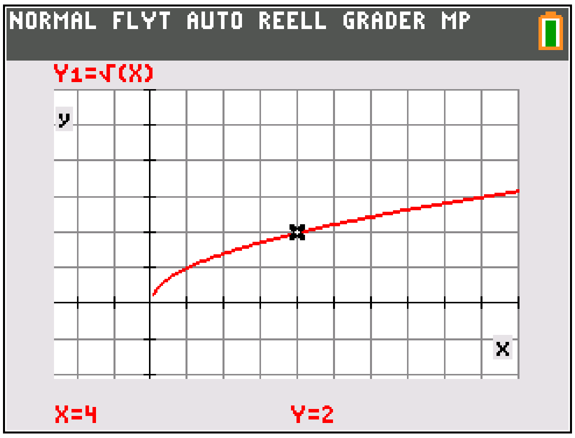


Till ekvationer av typen $y=x^2$ finns även negativa lösningar. Exempelvis gäller att

$(-3)^2 = 3^2 = 9$

så *ekvationen* $9 = x^2$ har två rötter, det positiva talet 3 och det negativa talet -3.

Anledningen till att man väljer bara den icke-negativa lösningen när man drar roten ur ett tal är att man vill att $\sqrt{x}$ ska vara en *funktion*, som då enbart får anta maximalt *ett* värde för varje *x*. Se bild.



Graf av roten ur x

Det här betyder till exempel att frågan " Förenkla $\sqrt{16}$ " har svaret 4 och att frågan "lös ekvationen $x^2 = 16$" har svaret -4 och 4.

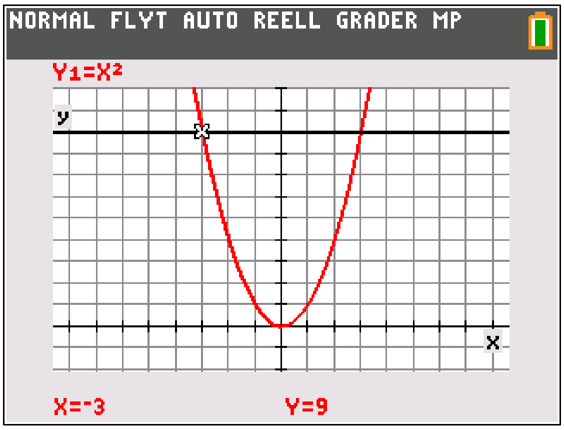
Lösningen på uppgiften "Beräkna *x* om $x^2 = 16$" brukar hos många elever se ut så här:

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Svaret är rätt men det är den andra raden som är fel. Det ska naturligtvis stå $x = \pm\sqrt{16}$.



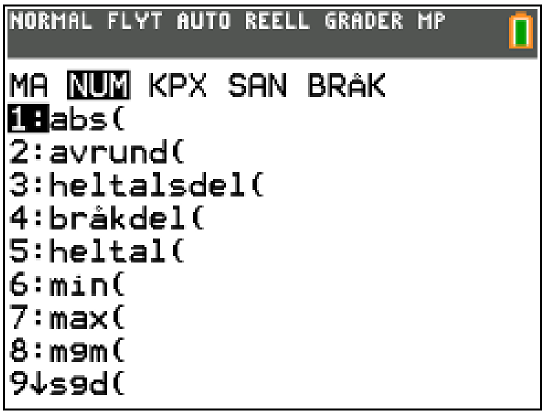
Skärningspunkterna mellan $y = x^2$ och linjen $y = 9$ är (-3, 9) och (3, 9).

Här kan man nu införa begreppet *absolut-belopp* som definieras så här:

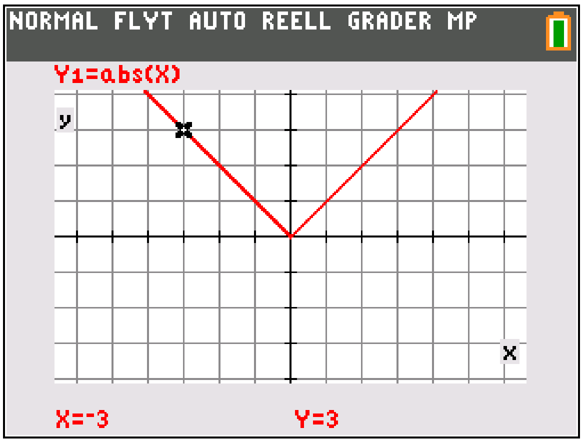
$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Det betyder till exempel att $|3| = 3$ och att $|-3| = -(-3) = 3$.

Vi ska nu plotta funktionen $y = |x|$ och behöver då kunna skriva in absolutbelopps-symbolen i editorn för funktionsinmatning. Tryck på math och välj sedan i menyn NUM det första alternativet **abs**.



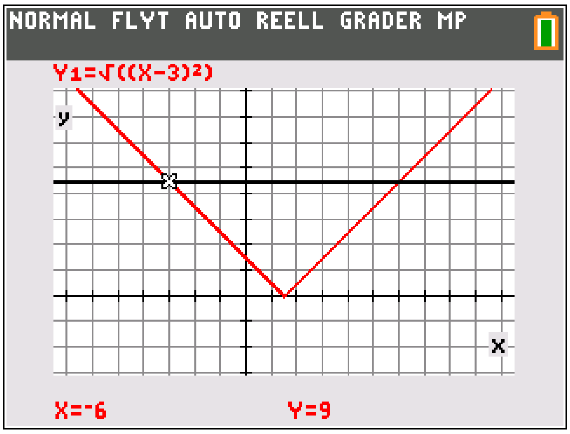
Så här blir resultatet. Vi ser att absolutbelop-pet för *x* = -3 blir 3. Stämmer med definitionen.

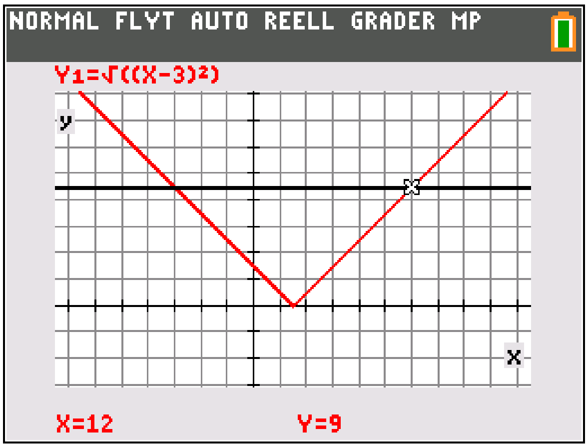


Här ett annat problem där vi använder oss av denna funktion. Vi söker lösningar till ekvationen

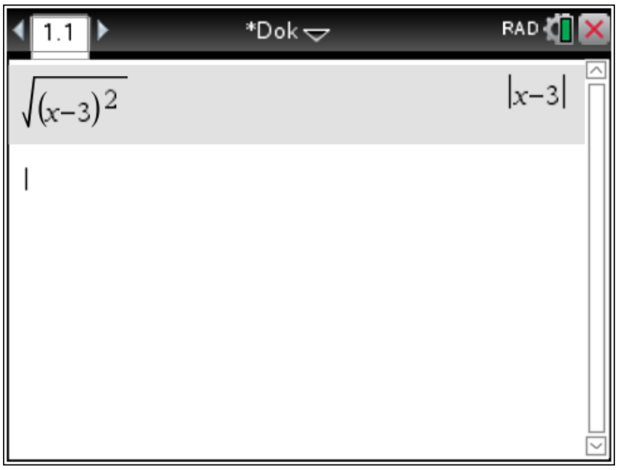
$$\sqrt{(x-3)^2} = 9$$

Det motsvaras i grafen av skärningarna mellan linjen y=9 och funktionen $y = \sqrt{(x-3)^2}$. Svaret blir *x*=-6 och *x*=12, som vi kan se i graferna.

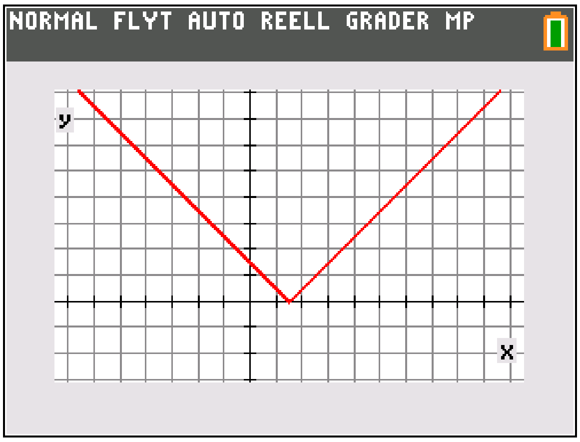




Om vi skriver vi in $\sqrt{(x-3)^2}$ på den *symbol-hanterande* räknaren *TI-Nspire,* som ”kan alge-bra” i får vi en direkt omskrivning på absolut-beloppsformen.



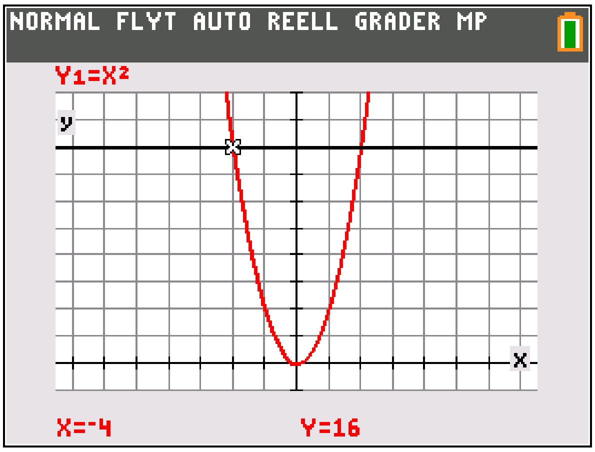
Vi plottar nu funktionen $y = |x-3|$ och ser då att vi får samma resultat som med $y = \sqrt{(x-3)^2}$.



Hur gör vi då med uppgiften ”Beräkna alla *x* för vilket det gäller att $x^2 > 16$”.

$$x^2 > 16$$
$$x > \pm\sqrt{16}$$
$x > \pm 4$ som också kan skrivas x>4 och x>-4.

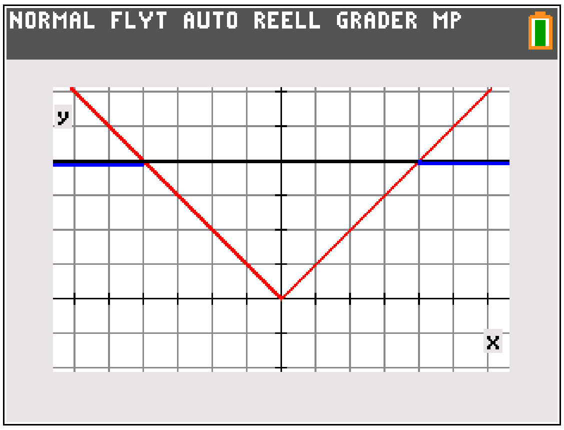
Det här stämmer ju inte. En lösning skulle ju då vara x =1. Det räcker att titta på grafen nedan, där vi plottat uttrycken på båda sidor i olikheten. Vi ser ju direkt att x^2 är större än 16 för x<-4 och x>4.



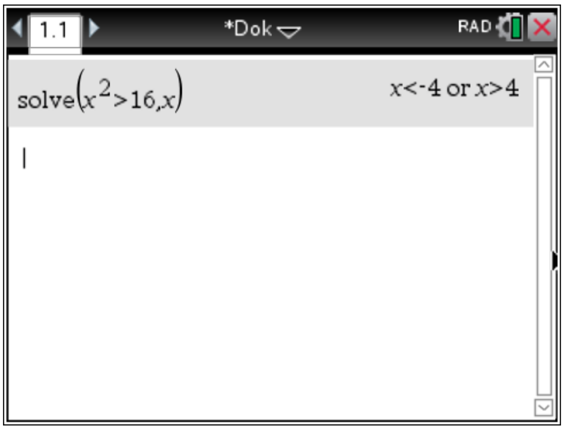
$x^2 > 16$ kan ju omskrivas som $\sqrt{x^2} > \sqrt{16}$ som i sin tur kan skrivas som $\sqrt{x^2} > 4$. Nu är ju $\sqrt{x^2} = |x|$ och vi får

$$|x| > 4$$

Vi ritar absolutbeloppsfunktionen $|x|$ och sedan har vi också plottat linjen *y*=4 också. Vi ser i grafen lösningen på *x*-axeln markerad med tjocka linjer på nästa sida.



Med en den symbolhanterande räknaren *TI-Nspire* får vi naturligtvis lösningen direkt



Om vi kvadrerar ett tal och sedan försöka komma tillbaka till det ursprungliga talet genom att ta kvadratroten ur talet, kan inte vi bestämma det ursprungliga talet. Om man till exempel berättar att man kvadrerat ett tal och resultatet är 9, så vet man ju inte om det ursprungliga talet var 3 eller -3.

Denna gåta tar oss tillbaka till skillnaden mellan uppgifterna ”Beräkna $\sqrt{9}$” och ”lös ekvationen $x^2 = 9$.” Det är viktigt för att förstå att kvadratrotsfunktionen $\sqrt{\ }$ och kvadratfunktionen inte är varandras *inverser*. Det är också viktigt att eleverna förstår anledningen till den matematiska konventionen:

*Med ett tals kvadratrot menas den positiva kvadratroten, även kallad **principalvärdet**, av kvadratroten.*

Av detta följer sedan att $|x| = \sqrt{x^2}$.