
Thema: Kreisteilungsgleichungen

Peter Schüller

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Kreisteilungsgleichungen, komplexe Lösungen

Lösung der Gleichung $x^n = z$ in \mathbb{C}

Was erhalten wir, wenn wir die Gleichung $x^n = z$ im Bereich der komplexen Zahlen lösen?

Das Lösen dieser Gleichung ist gleichbedeutend mit der Berechnung der n-ten Wurzel einer Zahl z (real oder komplex) im Bereich \mathbb{C} : $x = \sqrt[n]{z}$

Hinweis: Um Gleichungen über \mathbb{C} lösen zu können, wird statt *Solve (Gleichung, Variable)* der Ausdruck *cSolve (Gleichung, Variable)* eingegeben. So liefert zB *cSolve(x^3=1,x)* alle drei Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$. (bei Eingabe von $x:=(r \angle \varphi)$)

Aufgabenstellung:

Löse zunächst die Gleichung $x^5 = 9$ über \mathbb{C} . Die Lösungen sind grafisch darzustellen.

Die allgemeine Aufgabenstellung für die Lösung der Gleichung $x^n = z(r, \varphi)$ und eine zugehörige Erklärung/Einführung findest Du auf dem ersten Blatt des tns-Files.

⇒ Wie beeinflussen die Größen r , φ und n in der Gleichung $x^n = z(r, \varphi)$ jeweils das Ergebnis?

⇒ Findest Du eine Erklärung für diese Zusammenhänge?

Schreibe Deine Erkenntnisse nieder.

✂-----

Didaktischer Kommentar

Die Schüler/innen sollen durch experimentelles Variieren der Parameter selbst die Zusammenhänge und Auswirkungen erkennen.

Bekanntermaßen liegen die Lösungen von $x^n = z$ auf einem Kreis mit Radius $|z|$ und teilen diesen in n gleiche Teile. Deshalb sind diese Gleichungen über \mathbb{C} auch als *Kreisteilungsgleichungen* bekannt. Die Lösungen legen die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks fest.

Um den Schülern und Schülerinnen den Erkenntniserwerb zu erleichtern, wurde bewusst die Darstellung der komplexen Zahlen in Polarkoordinatenform und mit dem Winkelmaß Grad gewählt.

Erwartung:

Die S&S sollen sinngemäß folgende Fakten formulieren:

- für jede gewählte (Wurzel)Potenz teilen die Lösungen den Einheitskreis in entsprechend viele gleichgroße Sektoren,
- der gewählte Winkel φ legt auch dem Winkel für die erste Lösung im ersten Quadranten fest,
- je größer der Radius, desto länger die Ergebnisvektoren.

Technologiehilfe

cSolve (Gleichung, Variable) liefert auch die komplexen Lösungen einer Gleichung.

Die komplexe Zahl i kann rasch über `@i` eingegeben werden, das Winkelzeichen \angle über `@<` für die Polarformschreibweise $z := (r \angle \varphi)$