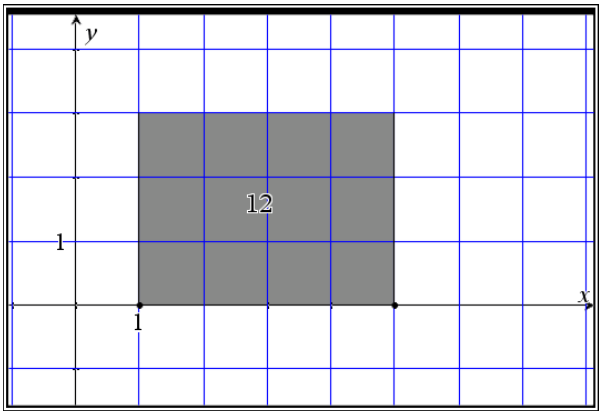
Beräkna areor och hur man kan använda summasymbolen

Integrering är en process där man beräknar kvantiteter genom att lägga ihop mindre delar. I denna aktivitet ska vi visa den enklaste tillämpningen av integrering, nämligen beräkning av areor under kurvor.

Vi börjar från början med ett mycket enkelt exempel: *Beräkna arean under funktionen y= 3 mellan x= 1 och x= 5.*

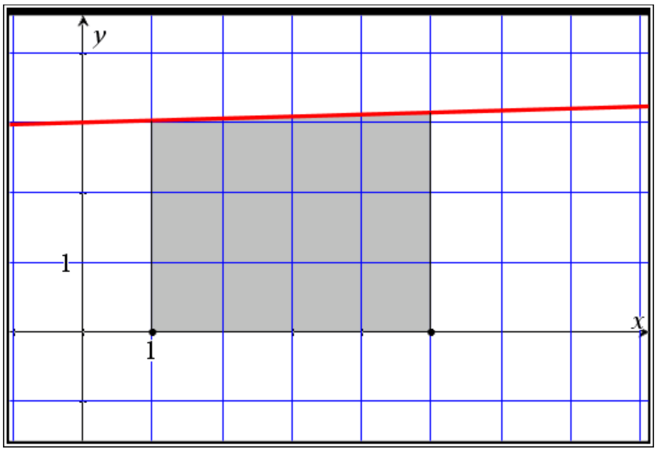


Detta var ju synnerligen enkelt. Basen 4 och höjden 3 i rektangeln ger arean 12.

Nästa exempel är att på *ett ungefär* beräkna arean under funktionen 3+0,03x mellan x=1 och x= 5 som förut.

Lösning: Detta är nästan samma problem, förutom att höjden på kurvan inte är konstant. Trots det ändras inte höjden mycket mellan x = 1 och x = 5 så vi kan ersätta kurvan med den horisontella linjeny = f (1) för att få en ungefärlig area. Den blir

$(5-1)\cdot f(1) = 4\cdot 3{,}03 = 12{,}12.$



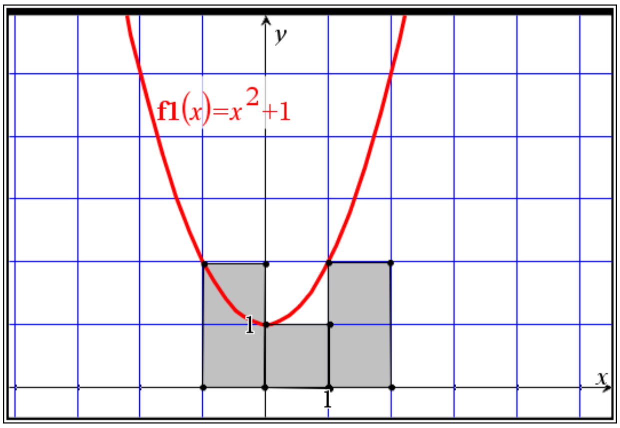
Här *underskattar* vi arean lite grand eftersom y går från 3,03 när x = 1 till 3,15 när x = 5.

Man kan också *överskatta* arean genom att använda y-värdet 3,15 och då blir arean $4\cdot 3{,}15 = 12{,}60$.

Ett tredje sätt är att beräkna funktionsvärdet vid mittpunkten, dvs när *x* = 3. Då blir arean $4\cdot 3{,}09 = 12{,}36$.

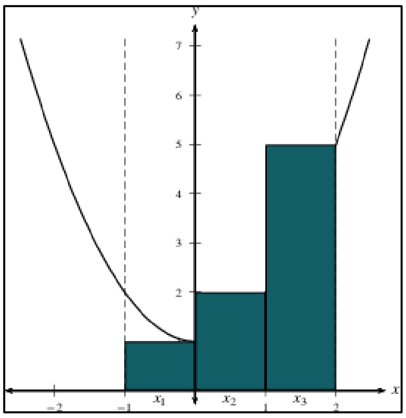
Hur gör vi nu när vi har en betydligt mer böjd kurva, som t ex $y = x^2 + 1$?

Svaret är dela upp intervallet i bitar där varje bit är så liten att funktionen inte förändras mycket. Sedan lägger man ihop bitarna för att få en bra uppskattning av den totala arean. Som så mycket annat i den matematiska analysen är då det exakta svaret gränsvärdet när antalet delar går mot oändligheten.



Vi kan här se att arean blir 5. Här har vi använt tre intervall och y-värdet för x= -1, 0 och 1 för att uppskatta arean.

Man kan också använda den högra ändpunkten, vilket grafen nedan visar.



En uppskattning av arean blir nu $1\cdot f(0) + 1\cdot f(1) + 1\cdot f(2) = 1 + 2 + 5 = 8.$

Vi får ganska olika värden. Man får nog dela upp i allt fler intervall för att få ett mer säkert värde.

Vi ska nu gå igenom ett ganska smart sätt att uppskatta arean under kurvan och där man kan ställa in hur många intervall man ska använda.

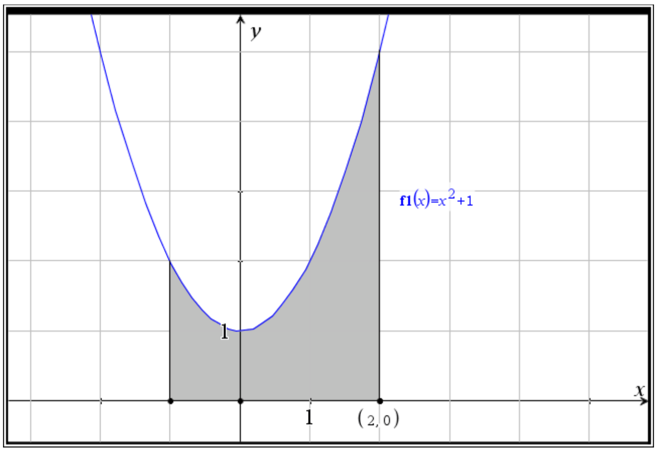
Den totala arean under $y = f(x)$ i ett intervall kan approximeras med uttrycket

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Uttrycket betyder att vi ska summera arean av n st rektanglar. En sådan här summa kallas Riemannsumma efter den tyske matematikern Bernhard Riemann (1826-1866).

- n är det antal delar ett intervall ska delas upp i. Vi har alltså n rektanglar sammanlagt.
- Δx är storleken på en del i intervallet. Om a och b är intervallets start- och slutpunkt är $\frac{b-a}{n} = \Delta x$.
- $f(x_i)$ är höjden på rektangel i intervall i. Vi kan mäta höjden i början, slutet eller var som helst i intervallet.

Alltså är då $f(x_i) \cdot \Delta x$ arean av rektangel i.



Eftersom hela intervallet har bredden 3 så kan vi i vårt exempel skriva bredden på ett delintervall som

$$\Delta x = \frac{3}{n}$$

Det här betyder att

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{3}{n}$$

$$x_2 = -1 + 2 \cdot \Delta x = -1 + 2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$x_i = -1 + i \cdot \Delta x = -1 + i \cdot \frac{3}{n}$$

$-1 + i \cdot \frac{3}{n}$ som kan skrivas som $-1 + \frac{3 \cdot i}{n}$ är alltså högra ändpunkten i intervall i.

Hela arean kan då med hjälp av summasymbolen som vi nämnde tidigare skrivas som

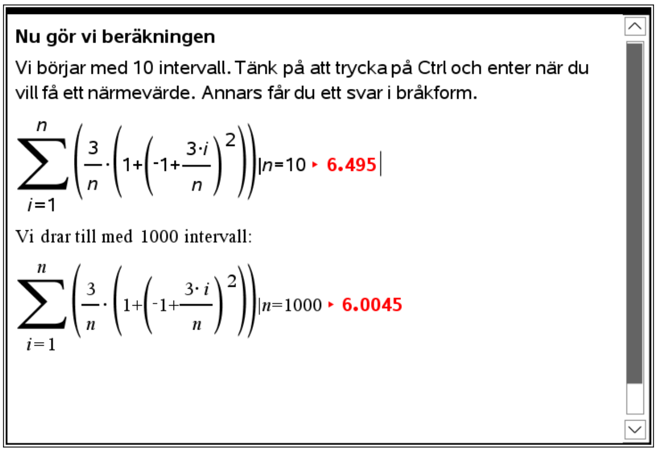
$\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$ och vi får då att arean ungefär blir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot f\left(-1 + \frac{3 \cdot i}{n}\right)$$

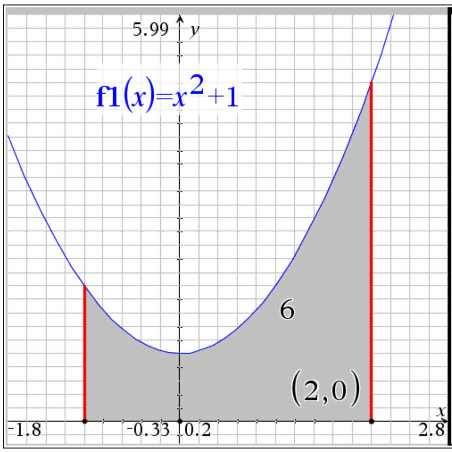
I detta fall med funktionen $f(x) = 1 + x^2$ får vi då

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot \left(1 + \left(-1 + \frac{3 \cdot i}{n}\right)^2\right)$$

No kommer det spännande. Vi ska se hur det blir när vi gör beräkningarna i TI-Nspire.



Med 1000 intervall får vi värdet 6,0045. Det exakta värdet är 6. Se nästa sida i Nspire-dokumentet.



Define f(x)=x^2+1
▸ *Klar*

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ ▸ 6

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot\left(1+\left(-1+\frac{3\cdot i}{n}\right)^2\right)\right)\right) \blacktriangleright 6$$

Man kan också göra beräkningarna i ett kalkylark.

	A intervall	B area	C	D
=			=approx(area)	
1	3	8	8.	
2	10	1299/200	6.495	
3	100	120909/20000	6.04545	
4	1000	12009009/2000000	6.0045045	
5	10000	1200090009/200000000	6.000450045	
6	100000	120000900009/20000000000	6.000045000...	
7				

B1 $=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot\left(1+\left(-1+\frac{3\cdot i}{n}\right)^2\right)\right)|n=a1$

Vi skriver alltså in den mastiga formeln i cell b1 och använder sedan verktyget *Fylla* för att få beräkningarna utförda i cellerna nedanför. Det tog några sekunder för att få beräkningen utförd för 100 000 intervall.

Om vi inte sätter in något värde på *n* blir resultatet så ett uttryck med *n*. Se nästa sida.

Utan att ange något värde på n får vi:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot\left(1+\left(-1+\frac{3\cdot i}{n}\right)^2\right)\right) \blacktriangleright \frac{3\cdot(4\cdot n^2+3\cdot n+3)}{2\cdot n^2}$$

Om vi dividerar alla termer med n^2 får vi

$$\text{expand}\left(\frac{\frac{3\cdot(4\cdot n^2+3\cdot n+3)}{n^2}}{\frac{2\cdot n^2}{n^2}}\right) \blacktriangleright \frac{9}{2\cdot n}+\frac{9}{2\cdot n^2}+6$$

För stora n går alltså utrtryckets värde mot 6.

Slutligen beräknar vi gränsvärdet för den så kallade Riemannsumman när *n* går mot oändligheten.

Här testar vi att det fungerar för integralen av e^x från 0 till 1.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{i}{n}}\right)|n=1000$$
▸ 1.71914111256

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{i}{n}}\right)\right)$$
▸ e−1