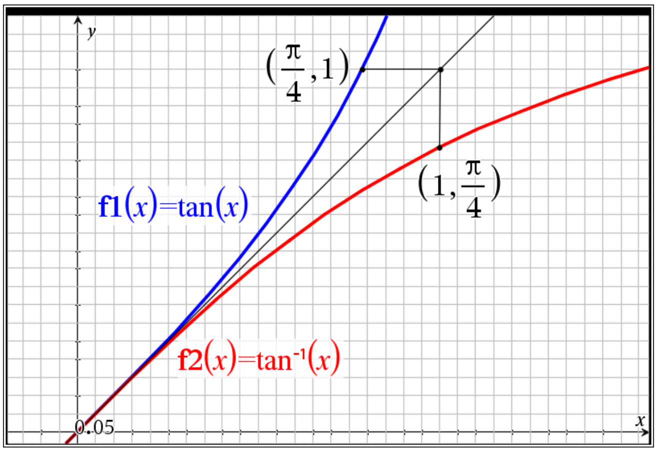
Synvinkel på två sätt

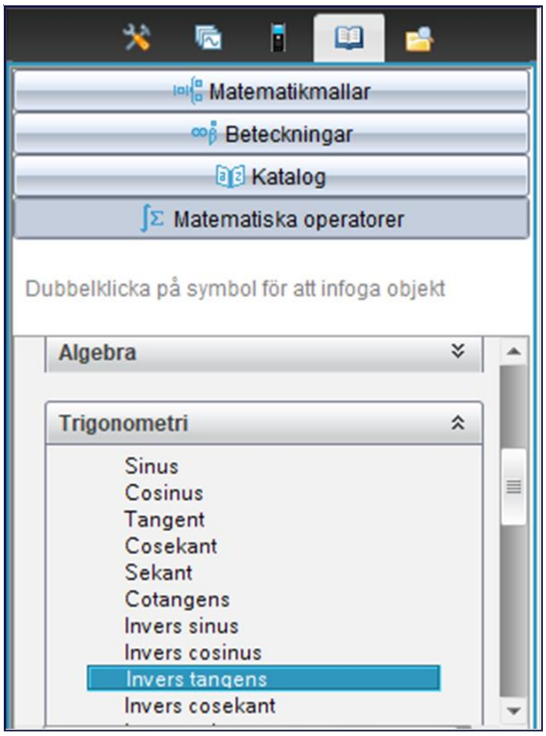
I denna aktivitet så löser vi ett problem på två olika sätt med trigonometri. Vi använder tangens i första fallet och sinus i det andra. Man ska beräkna den största synvinkeln som ett föremål kan ses under.

Visa gärna graferna för tan(x) där x är vinkeln och arctan(x) där x är värdet på tangens för vinkeln. Arctan(x) är alltså en vinkel.

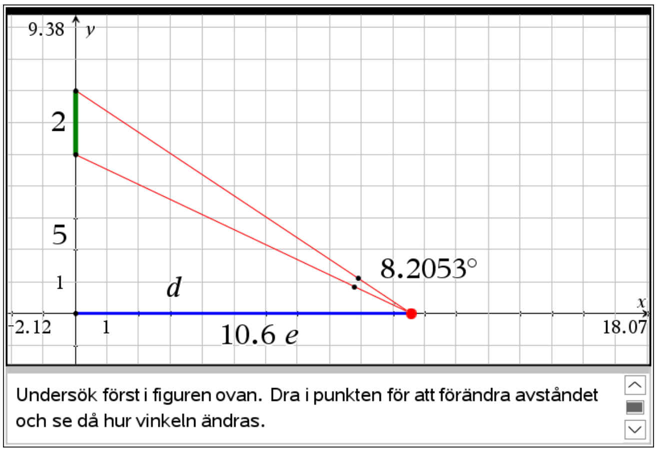
OBS: Om du skriver arctan(x) skriver TI-Nspire om det till $\tan^{-1}(x)$.



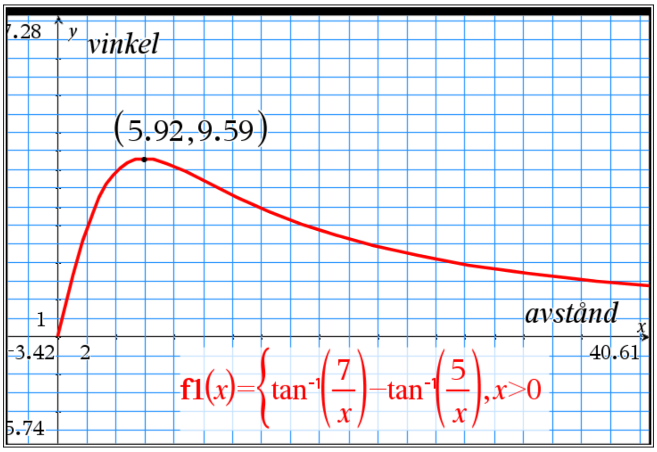
Du når arcusfunktionerna även här



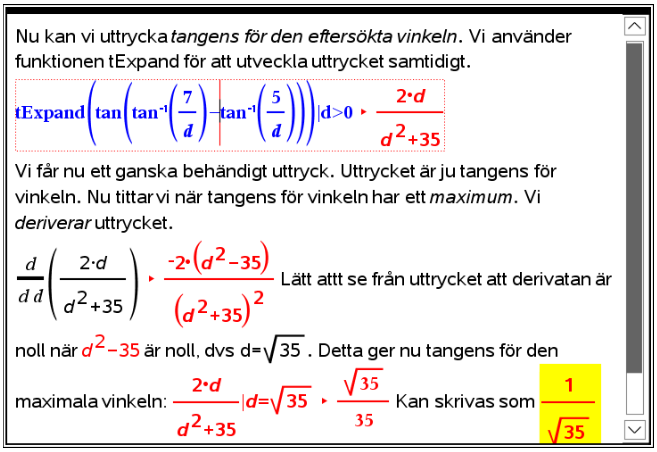
Börja med att skaffa dig en bild av situationen genom att göra en skiss a appen Grafer och mäta avstånd och vinkel med geometriverktygen.



Dra i den röda punkten och titta hur vinkeln förändras.



Grafisk/numerisk lösning ger närmevärden på avståndet vid den största vinkeln. Vi ska nu lösa uppgiften exakt algebraiskt.

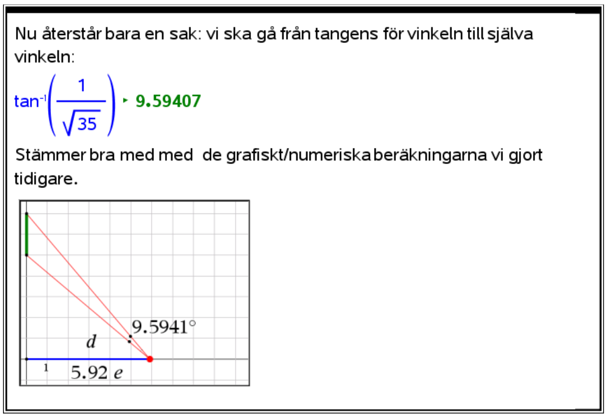


Vi har använt det inbyggda verktyget *tExpand*, där t står för trigonometri. I formelsamlingar kan man säkert hitta formeln

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Be eleverna kontrollera att man kommer fram till uttrycket $\dfrac{2d}{d^2+35}$.

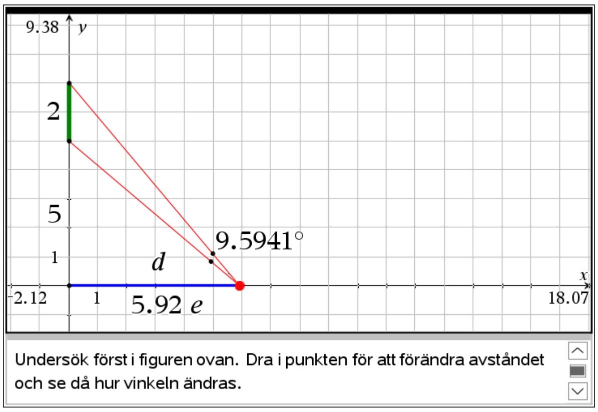
Vi kommer fram till att vi får den minsta vinkeln när tangens för vinkeln är $1/\sqrt{35}$.


Nu återstår bara en sak: vi ska gå från tangens för vinkeln till själva vinkeln:

$\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right) \blacktriangleright 9.59407$

Stämmer bra med med de grafiskt/numeriska beräkningarna vi gjort tidigare.

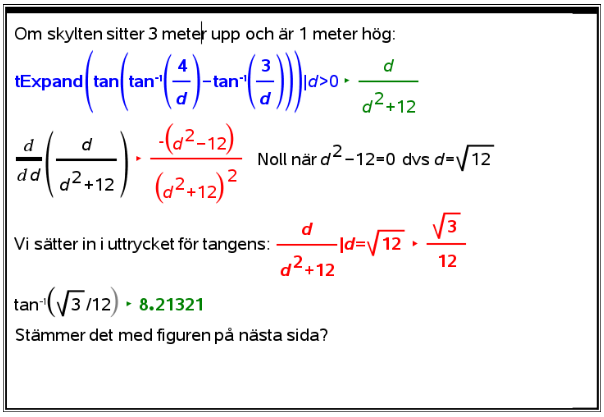
Gå till sid 2 och kontrollera hur det stämmer.



Undersök först i figuren ovan. Dra i punkten för att förändra avståndet och se då hur vinkeln ändras.

Problem 2

I problem 2 löser vi uppgiften med andra mått.


Om skylten sitter 3 meter upp och är 1 meter hög:

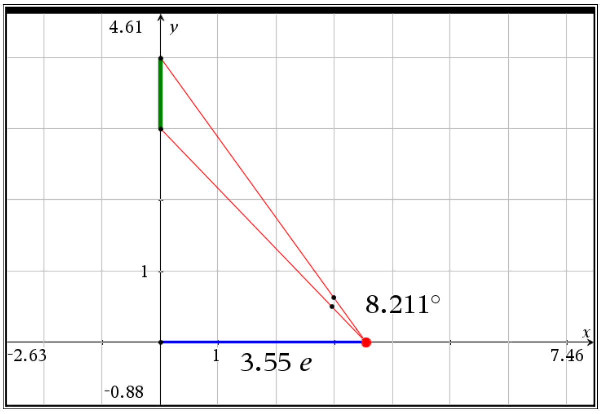
$\text{tExpand}\left(\tan\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{d}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{d}\right)\right)\right)|d>0 \blacktriangleright \dfrac{d}{d^2+12}$

$\dfrac{d}{dd}\left(\dfrac{d}{d^2+12}\right) \blacktriangleright \dfrac{-(d^2-12)}{(d^2+12)^2}$ Noll när $d^2-12=0$ dvs $d=\sqrt{12}$

Vi sätter in i uttrycket för tangens: $\dfrac{d}{d^2+12}|d=\sqrt{12} \blacktriangleright \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

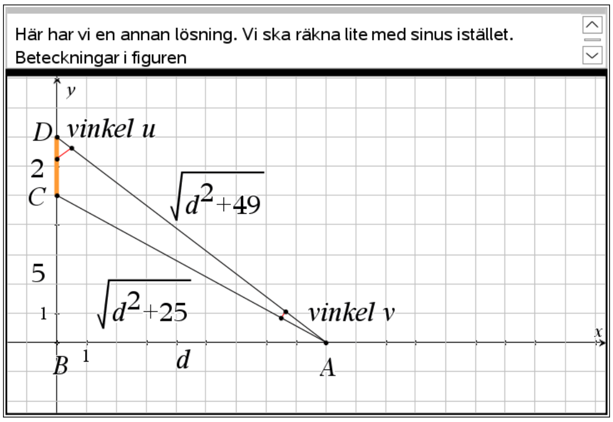
$\tan^{-1}(\sqrt{3}/12) \blacktriangleright 8.21321$

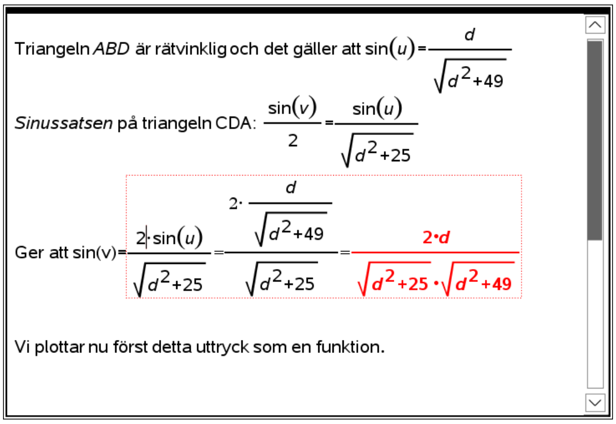
Stämmer det med figuren på nästa sida?



Problem 3

Här använder vi istället sinus i våra beräkningar. Se figur nedan.

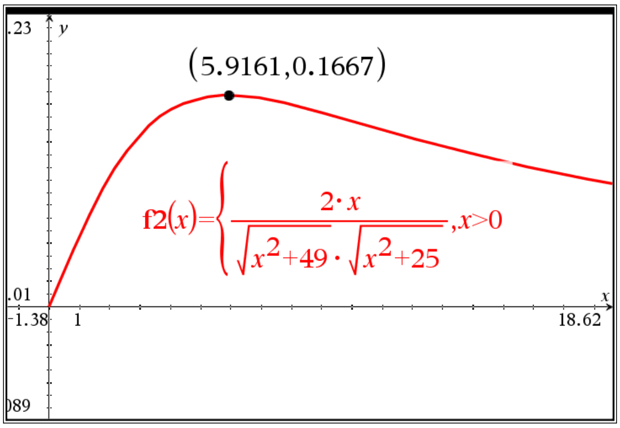

Här har vi en annan lösning. Vi ska räkna lite med sinus istället. Beteckningar i figuren


Triangeln *ABD* är rätvinklig och det gäller att $\sin(u)=\dfrac{d}{\sqrt{d^2+49}}$

Sinussatsen på triangeln CDA: $\dfrac{\sin(v)}{2}=\dfrac{\sin(u)}{\sqrt{d^2+25}}$

Ger att $\sin(v)=\dfrac{2\cdot\sin(u)}{\sqrt{d^2+25}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{d}{\sqrt{d^2+49}}}{\sqrt{d^2+25}}=\dfrac{2\cdot d}{\sqrt{d^2+25}\cdot\sqrt{d^2+49}}$

Vi plottar nu först detta uttryck som en funktion.



Nu deriverar vi uttrycket

$$\frac{d}{dd}\left(\frac{2\cdot d}{\sqrt{d^2+49}\cdot\sqrt{d^2+25}}\right) \blacktriangleright \frac{-2\cdot\left(d^4-1225\right)}{\left(\left(d^2+25\right)\cdot\left(d^2+49\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Uttrycket är noll när d^4-1225 är noll, dvs när $d=1225^{1/4} \blacktriangleright \sqrt{35}$

Vi sätter in detta värde på d i uttrycket för sinus för vinkeln

$$\frac{2\cdot d}{\sqrt{d^2+49}\cdot\sqrt{d^2+25}}\Big|d=\sqrt{35} \blacktriangleright \frac{1}{6}$$

Beräkning av vinkeln $\sin^{-1}(1/6) \blacktriangleright 9.59407$

Här har vi alltså löst uppgiften på två sätt. Med den första metoden så fick vi använda en formel för $\tan(\alpha-\beta)$ och det är knappast en formel man har i huvudet. Här kunde man använda verktyget algebra/trigonometri-verktyget *Utveckla* för att förenkla.

I det andra fallet fick man använda sinussatsen för att komma vidare.

Svårt att säga vilken metod som ligger närmast till hands. Man kan dock alltid säga att uppgifter berikas om man kan visa på flera sätt att angripa problemet.

Det finns säkert fler sätt. Deriveringarna hade dock varit lite jobbiga att göra för hand. För att snabbt beräkna nollställena för derivatafunktionerna så tittar vi när täljaren är noll. Man bör dock alltid se till att inte nämnaren råkar bli noll samtidigt.