Chapitre 6

Géométrie analytique

Ce chapitre présente les possibilités de votre calculatrice dans le domaine de la géométrie analytique, tout particulièrement pour les problèmes liés aux espaces euclidiens. Le dernier paragraphe est consacré aux coniques.

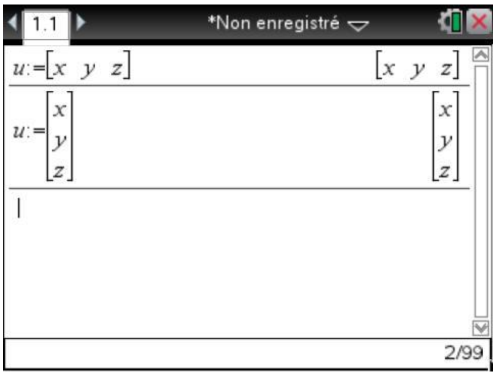
1. Manipulation des points ou des vecteurs

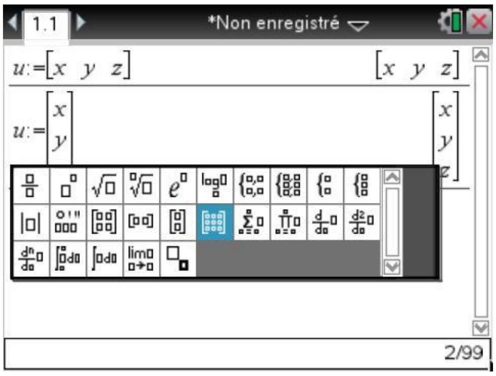
1.1 *Représentation par une matrice ligne ou colonne*

Pour manipuler des points ou des vecteurs, il suffit de stocker les composantes :

- sous la forme d'une matrice ligne $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ en séparant chaque composante par une virgule,
- ou d'une matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ en utilisant un point-virgule.

☞ *On peut également utiliser les modèles disponibles par .*
Le point-virgule est dans la palette de symboles qui s'obtient à l'aide de la touche .





Nous vous recommandons la seconde solution si vous souhaitez utiliser des matrices, et calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire. Vous pourrez en revanche utiliser sans problème la première représentation si vous vous limitez aux opérations usuelles : somme, produit par un scalaire, produit scalaire, produit vectoriel.

Les fonctions les plus utiles sont dans le sous-menu **Vecteur** du menu **Matrice & vecteur** :

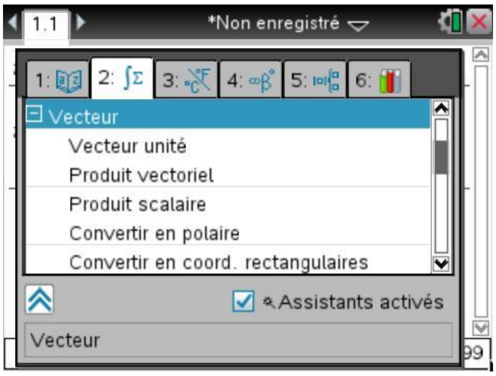
unitV Permet d'obtenir un vecteur de norme 1 colinéaire à un vecteur donné.

crossP Produit vectoriel de deux vecteurs.

DotP Produit scalaire de deux vecteurs.

Vous trouverez également dans le sous-menu **Normes** la fonction **norm** permettant de calculer la norme d'un vecteur.

Vous pouvez également utiliser ces fonctions à partir du catalogue général page 2.



Si par la suite, vous voulez récupérer certains éléments placés dans une matrice, vous aurez besoin de savoir que :

mat[*i*,*j*] permet d'obtenir l'élément situé sur la *i*-ième ligne et la *j*-ième colonne d'une matrice *mat*.

mat[*i*] permet d'obtenir, sous la forme d'une matrice ligne, la *i*-ème ligne d'une matrice *mat*.

2. Quelques exemples

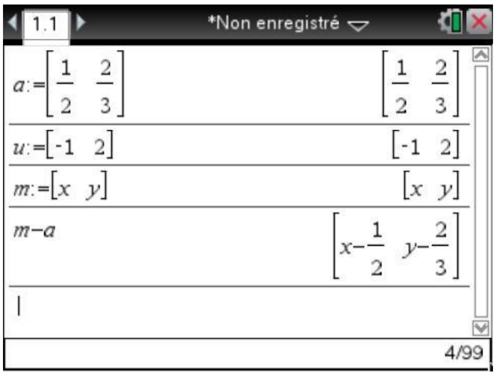
2.1 *Équation réduite d'une droite*

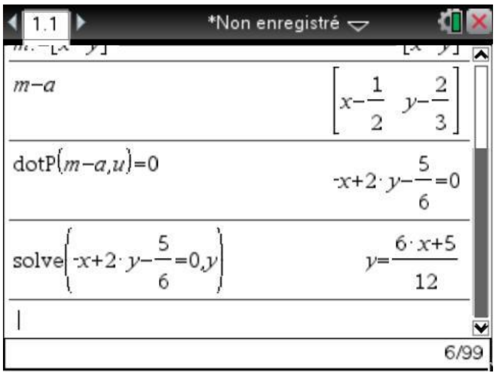
On demande de déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A\begin{pmatrix}1/2\\2/3\end{pmatrix}$, orthogonale à la droite D d'équation $2x+y+4=0$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est sur cette droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de D.

Après avoir défini les variables **a**, **u**, **m**, on obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en calculant **m−a**, puis le produit scalaire avec $\vec{u}$ en utilisant la fonction **dotP**.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation obtenue en écrivant que ce produit scalaire doit être nul pour obtenir l'équation réduite.

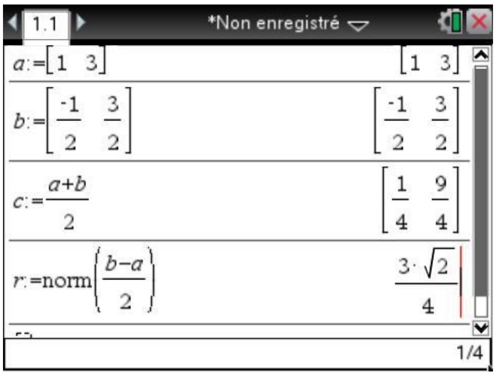




2.2 *Équation d'un cercle*

On recherche l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1/2\\3/2\end{pmatrix}$.

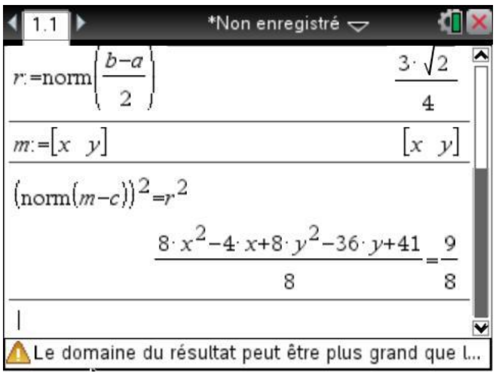
Une première méthode consiste à déterminer le rayon et le centre de ce cercle.

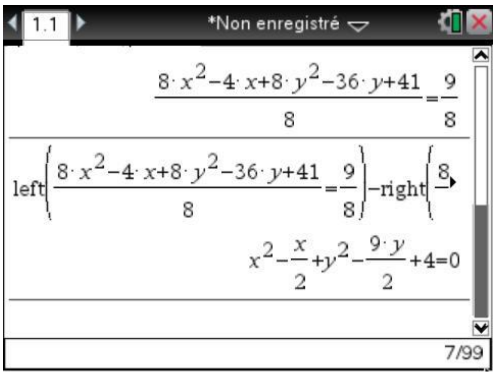


On peut ensuite utiliser la formule générale de l'équation d'un cercle de centre $C\begin{pmatrix}x_c\\y_c\end{pmatrix}$ et de rayon R :

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2$.

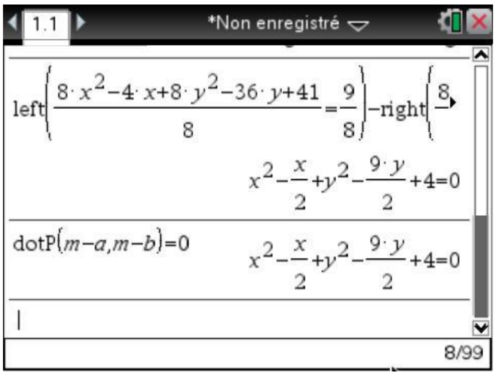
C'est-à-dire, écrire que le carré de la distance de $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ à C est égale à R^2.





☞ *Sur le dernier écran, nous avons utilisé les fonctions* **left** *et* **right** *présentes dans le sous-menu* **Extraire** *du menu* **Algèbre** *pour extraire les membres de gauche et de droite de l'équation précédente et en faire la différence.*

La seconde méthode, beaucoup plus rapide ici, consiste à utiliser le fait qu'un point M est sur le cercle si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$:

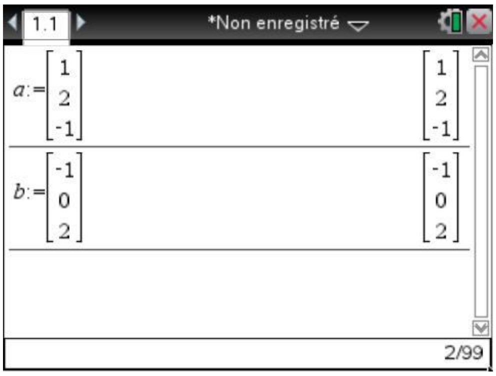


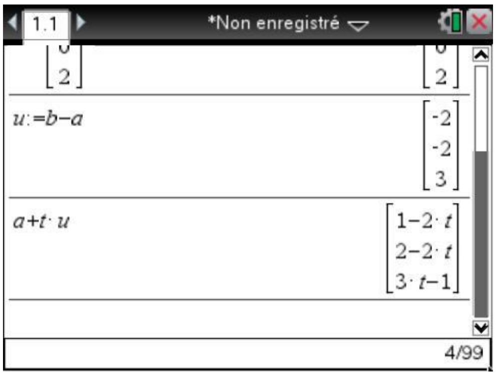
2.3 *Intersection entre une droite et un plan*

Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et P le plan d'équation $x-y+2z=0$.

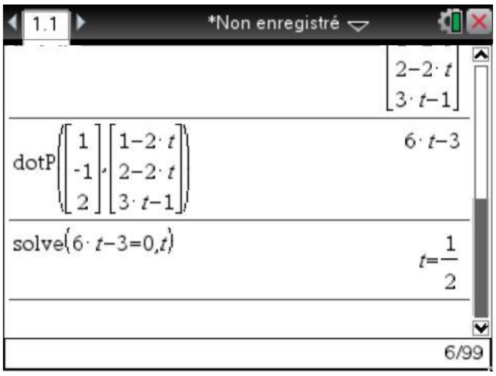
On demande de déterminer le point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P.

On va commencer par déterminer $\vec{u}$, vecteur directeur de la droite (AB), puis les coordonnées d'un point quelconque de cette droite (système d'équations paramétriques) :

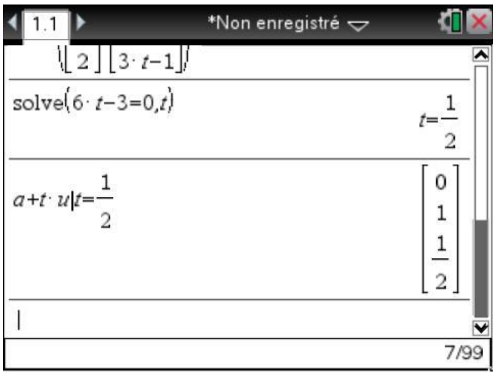




Le plus simple est ensuite de faire le produit scalaire avec le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ qui est normal au plan P pour obtenir $x-y+2z$. On cherche ensuite pour quelle valeur de t cette expression est nulle.



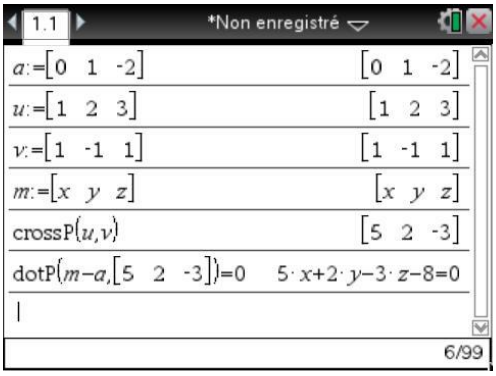
Il ne reste plus qu'à remplacer t par sa valeur dans l'expression définissant le point M :

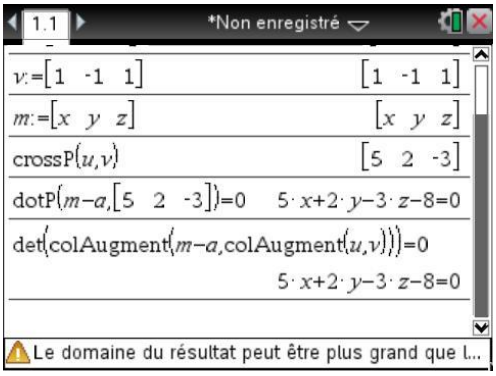


2.4 *Équation d'un plan dans l'espace*

On recherche l'équation du plan défini par le point $A\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est dans ce plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.





☞ *Dans l'écran de droite on écrit directement que le produit mixte des trois vecteurs* $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ *est nul. Pour cela on construit la matrice à l'aide de* **colAugment** *(ce sont des vecteurs lignes) et on écrit que le déterminant est nul.*

3. Espaces euclidiens

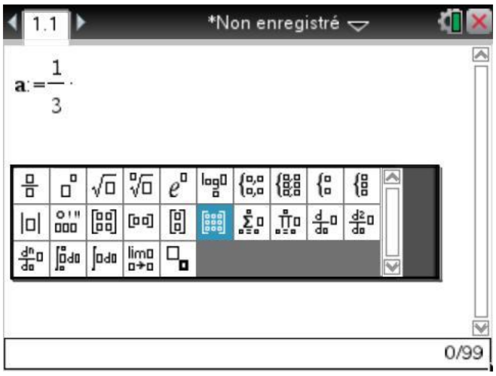
Nous allons voir que l'utilisation de la TI-Nspire CAS permet de simplifier considérablement la résolution d'exercices classiques, comme par exemple l'étude de la nature d'une isométrie définie par une matrice, la recherche d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel, ou encore la recherche de la matrice d'une projection ou d'une symétrie orthogonale.

3.1 *Déterminer la nature d'une isométrie*

Dans un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme *f* dont la matrice est $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. On demande de déterminer la nature de *f*.

Nous allons montrer qu'il s'agit d'une isométrie en vérifiant que ${}^tAA = I_3$, et que cette isométrie est directe en montrant que $\det(A) = 1$.

On saisit la matrice en utilisant le modèle ⊞. On passe d'une case à l'autre à l'aide de [tab].



☞ *Pour transposer la matrice, nous avons utilisé l'opérateur* ᵀ. *Cet opérateur s'obtient dans le menu* **Matrice & vecteur**. *On doit placer cet opérateur après la matrice.*
Cet opérateur calcule en fait la transposée de la conjuguée de la matrice initiale, ce qui est donc différent de la matrice transposée pour les matrices à coefficients complexes. Il s'agit en fait de la matrice de l'adjoint.

Cette matrice est donc la matrice d'une rotation vectorielle.

Nous savons que l'angle de cette rotation vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{trace}(A) = \frac{5}{3}$.

On a donc $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$.

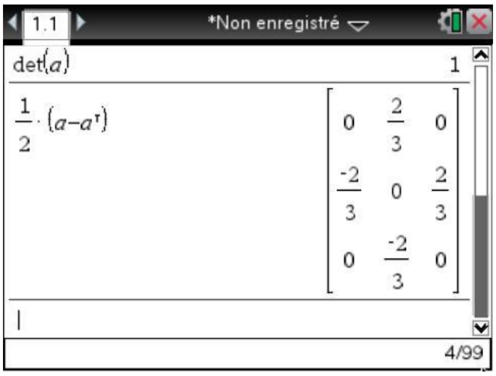
Pour déterminer son axe et une mesure de l'angle, on pourrait par exemple commencer par chercher les vecteurs invariants.

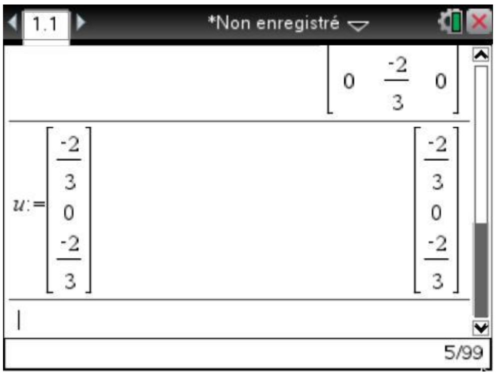
Il existe en fait une méthode plus rapide, bien adaptée à l'utilisation d'une calculatrice.

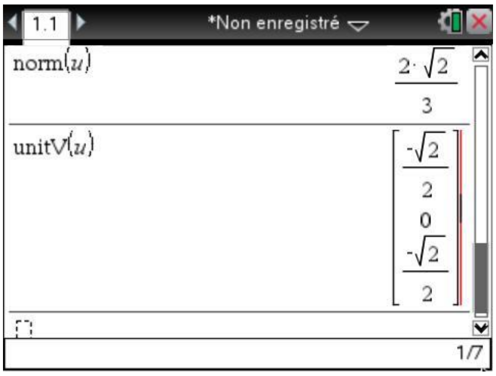
Si on calcule $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$, on obtient une matrice antisymétrique du type :

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

On peut montrer que si on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, alors on a $\vec{u} = \sin(\theta)\vec{k}$, avec $\vec{k}$ vecteur unitaire, colinéaire à $\vec{u}$, vecteur directeur de l'axe de la rotation, et θ mesure de l'angle de la rotation lorsque l'on oriente l'axe suivant le vecteur $\vec{k}$.







En conclusion, on obtient un vecteur normé directeur de l'axe en prenant $\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et l'angle de la rotation vérifie alors $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{3}\\ \sin(\theta)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$.

On pourrait aussi choisir de prendre $\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, avec $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{3}\\ \sin(\theta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$.

☞ *Vous trouverez à la fin de ce chapitre un exemple d'étude d'une symétrie orthogonale.*

3.2 *Orthogonalisation d'une base*

Pour déterminer une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel muni du produit scalaire euclidien il suffit d'utiliser la fonction **QR**, accessible dans le sous-menu **Avancé** du menu **Matrice & vecteur**, ou dans le catalogue (ce qui permet d'avoir la syntaxe).

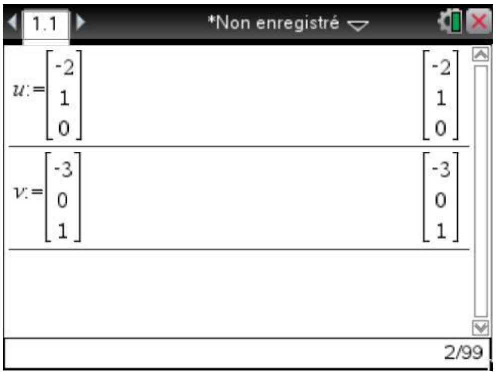
Soit par exemple le plan P défini par $x+2y+3z=0$.

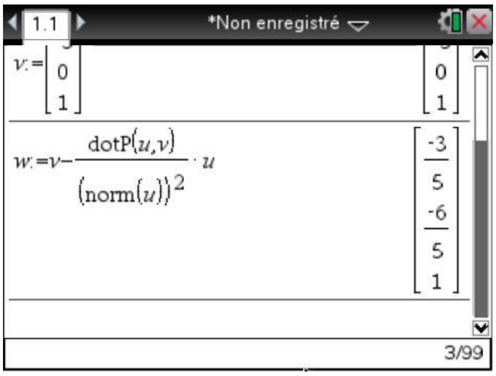
Les vecteurs de ce plan sont du type $\begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

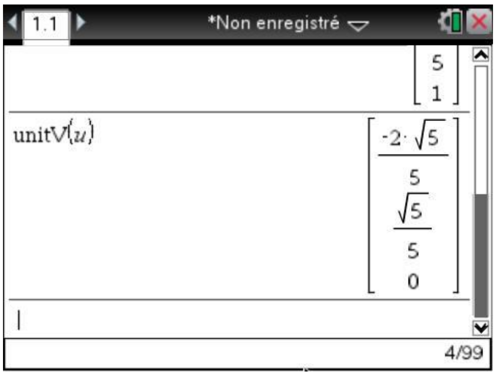
On obtient donc une base de ce plan en considérant $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

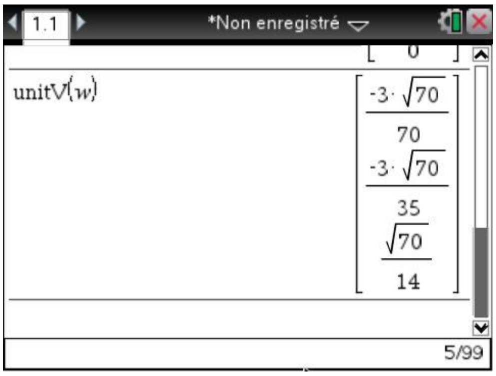
Pour obtenir une base orthonormée de ce plan, on peut suivre la méthode du cours.

On construit $\vec{w} = \vec{v} - \dfrac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$, puis on calcule $a = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $b = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$:

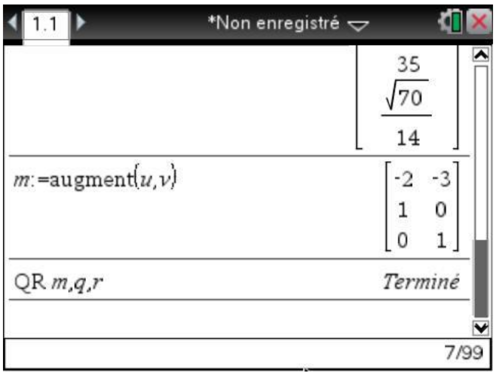


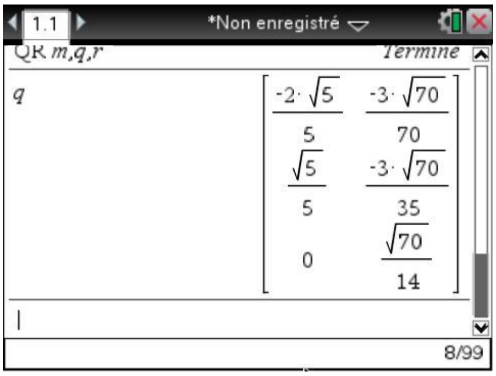






En fait, sur une TI-Nspire CAS, tout cela peut se faire en une seule opération en demandant la décomposition QR de la matrice $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.





- *Nous avons utilisé la fonction* **augment** *pour regrouper les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour en faire une matrice avec 2 colonnes et 3 lignes.*
- *La décomposition QR s'obtient en utilisant l'instruction* **QR**. *Cette instruction place dans les matrices indiquées sur la ligne de commande le résultat de cette décomposition. On obtient donc le résultat en deux temps.*
  1. *On exécute la commande* **qr m,q,r**.
  2. *On demande la valeur de la matrice* **q**.

On obtient une base orthonormée en prenant $\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{-3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix}$.

3.3 *Projections et symétries orthogonales*

Voici un exercice posé à un oral de concours[1].

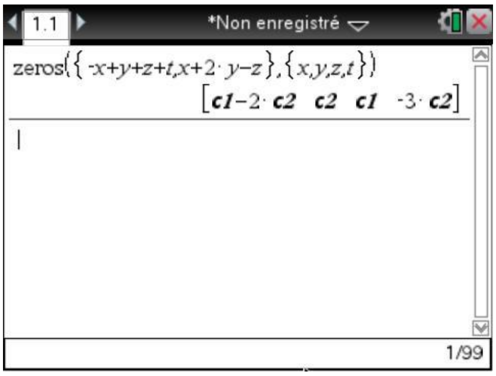
Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel défini par $\begin{cases} -x+y+z+t=0 \\ x+2y-z \quad =0 \end{cases}$.

On demande de déterminer l'image du vecteur $(1,1,1,1)$ par la symétrie orthogonale par rapport à ce sous-espace. Nous allons tout d'abord utiliser une méthode proche de celle utilisée en cours.

Nous savons que si $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F, la projection de u sur F s'obtient en calculant $p(u) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i | u \rangle e_i$ et le symétrique de u par $s(u) = 2\,p(u) - u$.

Commençons par insérer une nouvelle activité ou d'ouvrir un nouveau classeur afin d'éviter tout conflit avec des variables déjà assignées, recherchons ensuite une base de F :

```
zeros({ ⁻x+y+z+t,x+2y−z},{x,y,z,t})
```

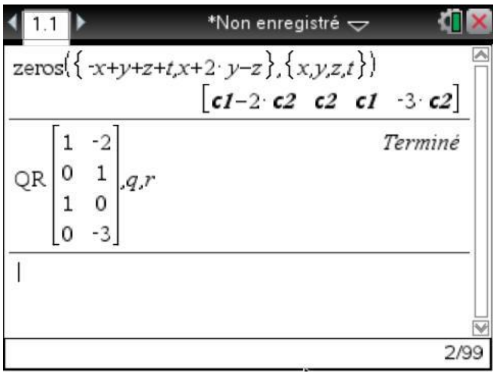


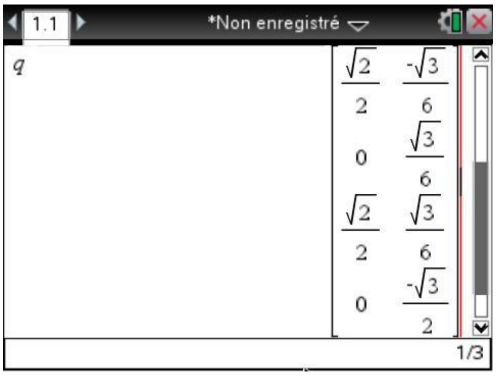
Les vecteurs de F sont de la forme $(a-2b, b, a, -3b)$, on obtient donc une base en prenant $(1,0,1,0)$ et $(-2,1,0,-3)$.

Utilisons l'instruction **QR** pour obtenir une base orthonormée de F :

```
qr [1, ⁻2;0,1;1,0;0, ⁻3],q,r
```

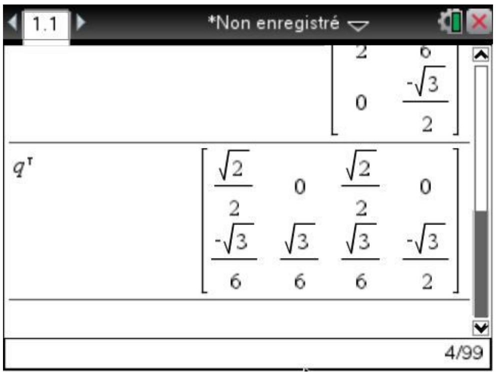
[1] Note destinée aux élèves de lycée : dans cet exercice, les vecteurs sont notés sans mettre de flèches. C'est la pratique courante après le bac, surtout dans les espaces vectoriels de dimension supérieure à 3.

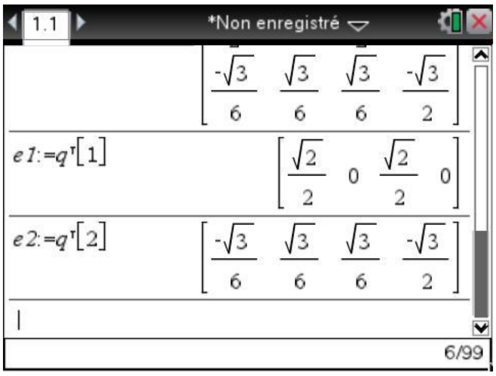




On obtient ainsi $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Il reste à récupérer ces deux vecteurs à partir de la matrice **q**. Il n'y a pas d'instructions spécifiques pour faire ce travail sur la TI-Nspire CAS. Par contre, il est facile d'extraire les lignes d'une matrice. On va donc transposer la matrice **q**, puis extraire les deux lignes de cette matrice.



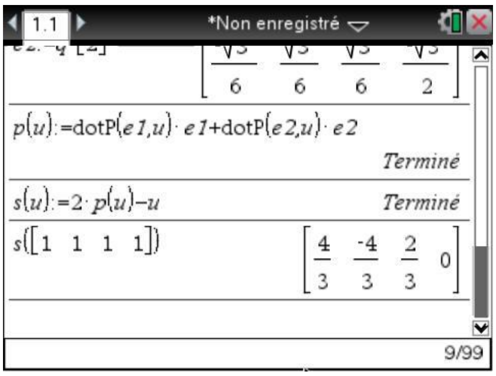


Si on préfère revenir à une notation en colonne, on doit transposer à nouveau, mais ce n'est pas indispensable ici.

Il reste à utiliser les formules du cours.

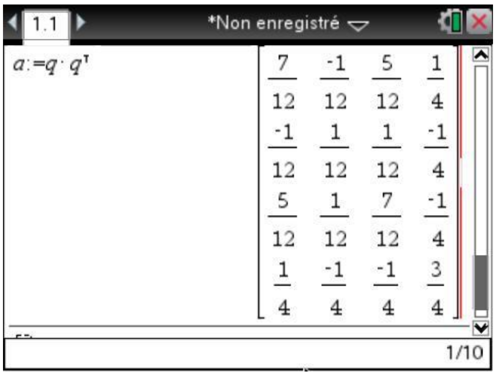
p(u):=dotP(e1,u)e1+dotP(e2,u)e2

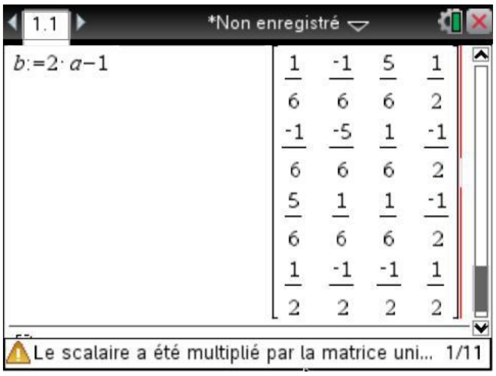
s(u):=2p(u)-u



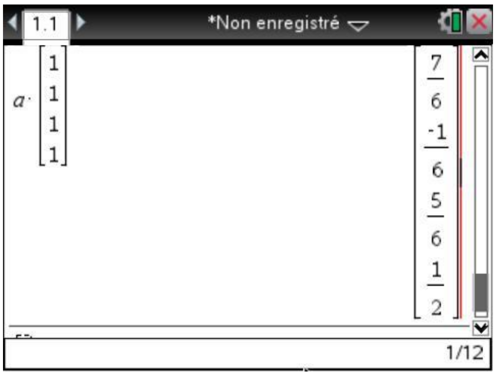
Il est en fait possible de faire tout ce calcul beaucoup plus rapidement à partir de la matrice Q.

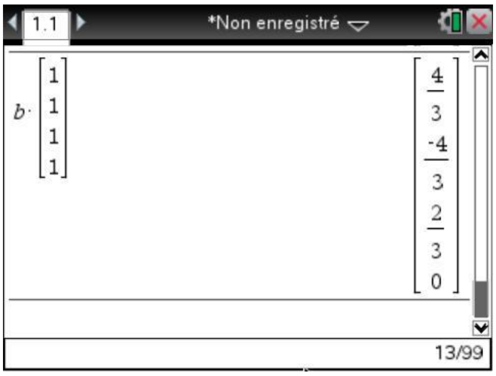
On peut en effet montrer que si Q est la matrice formée par les vecteurs colonnes d'une base orthonormée de F, il suffit de calculer $A = Q \cdot {}^tQ$ pour obtenir la matrice de la projection sur F, puis $B = 2A - I$ pour obtenir celle de la symétrie par rapport à F.



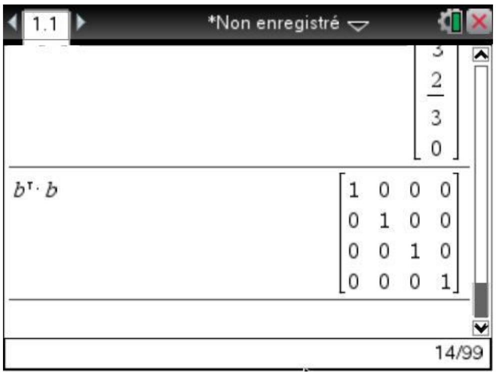


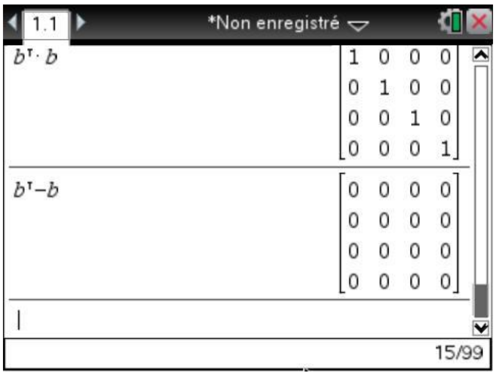
Cela nous permet d'obtenir directement l'image de $(1,1,1,1)$ par la projection ou par la symétrie :





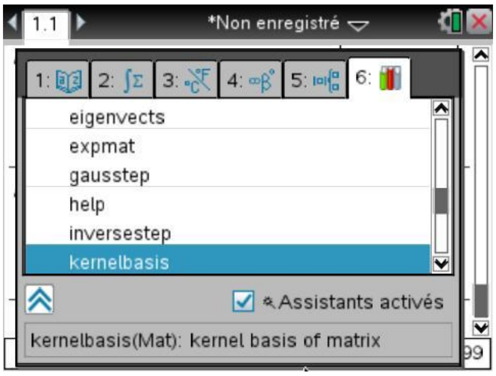
B est bien une matrice de symétrie orthogonale : on a $B {}^tB = I_4$ et $B = {}^tB$:

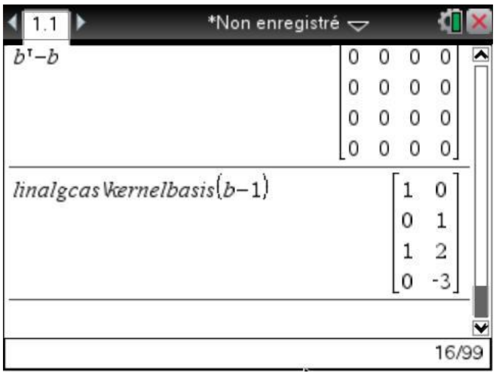




On peut enfin déterminer l'ensemble des invariants de cette isométrie. Le plus simple est de rechercher le noyau de $f - Id$ à l'aide de la fonction **kernelbasis** dont l'utilisation est décrite dans le **chapitre 9**, calcul matriciel avancé.

Attention, cette fonction ne fait pas partie des fonctions de base de la calculatrice, et vous ne pourrez donc pas obtenir l'écran suivant si vous n'avez pas placé la bibliothèque **linalgcas** dans le dossier MyLib. Vous trouverez plus d'explications à ce sujet dans le **chapitre 15**.





On obtient un espace invariant de dimension 2, engendré par $u=(1,0,1,0)$ et $v=(0,1,2,-3)$.

4. Coniques

Depuis la version 3.2, la TI-Nspire CAS permet de représenter et d'étudier des coniques.

4.1 *Représentation graphique*

Prenons l'exemple d'un exercice d'oral (ENSAM).

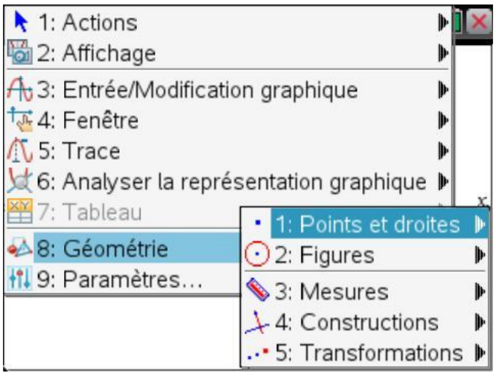
Il s'agit de déterminer l'équation et la nature de la conique passant par cinq points du plan :

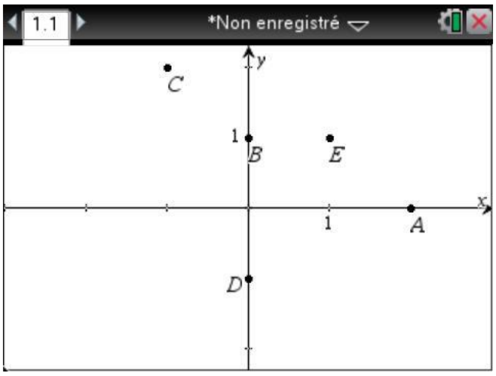
$$A(2,0),\ B(0,1),\ C(-1,2),\ D(0,-1) \text{ et } E(1,1).$$

On ne s'intéresse ici qu'à la représentation graphique.

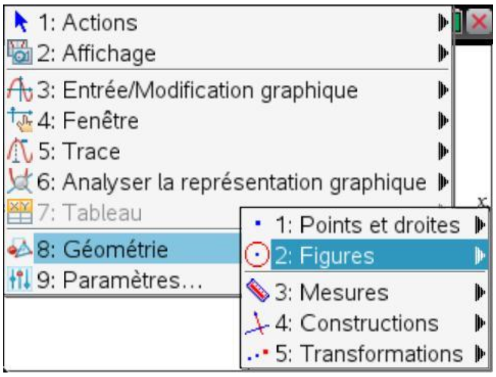
On commence par placer les cinq points : menu 8 1 1.

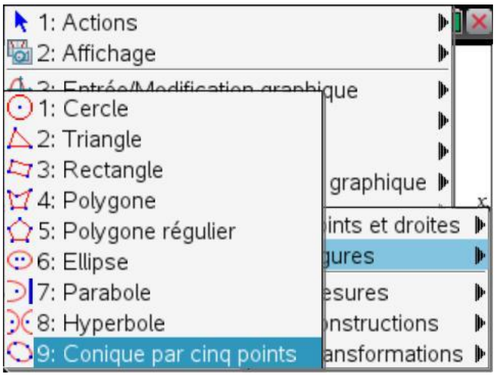
Pour placer correctement les points, on ne clique pas pour placer le point, on ouvre une parenthèse et on saisit la première coordonnée, on valide en appuyant sur enter et on recommence pour la seconde, on valide, le point est placé. On peut alors le nommer à la volée en appuyant sur la lettre voulue.



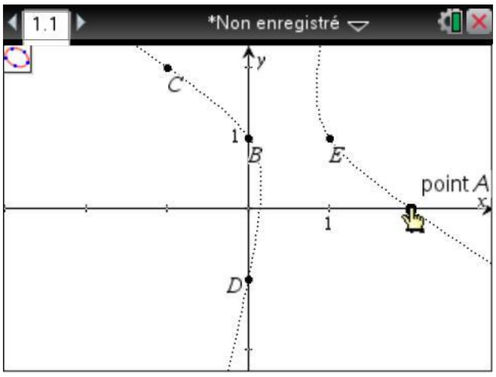


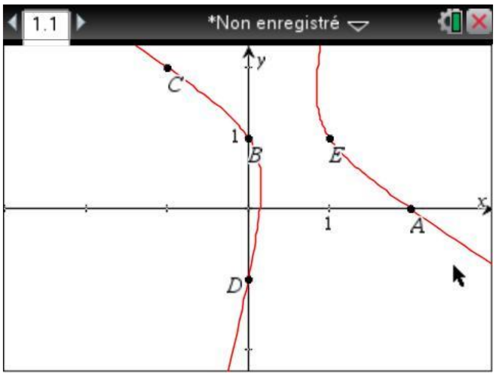
On utilise l'outil **Conique par cinq points** : menu 8 2 9.



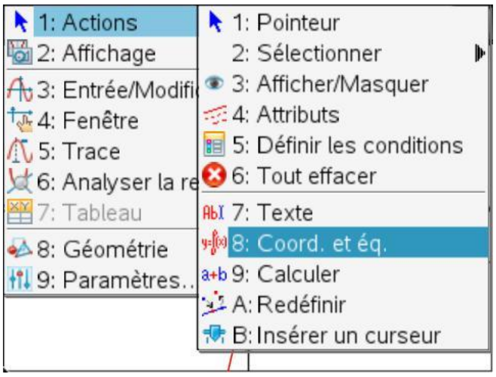


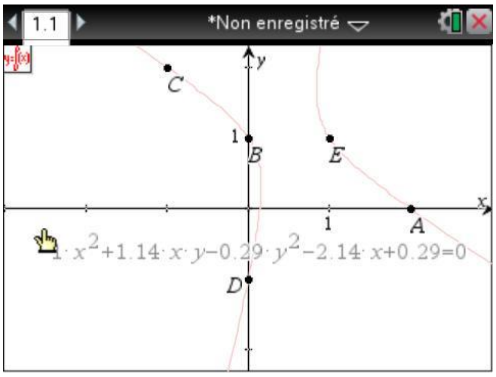
On sélectionne les points les uns après les autres.





On peut demander l'équation de la conique, mais attention, on obtient uniquement des valeurs approchées des coefficients.

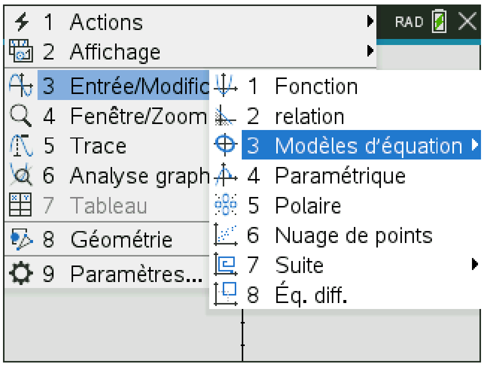


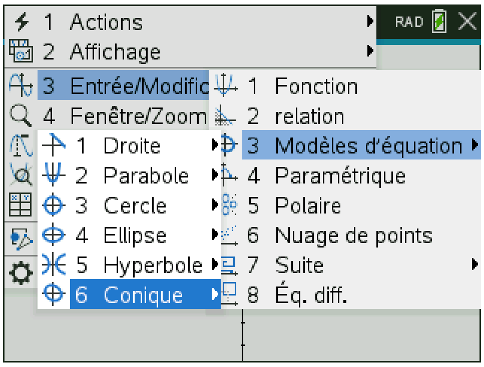


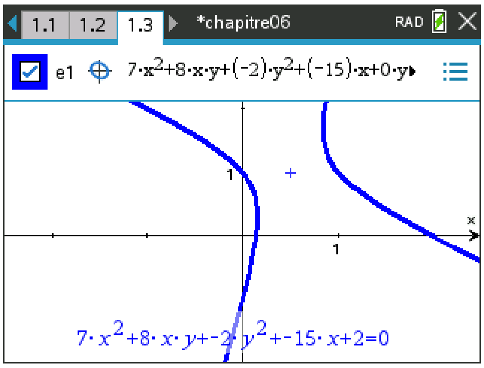
Lorsque l'on connait l'équation de la conique, pour la représenter, on peut également utiliser dans l'application Graphiques le mode **Équation**, puis choisir **Conique** de façon générale, ou un des modèles particuliers correspondant aux équations réduites des trois principales coniques (**Parabole**, **Ellipse** ou **Hyperbole**).

Pour l'exemple ci-dessus nous choisissons **Conique**, puis on entre les coefficients exacts obtenus formellement (voir la correction de l'exercice 4 en fin de chapitre).

menu 3 3 6.

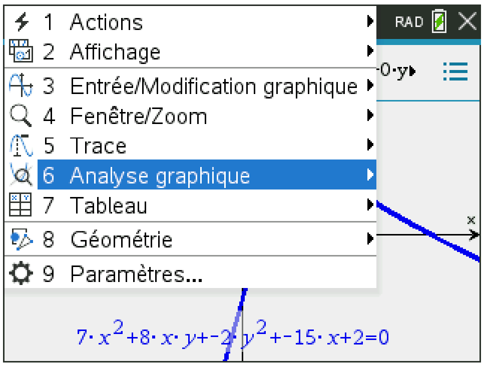


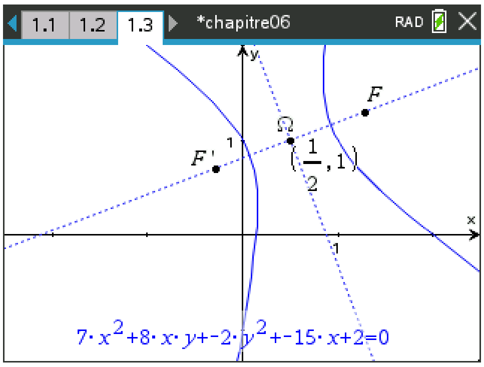




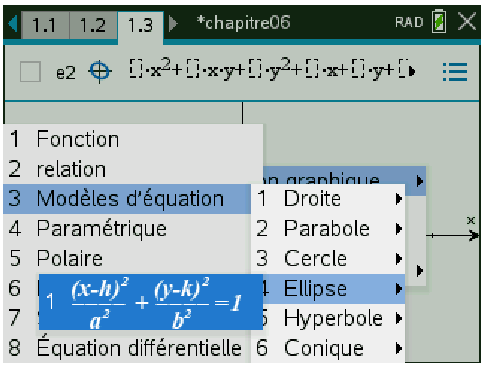
4.2 *Étude*

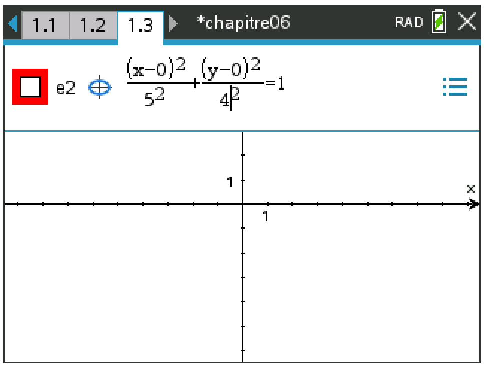
On peut aussi déterminer les éléments caractéristiques d'une conique. Par exemple sur l'hyperbole étudiée précédemment, on peut déterminer le centre, les axes de symétrie, les foyers… menu 6 9



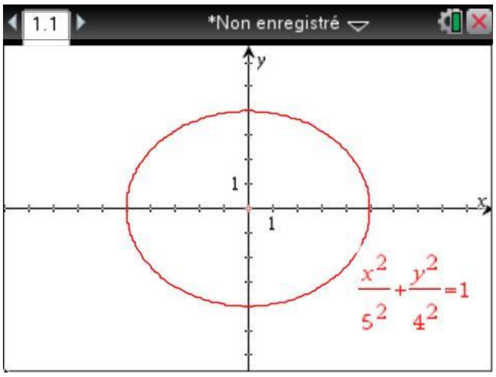


Un autre exemple avec une ellipse (voir aussi exercice 5). Dans l'application Graphiques, ctrl menu dans la ligne de saisie, choisir le mode **Équation**, puis **Ellipse**.

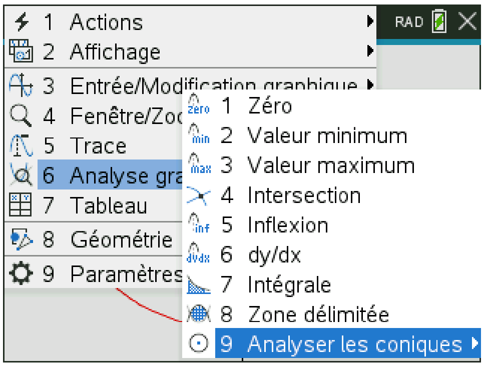


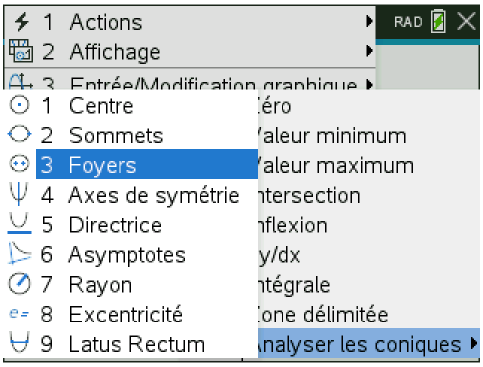


L'ellipse et son équation s'affichent.



Nous allons placer les foyers, les directrices et calculer l'excentricité.





On peut utiliser l'option **Texte** (menu 1 7) afin de nommer les foyers et l'excentricité.