Tyngdpunkt hos en läskburk

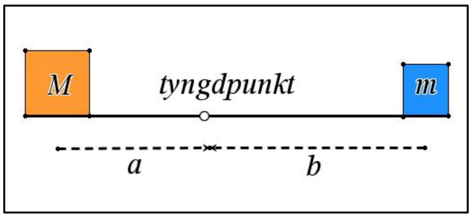
Tyngdpunkten hos en oöppnad burk läsk ligger på halva höjden. När man börjar dricka sjunker tyngdpunkten. När burken sedan är tom ligger tyngdpunkten åter på halva höjden. Hur är det möjligt? Kommer tyngdpunkten någonsin att nå botten av burken?

Detta leder till slut till följande frågeställning:

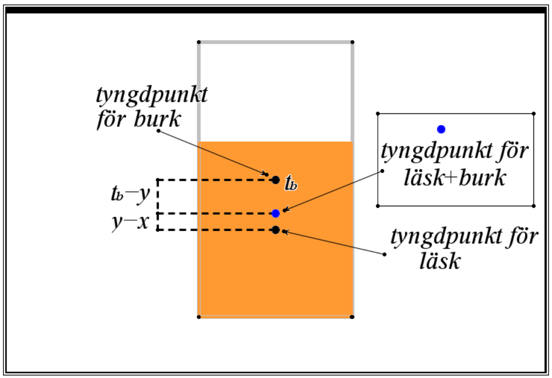
Hur beror tyngdpunktens läge på mängden läsk i burken?

Illustration av begreppet tyngdpunkt

Med en lång linjal och två vikter kan man lätt illustrera begreppet tyngdpunkt. Om två vikter med massorna m och M placeras på motsatta sidor av linjalen kommer tyngdpunkten att ligga någonstans mittemellan. I den här bilden är objektet M a cm från B, medan objekt m är b cm från B. Genom att balansera linjal/vikt-systemet på ett finger kan man lätt hitta tyngdpunktens läge och man upptäcker att sambandet $M \cdot a = m \cdot b$ gäller.



Nedan visar vi först hur vårt system ser ut och vi inför olika beteckningar.



Nu kan vi ställa upp vår tyngdpunktsekvation. m_b och m_l är massorna hos burk respektive läsk.

Man kan teckna följande följande ekvation för "2−partikelsystemet":

$m_b \cdot (t_b - y) = m_l \cdot (y - x)$

Vi löser ut *y*, som är läget hos tyngdpunkten för systemet burk + läsk

$\text{solve}(m_b \cdot (t_b - y) = m_l \cdot (y - x), y) \blacktriangleright y = \frac{m_l \cdot x + m_b \cdot t_b}{m_b + m_l}$

Nu vill vi uttrycka hur läget *y* beror på höjden hos läsken i burken. Vi måste då först göra en del förenklingar av uttrycket ovan.

Vi löser ut *y*, som är tyngdpunktens läge för systemet. Sedan gör vi en del omskrivningar av uttrycket. Ägna en stund åt detta. Vi utnyttjar bl.a. proportionalitet mellan massa och höjd hos läskinnehållet.

I uttrycket $y = \frac{m_l \cdot x + m_b \cdot t_b}{m_b + m_l}$ beror *y* på två variabler, m_l, massan hos den återstående läsken, och *x*, som är läget för läskens tyngdpunkt.

Massan hos läsken är ju proportionell mot höjden av läsken (*h*). Om höjden från början (full burk) är h_{start} och massan från början är m_{start} så gäller $m_l = \frac{h}{h_{start}} \cdot m_{start}$

Dessutom är ju läskens tyngdpunkt alltid belägen på halva höjden hos läsken. Detta ger $x = \frac{h}{2}$.

När vi har gjort omskrivningen för y och trycker på enter så förenklas uttrycket automatiskt.

Vi gör till sist ytterligare en förenkling eftersom vi vet att tyngdpunkten hos själva burken är hälften av burkens höjd.

Vi sätter in dessa samband i uttrycket för y:

$$y = \frac{\frac{h}{h_{start}} \cdot m_{start} \cdot \frac{h}{2} + m_b \cdot t_b}{m_b + \frac{h}{h_{start}} \cdot m_{start}} \blacktriangleright y = \frac{h^2 \cdot m_{start} + 2 \cdot h_{start} \cdot m_b \cdot t_b}{2 \cdot (h \cdot m_{start} + h_{start} \cdot m_b)}$$

Vi kan nu faktiskt förenkla ytterligare genom att vet att tyngdpunkten hos burken, t_b, är hälften av burkens höjd, dvs.

$t_b = \frac{h_{start}}{2}$

Äntligen kan vi nu få det slutliga uttrycket. Vi sätter sedan in värden vi känner till. Vi har här använt värden från amerikanska läskburkar. Använd gärna svenska standardvärden i de fortsatta beräkningarna.

Massan hos läsken: 360 gram

Höjden hos läsken från början: 12 cm

Massan hos burken: 30 gram

Denna förenkling med $t_b = \frac{h_{start}}{2}$ ger då det slutliga uttrycket

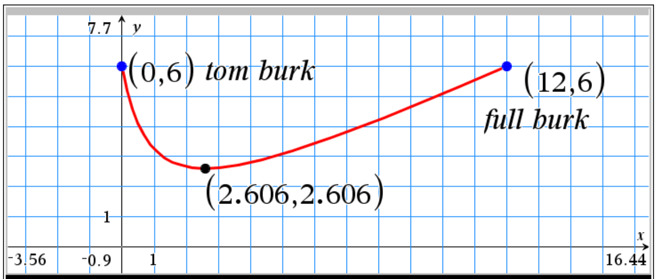
$$y = \frac{h^2 \cdot m_{start} + 2 \cdot h_{start} \cdot m_b \cdot \frac{h_{start}}{2}}{2 \cdot (h \cdot m_{start} + h_{start} \cdot m_b)} \blacktriangleright y = \frac{h^2 \cdot m_{start} + h_{start}^2 \cdot m_b}{2 \cdot (h \cdot m_{start} + h_{start} \cdot m_b)}$$

Vi sätter nu in värden vi känner till om burken och läsken:

$$y = \frac{h^2 \cdot 360 + 12^2 \cdot 30}{2 \cdot (h \cdot 360 + 12 \cdot 30)} \blacktriangleright y = \frac{h^2 + 12}{2 \cdot (h + 1)}$$

På nästa sida ritar vi detta samband och beräknar grafiskt/numeriskt minsta värdet.

Nu kan vi plotta det samband vi kommit fram till:



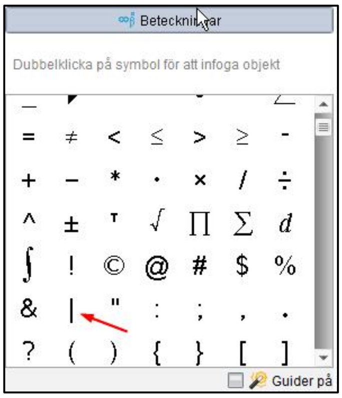
Vi ser att tyngdpunkten för burk/läsksystemet är densamma när läskburken är tom och när den är full. Sedan sjunker tyngdpunkten till ett minsta värde och stiger igen.

Dessutom har tyngdpunkten vid minimipunkten samma värde som höjden hos läskinnehållet. Är det alltid så? Vi gör först en exakt beräkning.

Den funktion vi plottat är alltså $y = \dfrac{x^2+12}{2\cdot(x+1)}$ och vi har lagt in villkoret att *x* ska ligga i intervallet 0<x<12. När man skriver in detta i funktionsinmatningen använder man följande syntax:

$$f1(x)=\frac{x^2+12}{2\cdot(x+1)}|0<x<12$$

Det vertikala strecket finns under Beteckningar i Dokumentverktygslådan.



Observera att x- och y-koordinaten i minimipunkten har *samma värde*. Det ska vi nu undersöka genom att göra först en exakt beräkning med derivata.

$$\frac{d}{dx}(f1(x)) \blacktriangleright \left\{\frac{x^2+2\cdot x-12}{2\cdot(x+1)^2}, 0<x<12\right.$$

Ekvationen kan lätt lösas om man sätter uttrycket i täljaren lika med noll.

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f1(x))=0,x\right) \blacktriangleright x=\sqrt{13}-1$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f1(x))=0,x\right) \blacktriangleright x=2.60555$$

$$f1(\sqrt{13}-1) \blacktriangleright \sqrt{13}-1$$

Den sista delen i denna undersökning ät tämligen avancerad och man behöver inte ta upp beviset för att värdena på tyngdpunkten och läskens höjd är lika i minimipunkten.

Vi går tillbaka till det allmänna uttrycket och deriverar med avseende på *h*:

Vi observerade att tyngdpunkten vid minimipunkten har samma värde som höjden hos läskinnehållet. Är det alltid så? Vi går tillbaka till det allmänna uttrycket där vi inte satt in några värden på konstanterna, dvs. värdena på massa hos burk och läskinnehåll och höjd hos burken. Vi hade uttrycket:

$$y=\frac{h^2\cdot m_{start}+h_{start}^2\cdot m_b}{2\cdot(h\cdot m_{start}+h_{start}\cdot m_b)}$$ Derivering ger:

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{h^2\cdot m_{start}+h_{start}^2\cdot m_b}{2\cdot(h\cdot m_{start}+h_{start}\cdot m_b)}\right) \blacktriangleright \frac{(h^2\cdot m_{start}+2\cdot h\cdot h_{start}\cdot m_b-h_{start}^2\cdot m_b)\cdot m_{start}}{2\cdot(h\cdot m_{start}+h_{start}\cdot m_b)^2}$$

Nu tittar vi bara på täljaren och skriver om detta uttryck. Vi kommer slutligen fram till att *y*=*h*.

Derivatan är noll när uttrycket inom parentesen i täljaren är noll. Vi skriver nu först om detta uttryck:

$$2\cdot h\cdot(m_{start}\cdot h+h_{start}\cdot m_b)-(m_{start}\cdot h^2+m_b\cdot h_{start}^2)$$

Uttrycket är noll när

$$2\cdot h\cdot(m_{start}\cdot h+h_{start}\cdot m_b)=(m_{start}\cdot h^2+m_b\cdot h_{start}^2)$$

Nu är ju $y=\dfrac{h^2\cdot m_{start}+h_{start}^2\cdot m_b}{2\cdot(h\cdot m_{start}+h_{start}\cdot m_b)}$ vilket då kan skrivas som

$$y=\frac{2\cdot h\cdot(m_{start}\cdot h+h_{start}\cdot m_b)}{2\cdot(h\cdot m_{start}+h_{start}\cdot m_b)} \blacktriangleright y=h$$

I MINIMIPUNKTEN GÄLLER ALLTSÅ ATT TYNGDPUNKTEN LIGGER VID YTAN HOS DEN ÅTERTÅENDE LÄSKEN. GÄLLER FÖR ALLA CYLINDRISKA BURKAR.

Här visar vi plottat uttrycket för lite olika storlekar på burkens höjd. Vi ser att minimipunkterna ligger på linjen *y* = *x*.