konstanten e

dyker upp i många sammanhang

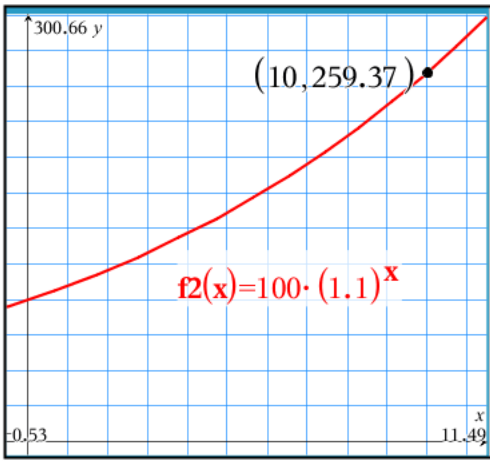
– En liten matematisk rundresa i ett dynamiskt dokument

Eulers tal är **e** uppkallat efter den schweiziske matematikern och fysikern *Leonhard Euler* (1707 – 1783). Han gav det beteckningen **e** även om det inte var han som upptäckte den. Talet tros ha upptäckts av en annan schweizisk matematiker, *Jacob Bernoulli* (1655–1705), medan han arbetade på lösningen på ett problem som handlade om sammansatta räntor. Se exempel nedan!

Du lånar 100 kr och ska betala 10 % ränta årligen. På 10 år växer då din skuld till

$100 \cdot (1.1)^{10}$ ▸ 259.37424601 dvs ungefär 259 kronor.

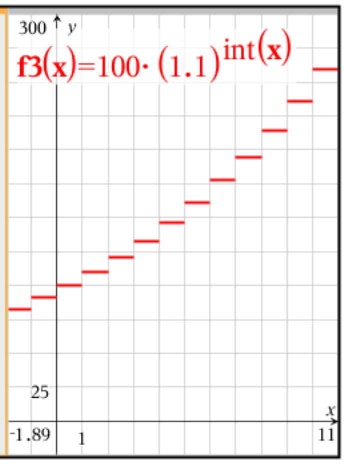
Vi plottar en graf på detta som visar hur mycket skulden ökar för varje år. Se nästa sida.



x	f2(x):= 100*(1.1).
1.	110.
2.	121.
3.	133.1
4.	146.41
5.	161.051
6.	177.1561
7.	194.871...
8.	214.358...
9.	235.794...
10.	259.374...
11.	285.311...

110.

Grafen på förra sidan är egentligen lite missvisande. Räntan läggs ju på vid varje årsskifte och sedan händer ingenting på kontot förrän nästa årsskifte då ränta läggs på igen. Man säger att ränteperioden är ett år och att räntan kapitaliseras årligen. För att vi ska få en korekt bild har vi använt funktionen *int*, som står för *heltalsdelen*. De vågräta linjestyckerna i trappan visar just att det sammanlagda kapitalet är oförändrat fram till årsskiftet då räntan läggs på.



Vad händer om vi nu beräknar räntan oftare än efter ett år? Om vi väljer att räntan ska beräknas varje *månad* som blir ju räntesatsen 12 gånger mindre och så får vi på 10 år 12 gånger 10 ränteperioder:

$$100 \cdot \left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12 \cdot 10} ▸ 270.704149085 \text{ kr}$$

Om vi nu räknar ränta varje *dag* då? Ok, då blir det så här:

$$100 \cdot \left(1+\frac{0.1}{365}\right)^{365 \cdot 10} ▸ 271.790955418 \text{ kr}$$

Nu tar vi i. Vi beräknar räntan varje *sekund*.

$$100 \cdot \left(1+\frac{0.1}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}\right)^{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10} ▸ 271.829965614 \text{ kr}$$

Det skiljer alltså bara 4 öre mellan de sista två beräkningarna.

	A	B period	C totalt	D
=			=100*(1+0.1/period)^(period*10)	
1	år	1	259.37424601	
2	halvår	2	265.329770514	
3	månad	12	270.704149085	
4	dagar	365	271.790955418	
5	sekunder	31536000	271.829965614	
6	100 miljoner	100000000	271.82818271	
7	en miljard	1000000000	271.828182832	
8	1000 miljarder	1000000000000	271.828182846	

A1 år

Beräkningarna från förra sidan gör man enklare i kalkylarket.

Nu prövar vi att skriva konstanen **e** i TI-Nspire. Vi Går till verktyglådan och väljer Verktyg (symbolen 📖) och sedan Beteckningar. Välj där **e**. Vi infogar en matematikruta och skriver **e** där. Vi får då: **e ▸ 2.71828182846**

Matematikern Bernoulli insåg betydelsen av detta tal – men kanske inte helt och hållet. Dess fulla betydelse skulle kom först långt senare. Han insåg dock att talet närmar sig ett gränsvärde när n närmar sig oändligheten enligt uttrycket nedan. Detta gränsvärde kan uttryckas på följande sätt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) ▸ e$$

Det har gjorts många försök att beräkna värdet av detta tal som vi känner till som Eulers tal eller oftast bara **e**. Det är ett irrationellt tal och kan inte uttryckas som en kvot av två heltal.

__Fördjupning:__

Vi tänker oss nu att man kortar ner ränteperioden och samtidigt *justerar* räntan så att årsräntan blir exakt 10 % så kommer *gränsvärdet* för kapitalet som funktion av tiden t år att bli sambandet $100 \cdot 1.10^t$. Men vad händer om man *inte* justerar för att få den givna årsräntan 10 % utan delar året i n perioder med periodräntan $10/n$ %? Vad ger det för formel och vad motsvarar det för årsränta då antalet perioder går mot oändligheten?

Som tidigare får vi då $\lim_{n \to \infty} \left(100 \cdot \left(1+\frac{0.1}{n}\right)^{n \cdot t}\right)$

forts nästa sida →

Forts Fördjupning: Nu blir det lite trolleri med formlerna! Vi låter n/0,10 vara lika med k. Det ger att n=0.1k. Vi får då

$$\lim_{n\to\infty}\left(100\cdot\left(1+\frac{0.1}{n}\right)^{n\cdot t}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(100\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{0.1\cdot k\cdot t}\right)$$

som kan skrivas om som $\lim_{k\to\infty}\left(100\cdot\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{0.1\cdot t}\right)$

Nu är ju gränvärdet för $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ när k går mot oändligheten lika med **e** så då blir uttrycket $100\cdot e^{0.10\cdot t}$

Istället för 110 kr på ett år blir det nu $100\cdot e^{0.1\cdot 1}$ ▸ **110.517091808**

Allt det här betyder nu att om vi har ***k*** st kapitaliseringar per år och räntan ***r*** räknat som decimaltal, t.ex. 0,10 för 10 %, som beräknas och förs till kapitalet varje sekund, eller annat litet tidsintervall, under ***t*** år så kan uttrycket

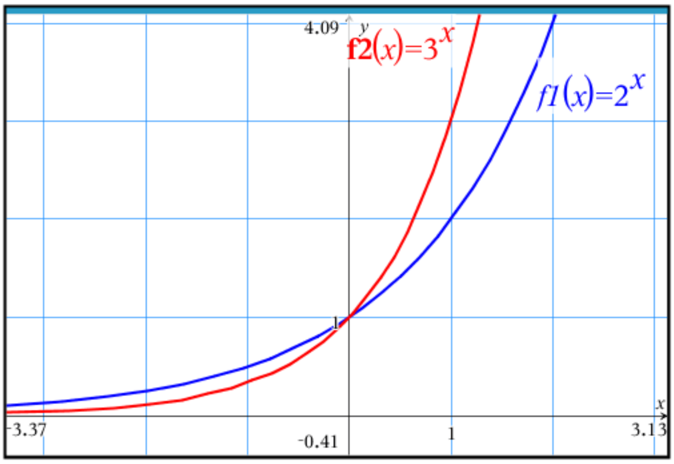
$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k\cdot t}$ approximeras med $e^{r\cdot t}$

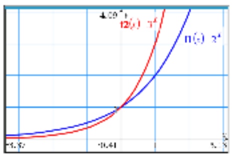
vilket är mycket smidigare!

Problem 2

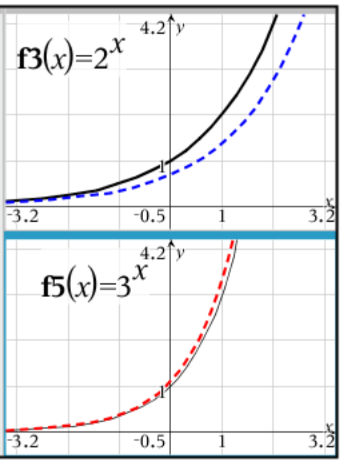
Eulers tal **e** är alltså användbart i beräkningar som handlar om sammansatta ränteberäkningar. Nu är det så att **e** dyker upp i många sammanhang, både i matematik och andra vetenskaper. Vi ska nu titta först närmare på s.k. exponentialfunktioner. Du har säkert kommit kontakt med funktioner som $y=x^2$. Här är det variabeln x som är upphöjd till ett bestämt tal. Det är s.k *potensfunktioner*. För exponentialfunktioner är det tvärtom. Här är det basen som har ett konstant värde och variabeln x är exponenten. $y=2^x$ är ett exempel på en exponentialfunktion.

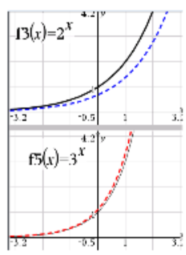
På nästa sida ska vi nu plotta exponentialfunktionerna och undersöka dem lite närmare.





Man ser i grafen att funktionen $y=3^x$ växer snabbare än$y=2^x$ när x växer. Ett sätt att under-söka detta är att studera tillväxthastigheten. Högst upp har vi 2^x och längst ner3^x med sina respektive derivata-funktioner. Vad upptäcker du?



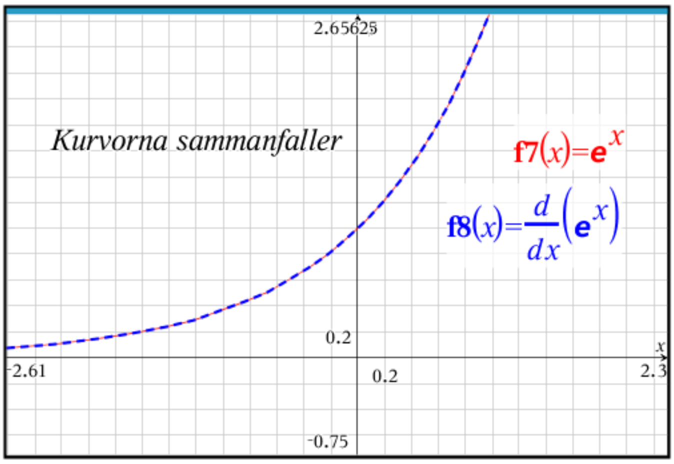


I den översta grafen så ser man att derivatafunktionen ligger ***under*** funktionen och har en liknande bara som 2^x men efterhand så fjärmar den sig från funktionen.

För funktionen $y=3^x$ är det annorlunda. Derivata-funktionen ligger ***över*** och väldigt nära själva funktionen hela tiden.

Finns det nu någon funktion där funktionen och dess derivatafunktion överlappar varandra hela tiden? Isåfall måste basen i den funktionen ligga någonstans mellan 2 och 3 och kanske lite närmare 3.

Du börjar nog misstänka vad det är för funktion. Lösningen har du på nästa sida.



Exponentialfunktionen, som man ibland skriver som exp(x), är av särskilt intresse i den del av matematiken som kallas matematisk analys och man använder matematisk analys för att studera saker som förändras på ett icke linjärt sätt.

Vi har redan tittat på hur värdet av ett lån eller en investering växer med ränta på ränta. Det finns i den verkliga världen många exempel på saker som modelleras på ett liknandet sätt. Exempel på detta är befolkningstillväxt, spridning av smittsamma sjukdomar och radioaktivt sönderfall. Dessa exempel är alla kvantiteter som ökar, eller minskar, i en takt som är proportionell mot deras nuvarande värde. Exponentialfunktionen är särskilt användbar för att beskriva sådana fenomen och det beror på att tillväxttakten alltid matchar deras nuvarande värde.

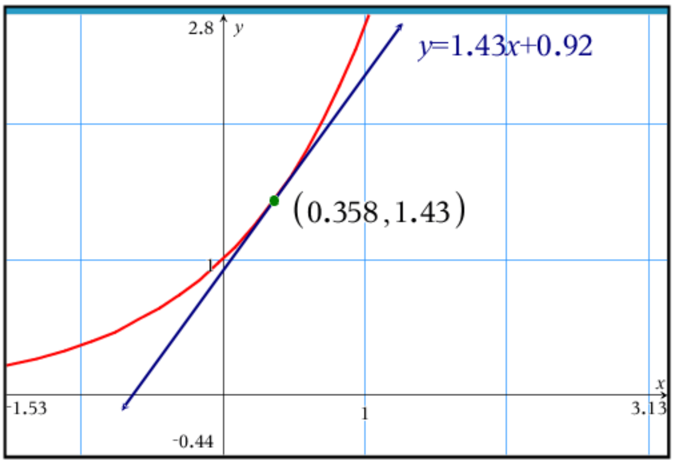
Nu gräver vi vidare i denna besynnerliga men mycket användbara funktion.

Som ni ser är graferna på sid 5 verkligen identiska. Funktionen $y=\mathbf{e}^x$ är känd som Exponentialfunktionen eller exp(x) och derivatan av funktionen beskriver tillväxttakten. Antar att du redan har en hel del kunskap om derivator. Om inte, oroa dig inte för mycket om detaljer. Det räcker att du förstår att för en deriverbar funktion $f(x)$ så kommer derivatafunktionen $f'(x)$ att visa den momentana förändringstakten av funktionen för något värde på x.

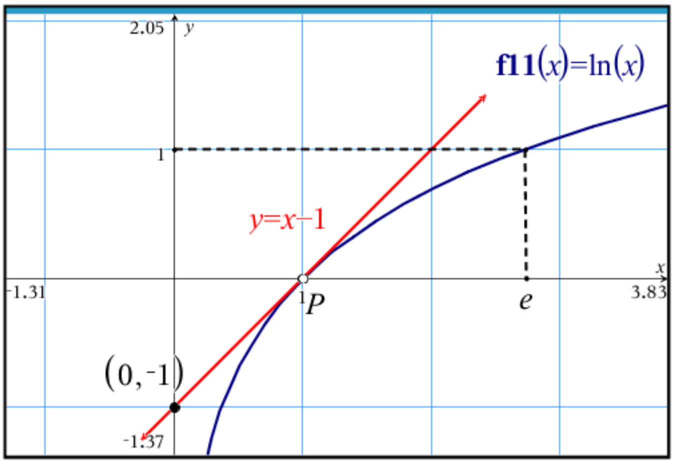
Exponentialfunktionen är väldigt speciell genom att dess derivatafunktion är själva exponentialfunktionen.

Derivatan av en funktion för ett bestämt värde P kan bestämmas genom att mäta lutningen på grafen i punkten P. För exponential–funktionen $\mathbf{e}^x$ är lutningen alltid lika med y–koordinaten för punkten.

Se nästa sida. På nästa sida: **Dra i den gröna punkten och obsevera tangentens lutning och y–värdet för funktionen!**



Den *inversa* funktionen till exponentialfunktionen är den naturliga logaritmfunktionen, som vi kallar ln(x) eller $\log_e(x)$. Du kanske undrar varför vi använder naturliga logaritmer, som har basen e istället för vanliga logaritmer som har basen tio. Å andra sidan är den naturliga logaritmfunktionen direkt relaterad till e^x så det finns anledning att misstänka att den kan vara lika användbar. Låt oss ta en titt på en annan graf för att försöka få en känsla för vad som gör den naturliga logaritmen så speciell. På nästa sida visas grafen för funktionen y = ln(x). Den naturliga logaritmen av **e** är 1 och vi har angett detta på grafen. Vi har också plottat tangenten till grafen vid punkten (1, 0). Om du tittar närmare på tangenten så ser du att den också passerar genom punkten (0, −1). Lutningen på grafen måste då vara 1. Visas också av ekvationen för linjen (y=x−1) som visas i rött bredvid grafen.

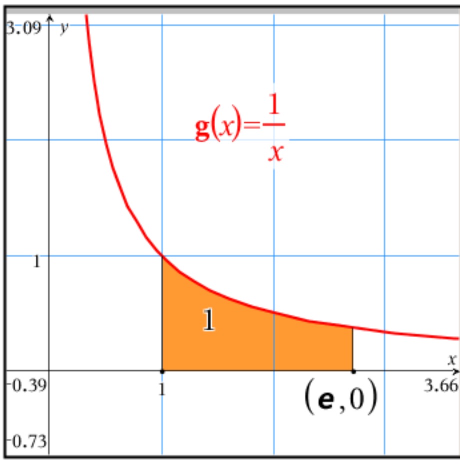


Det visar sig att lutningen på kurvan ln(x) på förr sidan är 1/x för alla positiva värden på x. Alltså är derivatan av ln(x)=1/x. Vi prövar:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))|x>0 \;\blacktriangleright\; \frac{1}{x}$$

Om man drar i tangeringspunktem på förra sidan till värdet x=2 så visas ekvationen för tangenten och då står det y=0.5x−0.3. Det stämmer med lutningen som ska vara 1/x (1/2=0,5).

Det finns en ytterligare egenskap hos naturkiga logaritmer. Om du undersöker grafen av y=1/x, som är derivatan av y=ln(x), och sedan beräknar arean under kurvan mellan x=1 och x= **e** så blir den 1.



$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{x}\,dx \;\blacktriangleright\; 1$$

Problem 3

Konstanten e dyker upp i många olika sammanhang

En liten loppa befinner sig i punkten 1 på x–axeln och hoppar i sitt första hopp en enhet till höger. I nästa hopp är den lite tröttare och orkar bara hoppa hälften så långt. I hoppet därefter är den ännu tröttare så då orkar den bara hoppa 1/3 så långt som i hoppet innan osv. Så här blir då hopplängderna:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\cdot 3} \quad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \cdots$$

Var hamnar nu vår trötta loppa efter ett mycket stort antal hopp?

För att kunna göra beräkningen på förra sidan så ska vi titta på några symboliska verktyg hos TI–Nspire för matematisk analys och vi tar här upp två st nya *funktioner: Summa* $\sum$ och *fakultet* **!**

Vad blir t.ex. summan 1+4+9 .... +100 ? För att kunna svara på den frågan måste man förstå vad det är för termer vid prickarna som inte skrivits ut. Det finns i matematiken ett precist sätt att skriva sådana summor med hjälp av summatecknet $\sum$. TI–Nspire har också en inbyggd funktion för att kunna beräkna sådana här summor.

sista termen har nummer 10

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

term nr n har värdet n^2

n betecknar termnummer

första termen har nummer 1

Vi prövar nu att beräkna summan nedan med programmet

$\sum_{n=1}^{10} (n^2)$ ▸ 385

Pröva gärna själv att beräkna summan av alla heltal mellan 1 och 100. Ändra då 10 till 100 och n^2 till n. Du ska få 5050.

En annan funktion som vi nu också tar upp är fakultet som kan definieras så här:

För ett heltal som är större än noll är fakulteten lika med produkten av alla heltal från 1 upp till och med talet självt. Fakultet betecknas med ett utropstecken (!), fakultetstecken. Alltså är till exempel 4! lika med 1·2·3·4 som är lika med 24.

Fakulteter växer väldigt snabbt, t.ex. är **10!** ▸ 3628800

Åter till problemet med loppan. Vi ska alltså beräkna summan

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\ldots$ I nämnarna har vi just fakulteter.

Vi prövar nu hur långt den kommer på tallinjen efter 10 hopp:

$1+\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right)$ ▸ 2.71828180115 (Ctrl+enter ger närmevärdet)

Nu inför vi oändlighetessymbolen, som TI-Nspire kan hantera. Den kan du kopiera in från verktygslådan och under Beteckningar.

$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$ ▸ e Talet ***e*** dyker alltså upp i oväntande situationer!

Problem 4

Det är julafton och tomten ska dela ut julklapparna till alla barn i staden. Nu har han glömt att sätta på lappar på vilka som ska ha de olika paketen så han delar ut klapparna helt slumpmässigt. Hur stor är då sannolikheten att ***inget*** barn får sin egen julklapp?

Lösningen på detta problem är att sannolikheten är

$$1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ldots$$

Här får man vara lite klurig eftersom varannan term har plus framför och varannan term har minus framför. Vi testar nu en formel för

2 personer: $1-\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$ ▸ $\frac{1}{2}$ stämmer förstås

3 personer: $1-\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$ ▸ $\frac{1}{3}$

Här finns 6 möjligheter att dela ut paketen varav 2 st ger "ingen får sitt eget paket".

Vi fortsätter ⇒

10 personer $1-\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$ ▸ 0.367879464286

$\frac{1}{0.3678794643}$ ▸ 2.71828165756 Detta tal börjar kännas bekant!!

Nu tar vi det stora klivet:

$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$ ▸ e^{-1}

Konstanten ***e*** dyker alltså upp här också.

Problem 5

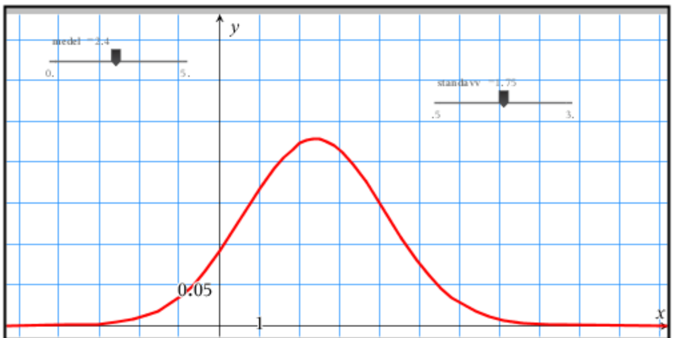
Du känner säkert igen grafen på nästa sida. Det är en s.k. normalördelningskurva, eller för att vara korrekt, normal-fördelningens täthetsfunktion. Normalfördelning är ett mycket viktigt begrepp inom statistik och sannolikhetslära och det har du ju behandlat i dina studier. Funktionsuttrycket för den här kurvan kan skrivas

$$y=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

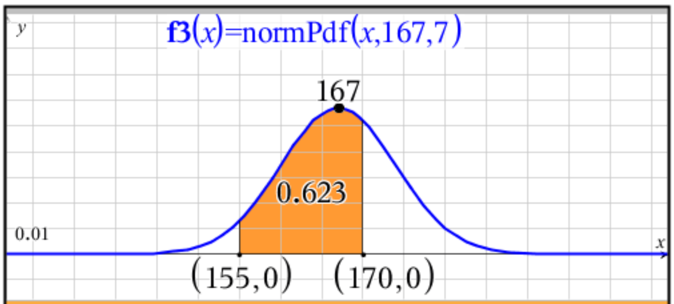
σ standardavvikelsen och μ medelvärdet.

Man ser att konstanten ***e*** finns i formeln. Konstanten *π* dyker också upp och faktorn $1/\sqrt{2\pi}$ framför det exponentiella uttrycket ser till att arean mellan kurvan och *x*-axeln alltid är 1 areaenhet.

Vi plottar denna funktion på nästa sida.



TI-Nspire har en inbyggd funktion för att plotta normalfördelningar. Man skriver här f2(x)=normpdf(x,medel,standavv). Dra i reglagen för att ändra värden för medelvärde och standardavvikelse.



Grafen visar att en normalfördelad population där medelvärde för kroppslängd är 167 cm och standardavvikelsen är 7 cm. Beräkning visar att ca 62 % har längder mellan 155 och 170 cm för en population som följer denna normalfördelning. Det motsvaras av arean av det oranga fältet.

Problem 6

På nästa sida visar vi plottningar av den vanliga exponential–funktionen $\mathbf{e}^x$ och potensfunktionen $x^{\mathbf{e}}$. Vi vänder alltså på bas och potens. Om vi plottar dessa i samma koordinatsystem och samtidigt plottar differensen $\mathbf{e}^x - x^{\mathbf{e}}$ ser vi att $\mathbf{e}^x$ för positiva x förutom för $x=\mathbf{e}$ förstås verkar vara större än x^{e}. Alltså är t.ex. $\mathbf{e}^2 > 2^{\mathbf{e}}$, $\mathbf{e}^{10} > 10^{\mathbf{e}}$ osv.

Det är faktiskt så att detta bara gäller för talet e.

Ändra gärna fönsterinställningarna så att du ser graferna för större värden på *x* och *y*. Man ser att exponentialfunktionen drar iväg ordentligt.